

Differenciálegyenletek

Jegyzet

Eisner Tímea
Pécsi Tudományegyetem

Matematika BSc szakos hallgatóknak
2011

Tartalomjegyzék

Előszó	5
1. A differenciálegyenlet fogalma	7
2. Közöséges differenciálegyenletek	11
2.1. Elsőrendű differenciálegyenletek	11
2.1.1. Szétválasztható változójú és szétválasztható változójúra visszavezethető differenciálegyenletek	11
2.1.1.1. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek	11
2.1.1.2. Szétválasztható változójúra visszavezethető differenciálegyenletek	17
2.1.1.2.1. Változóban homogén differenciálegyenletek	18
2.1.1.2.2. $\varphi' = g(ax + b\varphi + c)$ típusú differenciálegyenletek	20
2.1.1.2.3. $\varphi' = g\left(\frac{a_1x + b_1\varphi + c_1}{a_2x + b_2\varphi + c_2}\right)$ típusú differenciálegyenletek	23
2.1.1.2.4. $\varphi g_1(x\varphi)dx + xg_2(x\varphi)d\varphi = 0$ típusú differenciálegyenletek	29
2.1.1.3. Feladatok	32
2.1.2. Elsőrendű lineáris és elsőrendű lineárisra visszavezethető differenciálegyenletek	32
2.1.2.1. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek	32
2.1.2.2. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletekre visszavezethető egyenletek	41
2.1.2.3. Feladatok	46
2.1.3. Egzakt és egzakra visszavezethető differenciálegyenletek	47
2.1.3.1. Egzakt differenciálegyenletek	47
2.1.3.2. Euler-féle multiplikátor	55
2.1.3.3. Feladatok	63
2.2. Másodrendű differenciálegyenletek	63
2.2.1. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek	63
2.2.1.1. Feladatok	67
2.2.2. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek	67
2.2.2.1. Konstans együtthatós lineáris differenciálegyenletek	75
2.2.2.2. Euler-féle differenciálegyenletek	82
2.2.2.3. Feladatok	85
3. Útmutatások	87
4. Megoldások	89

Előszó

Ezen differenciálegyenletek jegyzet több éves oktatói tapasztalat alapján elsődlegesen Matematika BSc szakos hallgatók számára készült, de a Gazdasági Informatikus, Fizika BSc, Programtervező Informatikus BSc képzések Kalkulus óráihoz is hasznos segítséget kíván nyújtani.

A jegyzet elkészítése során kiemelt figyelmet kapott, hogy a differenciálegyenletek témakör bevezetése gyakorlat-orientáltan lehet eredményes, ezért a jegyzet felváltva tartalmazza az elméleti anyagrészeket, az elméleti anyagrészhez tartozó kidolgozott mintapéldákat, illetve az elmélet elsajátítását segítő gyakorló feladatokat. A jegyzet végén megtalálható a gyakorló feladatok megoldását segítő útmutatás, illetve a feladatok megoldása.

A jegyzet magyar nyelven kívánja segíteni a hallgatók differenciálegyenletekkel kapcsolatos ismeretszerzését, akár önálló tanulását.

A jegyzet témakörében az idegen nyelvű szakirodalom mellett sok magyar nyelvű könyv is rendelkezésre áll, melyek igen kiváló minőségű, jó felépítésű, a differenciálegyenletek témakör feldolgozására alkalmas szakkönyvek. A bőséges nyomtatott szakirodalom mellett viszont az elektronikus szakirodalmi ellátottság alacsony szintű. Ez a jegyzet ezt az űrt kívánja csökkenteni.

Ezúton mondok köszönetet Schipp Ferenc egyetemi tanárnak, az ELTE IK professor emeritusának és Simon Péter egyetemi tanárnak, az ELTE IK Numerikus Analízis Tanszék vezetőjének a jegyzet alapos, minden részletre kiterjedő lektorálásáért, és a lektorálás során tett kiegészítésekért, észrevételekért. Köszönetet mondok Király Baláznak is a PTE Matematika Tanszékének tanársegédjének a szemléltető ábrák elkészítéséért.

A differenciálegyenletek jegyzet a **TÁMOP-4.1.2-08/1/A** Tananyagfejlesztés című pályázat keretében készült.

1. fejezet

A differenciálegyenlet fogalma

A differenciálegyenlet fogalmának bevezetése előtt tekintsünk néhány fizikai probléma matematikai modelljét.

1.0.1. Példa. Egy m tömegű rakétát v_0 kezdősebességgel függőlegesen fellövünk. Tegyük fel, hogy a mozgás során a rakétára mindössze két erő hat: a nehézségi erő (jelöljük α -val a nehézségi gyorsulást) és a pillanatnyi sebesség négyzetével arányos súrlódási erő (az ezzel kapcsolatos arányossági tényező legyen β). Mennyi ideig emelkedik a rakéta?

A példa matematikai modellje. Ha $v \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jelenti a sebesség-idő függvényt, akkor - feltételezve, hogy v nyílt intervallumon értelmezett differenciálható függvény, továbbá $0 \in \mathcal{D}_v$ - a feladat matematikai modellje a következő (ld. a fizika Newton-féle mozgástörvényeit): adott m, α, β pozitív számok mellett olyan v függvényt keresünk, amelyre

$$\begin{cases} mv' &= -m\alpha - \beta v^2 \\ v(0) &= v_0 \end{cases} \quad (1.0.1)$$

Keressük azt a $T \in \mathcal{D}_v$ „pillanatot”, amelyre $v(T) = 0$.

□

1.0.2. Példa. Valamely anyag két anyagra bomlik. A bomlási sebességek egyenesen arányosak a még fel nem bomlott anyag mennyiségével. A bomlás kezdetétől számítva mennyi idő alatt „feleződik meg” az anyag (azaz bomlik el a fele)?

A példa matematikai modellje. Jelöljük m -mel ($m \in \mathbb{R}^+$) az anyag eredeti mennyiségét, $\phi(t)$ -vel, illetve $\psi(t)$ -vel a t ($t \in \mathbb{R}$) idő alatt képződött anyagok mennyiségét. A $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekről tegyük fel, hogy differenciálhatók. Ekkor a bomlási sebességek ϕ', ψ' . A fenti egyenes arányosságokkal kapcsolatos arányossági tényezőket jelöljük α -val és β -val ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$). Azt kaptuk tehát, hogy

$$\begin{cases} \phi' = \alpha(m - \phi - \psi) \\ \psi' = \beta(m - \phi - \psi) \\ \phi(0) = \psi(0) = 0 \end{cases} \quad (1.0.2)$$

Vezessük be a $\varphi := (\phi, \psi)^T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $b := (\alpha m, \beta m)^T \in \mathbb{R}^2$,

$$A := \begin{bmatrix} -\alpha & -\alpha \\ -\beta & -\beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

jelöléseket¹, amikor is (1.0.2) a következő, vele ekvivalens formában írható:

$$\begin{cases} \varphi' = A\varphi + b \\ \varphi(0) = (0, 0) \end{cases} \quad (1.0.3)$$

¹A felső indexben szereplő T az adott vektor transzponáltját jelenti.

Világos, hogy (1.0.3) is (1.0.1)-szerű, csak a keresett φ függvény nem $\mathbb{R}$ -ből $\mathbb{R}$ -be képező, hanem $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ típusú. $\square$

1.0.3. Példa. Tegyük fel, hogy egy egyenes mentén mozgó m tömegű tömegpontra az alábbi erők hatnak:

- a) az egyenes valamely pontjához viszonyított elmozdulással arányos, az illető pontba mutató „visszatérítő” erő (az arányossági tényező legyen $\alpha \in \mathbb{R}^+$);
- b) a pillanatnyi sebességgel arányos „fékező” erő (az ezzel kapcsolatos arányossági tényező legyen $\beta \in \mathbb{R}_0^+$);
- c) az előbbiektől független (de az időtől nem feltétlenül) „külső” F erő ($F \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).

Írjuk le a tömegpont mozgását, ha ismerjük, a megfigyelés kezdetekor elfoglalt helyzetét és az akkori sebességét!

A példa matematikai modellje. Jelöljük s -sel az a)-beli elmozdulás-idő függvényt. Feltesszük, hogy $\mathcal{D}_F$ és $\mathcal{D}_s \subset \mathcal{D}_F$ nyílt intervallumok, $0 \in \mathcal{D}_s$, s kétszer differenciálható függvény és $s_0 := s(0)$, $s'_0 := s'(0)$ a megfigyelés kezdetekor észlelt helyzet, illetve sebesség. Ismét csak a Newton-féle mozgástörvényeket alkalmazva az alábbi matematikai modell adódik:

$$\begin{cases} ms'' &= F - \alpha s - \beta s' \\ s(0) &= s_0, s'(0) = s'_0. \end{cases} \quad (1.0.4)$$

Alakítsuk át (1.0.4)-et a következőképpen: legyen először is $z := (s, s')^T$ (tehát $z : \mathcal{D}_s \rightarrow \mathbb{R}^2$), illetve

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\alpha}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad b := (0, \frac{F}{m})^T : \mathcal{D}_s \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Ekkor z differenciálható, és

$$\begin{cases} z' &= Az + b \\ z(0) &= (s_0, s'_0). \end{cases} \quad (1.0.5)$$

Nyilvánvaló, hogy (1.0.5) ugyanolyan "szerkezetű", mint (1.0.3) (azaz végül is, mint (1.0.1)), dacára annak, hogy a fenti transzformáció előtt a (1.0.4) feladatról ez egyáltalán nem látszott. $\square$

Mi a közös a fenti feladatokban?

- Egyrészt mindegyikben az „ismeretlen” egy differenciálható egyváltozós függvény;
- a szóban forgó feladatban („egyenletben”) a keresett függvény első deriváltja szerepel;
- mind a három feladat „explicit” az említett deriváltfüggvényre nézve;
- olyan függvényt keresünk mindegyik esetben, amely az említetteken túl bizonyos kezdeti feltételnek eleget tesz.

Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos és tűzzük ki az alábbi feladat megoldását: határozzunk meg olyan $\varphi \in I \rightarrow J$ függvényt, amelyre igazak a következő állítások:

- i) $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum és $\mathcal{D}_\varphi \subset I$;

ii) φ differenciálható függvény és $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$).

A most megfogalmazott feladatot **explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek** (vagy röviden **differenciálegyenletnek**) fogjuk nevezni, és a d.e. rövidítéssel idézni. Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi \in J$ elemek, akkor a fenti φ függvény i) és ii) mellett tegyen eleget a

iii) $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$

kikötésnek is. Az így „kibővített” feladatot **kezdeti érték problémának** (vagy röviden **Cauchy-feladatnak**) nevezzük, és a továbbiakban mindegyikre a k.é.p. rövidítést fogjuk használni. Az i), ii)-nek (illetve i)), ii), iii)-nek eleget tevő bármely φ függvényt a d.e. (illetve a k.é.p.) megoldásának nevezzük. Az f függvény a differenciálegyenlet úgynevezett jobb oldala.

A feladatgyűjteményekben az „oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket” címszó után általában csak az általunk adott definíció ii)-beli egyenlőségét (k.é.p. esetén ezt és iii)-at) szokták megadni. Mi is alkalmazni fogjuk ezt a rövidítést (gondolatban „kerekké” téve a feladatot, megadva a „hiányzó” paramétereket úgy, hogy a definíciónk szerinti ii), illetve ii), iii) egyenlőségek a feladat szerintiekkel azonosak legyenek.

A definícióban szereplő explicit szó arra utal, hogy a ii)-beli egyenlőség egyik oldalán egyedül a keresett φ függvény $\mathcal{D}_\varphi \ni x$ -beli deriváltja áll. Ha a differenciálegyenlet általunk adott meghatározásában f helyett pl. egy $F: I \times J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényből indulnánk ki, és a keresett differenciálható φ -től ($\varphi \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) i) mellett ii)-ben az

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőség teljesülését kívánnánk meg, akkor egy úgynevezett **implicit elsőrendű közönséges differenciálegyenlethez** jutnánk.

Nyilvánvaló, hogy a differenciálegyenlet bármely megoldásának leszűkítései is megoldások. Ezt figyelembe véve célszerű a megoldás egyértelműségét a következő értelemben használni: Akkor mondjuk, hogy a iii) k.é.p. *egyértelműen oldható meg*, ha k.é.p. bármely két megoldása közös értelmezési tartományukon megegyezik. Kezdeti érték problémák egyértelmű megoldására vonatkozik az alábbi tétel:

1.0.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos és második változója szerint folytonosan differenciálható ($f, f'_y \in C_{I \times J}$). Ekkor bármely $(\tau, \xi) \in I \times J$ esetén a iii) k.é.p. egyértelműen megoldható.*

Bebizonyítható, hogy ebben az esetben a iii) k.é.p.-nak létezik egy legbővebb értelmezési tartománnyal rendelkező megoldása. Ez a legbővebb értelmezési tartomány kezdeti feltételtől függően változhat. Ezt szokás a k.é.p. **teljes megoldásának** nevezni. (A bizonyítások megtalálhatók a [3], [6], [8] könyvekben.)

2. fejezet

Közönséges differenciálegyenletek

Ebben a fejezetben a közönséges differenciálegyenletek egy csoportjának megoldási módszerét tárgyaljuk.

2.1. Elsőrendű differenciálegyenletek

2.1.1. Szétválasztható változójú és szétválasztható változójúra visszavezethető differenciálegyenletek

2.1.1.1. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

2.1.1. Definíció. Tegyük fel, hogy I és J egyaránt egy-egy nyílt intervallum, $g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ pedig folytonos függvények. A h függvényről feltesszük továbbá azt is, hogy $0 \notin \mathcal{R}_h$. Tekintsük ezek után az

$$f(x, y) := g(x)h(y) \quad ((x, y) \in I \times J)$$

függvény, mint jobb oldal által meghatározott d.e.-et, amelyet **szeparábilis (vagy szétválasztható változójú) differenciálegyenletnek** nevezünk. Ekkor tehát olyan $\varphi \in I \rightarrow J$ differenciálható függvényt keresünk, amelyre $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallum és

$$\varphi'(x) = g(x)h(\varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi). \quad (2.1.1)$$

Mivel $0 \notin \mathcal{R}_h$, ezért a (2.1.1) egyenlőség így is írható:

$$\frac{\varphi'(x)}{h(\varphi(x))} = g(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi). \quad (2.1.2)$$

A feltételeink szerint $g, 1/h$ nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvények, ezért léteznek olyan $G: I \rightarrow \mathbb{R}$, $H: J \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvények, amelyekre $G' = g$ és $H' = 1/h$. Vegyük észre, hogy az összetett függvény deriválásával kapcsolatos tétel szerint (2.1.2) a következőt jelenti:

$$(H \circ \varphi)'(x) = G'(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz

$$(H \circ \varphi - G)'(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

Ha tehát φ megoldása a szóban forgó szeparábilis d.e.-nek, akkor (lévén $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum) van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$H(\varphi(x)) - G(x) = c \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi). \quad (2.1.3)$$

Az $1/h$ függvény nyilván nem vesz fel 0 -t a J intervallum egyetlen pontjában sem, így ugyanez igaz a H' függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága miatt így H' állandó előjelű. Ezért H egy szigorúan monoton függvény, következésképpen invertálható. A H^{-1} inverzfüggvény segítségével (2.1.3)-ból azt kapjuk, hogy

$$\varphi(x) = H^{-1}(G(x) + c) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$ és a φ megoldás eleget tesz a $\varphi(\tau) = \xi$ k.é.p.-nak is, akkor 2.1.3 -ból

$$c = H(\xi) - G(\tau).$$

Válasszuk G -t és H -t úgy, hogy $H(\xi) = G(\tau) = 0$, ekkor $c = 0$ és

$$\varphi(x) = H^{-1}(G(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Megjegyezzük, hogy a H^{-1} inverzfüggvény „kiszámítása” nem mindig egyszerű feladat, gyakran „meg kell elégednünk” a $H(\varphi(x)) = G(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$) egyenlőséggel.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt.

2.1.1. Tétel. *A (2.1.1) szétválasztható változójú d.e.-nek mindig létezik megoldása.*

2.1.1. Példa. *Keressük meg a 1.0.1. Példában megfogalmazott k.é.p. megoldását.*

Megoldás. A matematikai modellben megfogalmazott feladat nyilván szétválasztható változójú differenciálegyenlet, ahol $I := J := \mathbb{R}$ és

$$g(x) := -\alpha, \quad h(y) := 1 + \frac{\beta y^2}{m\alpha} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Legyen $\tau := 0$, $\xi := v_0$, ekkor a

$$G(x) := -\alpha x, \quad H(y) := \sqrt{\frac{m\alpha}{\beta}} \left(\arctg \left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} y \right) - \arctg \left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} v_0 \right) \right) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvények eleget tesznek a megoldás során mondottaknak. A $H(\varphi(x)) = G(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$) egyenlőség tehát most a következő (a φ szimbólum helyett v -t írva):

$$\sqrt{\frac{m\alpha}{\beta}} \left(\arctg \left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} v(t) \right) - \arctg \left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} v_0 \right) \right) = -\alpha t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ha T ideig emelkedik a rakéta, akkor $v(T) = 0$, azaz

$$-\sqrt{\frac{m\alpha}{\beta}} \arctg \left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} v_0 \right) = -\alpha T,$$

azaz

$$T = \sqrt{\frac{m}{\alpha\beta}} \arctg \left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} v_0 \right).$$

□

Ez a példa is azt mutatja, hogy esetenként a differenciálegyenlet „explicit” megoldásának az ismerete nélkül is válaszolni tudunk a (most éppen szeparábilis) differenciálegyenletként megfogalmazott matematikai modellben felvetett kérdésre.

2.1.2. Példa. *Keressük meg a*

$$\varphi'(x) = \sqrt{|\varphi(x)|} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \varphi(0) = 0$$

k.é.p. egy nem triviális megoldását.

Megoldás. A differenciálegyenlet formailag szeparábilis az $I := J := \mathbb{R}$ intervallumokkal és a

$$g(x) = 1 \quad h(y) = \sqrt{|y|} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényekkel, ugyanakkor h -ra nem teljesül a $0 \notin \mathcal{R}_h$ feltétel, ezért a szeparábilis differenciálegyenlet megoldásánál szereplő eljárás nem alkalmazható. Ráadásul a feltétel szerint pont olyan megoldást keresünk, ahol $h \circ \varphi$ nulla értéket vesz fel.

Megjegyezzük, hogy ebben az esetben az 1.0.1. tétel második feltétele (a h folytonos differenciálhatósága) az $y = 0$ pontban nem teljesül, ezért ez az általánosabb tétel sem alkalmazható. A h függvényt leszűkítve a $(-\infty, 0)$, ill. a $(0, \infty)$ intervallumokra, a 2.1.1. és az 1.0.1. tétel is alkalmazható. Az utóbbi alapján ilyenkor minden k.é.p. egyértelműen oldható meg.

Az nyilvánvalóan látszik, hogy $\varphi \equiv 0$ a differenciálegyenlet megoldása. Keressük az egyenletnek nem triviális megoldását.

Szűkítsük le h értelmezési tartományát a pozitív valós számok halmazára. Keressük azt az intervallumon értelmezett $\varphi \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényt, amelyre

$$\varphi'(x) = \sqrt{|\varphi(x)|} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi \subseteq \mathbb{R})$$

teljesül. Ekkor már alkalmazható a szeparábilis d.e. megoldási módszere. A fenti jelölésrendszert alkalmazva kapjuk, hogy

$$G(x) = x \quad H(y) = 2\sqrt{y},$$

melyből φ -re a

$$\varphi_c(x) = H^{-1}(G(x) + c) = \frac{1}{4}(x + c)^2 \quad (x \in \mathcal{D}_{\varphi_c} = \{x \in \mathbb{R} : x > -c\})$$

függvények adódnak, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám.¹ Könnyen ellenőrizhető, hogy $\xi > 0$ esetén a iii) k.é.p. teljes megoldásai φ_c alakúak.

Amennyiben h értelmezési tartományát a negatív számok halmazára szűkítjük le, úgy a

$$\varphi_d(x) = -\frac{1}{4}(x + d)^2 \quad (x \in \mathcal{D}_{\varphi_d} = \{x \in \mathbb{R} : x < -d\})$$

függvények adódnak, ahol $d \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám.

A fenti három típusú függvényt megfelelően megválasztva és „összeragasztva” a 2.1.2. példában megfogalmazott k.é.p. nemtriviális megoldásait kaphatjuk meg. Legyenek ugyanis $\alpha \leq 0 \leq \beta$ tetszőleges valós számok. A $c := -\beta$, $d := -\alpha$ választásával

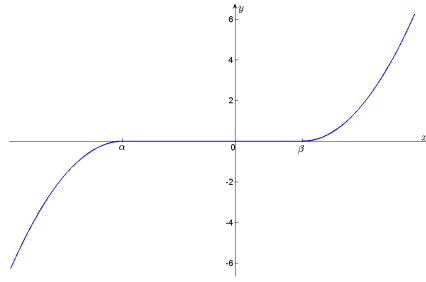
$$\varphi(x) := \begin{cases} \varphi_d & (x < \alpha), \\ 0 & (\alpha \leq x \leq \beta), \\ \varphi_c & (x > \beta) \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x - \alpha)^2 & (x < \alpha), \\ 0 & (\alpha \leq x \leq \beta), \\ \frac{1}{4}(x - \beta)^2 & (x > \beta) \end{cases}$$

valós számok halmazán értelmezett megoldások adódnak.² Speciálisan, ha $\alpha = \beta = 0$, akkor olyan függvényt kapunk, ami egyetlen pontban nulla. A k.é.p. egy nemtriviális megoldását szemlélteti a 2.3. ábra.

□

¹A φ függvény értelmezési tartományát úgy kell megválasztanunk, hogy $h \circ \varphi$ ne vegye fel a nulla értéket.

²Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a „ragasztási” pontokban is differenciálható a φ függvény.



2.1. ábra. A $\varphi' = \sqrt{|\varphi|}$, $\varphi(0) = 0$ k.é.p. egy nemtriviális megoldása.

2.1.1. Megjegyzés. A (2.1.2) formailag (2.1.1) alakú, ugyanakkor nem teljesül a $0 \notin \mathcal{R}_h$ feltétel. Az ilyen feladatoknál általában nem egyszerű a d.e. összes megoldását meghatározni.

Ebben az esetben, ha a feladat szövege másképp nem szól, azon megoldásokat keressük csak, melyekre $h(\varphi(x)) \neq 0$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$), vagy $\varphi(x) = 0$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$) teljesül.

2.1.3. Példa. Oldjuk meg az alábbi szétválasztható változójú differenciálegyenletet:

$$\varphi'(x) = x \cdot e^{-\varphi(x)} \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (2.1.4)$$

Megoldás. A 2.1.1. definícióban bevezetett jelöléseket használva

$$g(x) = x \quad \text{és} \quad h(y) = e^{-y} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

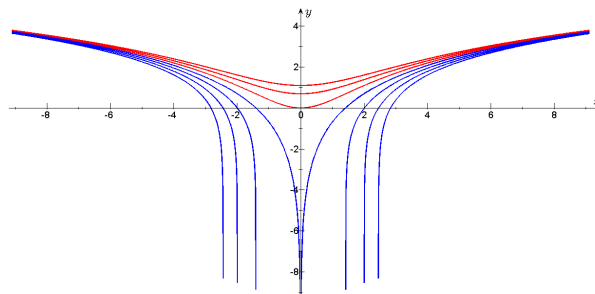
Itt teljesül a $0 \notin \mathcal{R}_h$ feltétel. A g és $1/h$ függvények primitív függvényei:

$$G(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{és} \quad H(y) = e^y.$$

A $H(\varphi(x)) - G(x) = c$ egyenletből φ meghatározható:

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2} + c\right) \quad (c \in \mathbb{R}).$$

A φ függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, ha $c > 0$. Ha $c \leq 0$, akkor az értelmezési tartomány a $(-\infty, \sqrt{-2c})$ vagy a $(\sqrt{-2c}, \infty)$ intervallum. A differenciálegyenlet megoldásainak halmazát szemlélteti a 2.2. ábra. Negatív c értékek esetén adódó függvényeket kék színnel szemléltettük.



2.2. ábra. A $\varphi'(x) = x \cdot e^{-\varphi(x)}$ differenciálegyenlet megoldásai.

2.1.2. Megjegyzés. 1. A továbbiakban mi is gyakran alkalmazzuk azt az egyszerűbb, matematikailag nem teljesen korrekt írásmódot, hogy (2.1.2)-ben, illetve más d.e.-ekben is $\varphi(x)$ helyett röviden φ -t írunk. Képzeletben azonban mindig hozzágondoljuk, hogy itt φ nem egy változó, egy valós szám, hanem x -nek függvénye.

2. A szétválasztható változójú d.e. megoldásaihoz a következő formális számolással juthatunk el. Az egyenletben a φ és φ' -nek az x -től való függését nem jelöljük, $\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}$ átírást alkalmazzuk, majd a „változók” szétválasztása után integrálunk:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{h(\varphi)} &= g(x)dx & / \int \\ \int \frac{1}{h(\varphi)} d\varphi &= \int g(x)dx + c \quad (c \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

3. Az integrációs konstans általában az x változó oldalán szokás feltüntetni. (Felesleges lenne az egyenlet mindkét oldalához kiírni.)

4. A differenciálegyenletek megadása többféleképpen történhet. Néha a $\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}$ átírást alkalmazva és dx -szel beszorozva, a differenciálegyenletet úgynevezett differenciál alakban írjuk fel.

A megjegyzés 1. és 2. pontjában leírt írásmódot a továbbiakban „**tolvajnyelvnek**” fogjuk nevezni. Megmutatjuk a (2.1.4) differenciálegyenlet megoldásának menetét tolvajnyelven is.

Megoldás. Keressük tehát azt a nyílt intervallumon értelmezett $\varphi \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$\varphi' = x \cdot e^{-\varphi} \quad (2.1.5)$$

teljesül. Mivel $e^{-\varphi}$ sehol sem nulla, ezért leoszthatunk vele. Beírva a $\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}$ formulát kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dx} &= x \cdot e^{-\varphi} & / \cdot dx / : e^{-\varphi} \\ e^{\varphi} d\varphi &= x dx & / \int \\ \int e^{\varphi} d\varphi &= \int x dx \\ e^{\varphi} &= \frac{x^2}{2} + c \quad (c \in \mathbb{R}),\end{aligned}$$

Véve mindkét oldal természetes alapú logaritmusát kapjuk, hogy

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2} + c\right) \quad (c \in \mathbb{R}),$$

ahol a φ függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, ha $c > 0$. Ha $c \leq 0$, akkor az értelmezési tartomány a $(-\infty, \sqrt{-2c})$ vagy a $(\sqrt{-2c}, \infty)$ intervallum.

□

A további példákban, illetve a gyakorló feladatok megoldásánál is a most bemutatott eljárást fogjuk alkalmazni.

2.1.4. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$\varphi' = \varphi \ln \varphi. \quad (2.1.6)$$

Megoldás. Nyilván szétválasztható változójú a differenciálegyenlet, ahol $g(x) = 1$, $h(y) = y \ln y$. Mivel a h függvény értelmezési tartománya $(0, \infty)$ és $h(1) = 0$, ezért célszerű az értelmezési tartományt felbontani a $(0, 1)$ és $(1, \infty)$ intervallumokra. Ebben az esetben külön-külön alkalmazható a bemutatott megoldási módszer.

Ekkor $h \circ \varphi$ sehol sem nulla, mindkét oldalt leoszthatjuk $\varphi \ln \varphi$ -vel. A változók szétválasztásával és integrálásával a differenciálegyenletet megoldhatjuk.

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \varphi \cdot \ln \varphi & / \cdot dx / : (\varphi \cdot \ln \varphi) \\ \frac{d\varphi}{\varphi \cdot \ln \varphi} &= dx & / \int \\ \int \frac{d\varphi}{\varphi \cdot \ln \varphi} &= \int dx \\ u = \ln \varphi & \\ du = \frac{1}{\varphi} d\varphi & \\ \int \frac{du}{u} &= x + c_1 & (c_1 \in \mathbb{R}), \\ \ln |u| &= x + c_1 & (c_1 \in \mathbb{R}) \\ \ln |\ln \varphi| &= x + c_1 & (c_1 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Tegyük fel először, hogy $\ln \varphi > 0$. A differenciálegyenlet megoldását explicit alakban is könnyen megadhatjuk. Mindkét oldalt e -ad alakra emeljük:

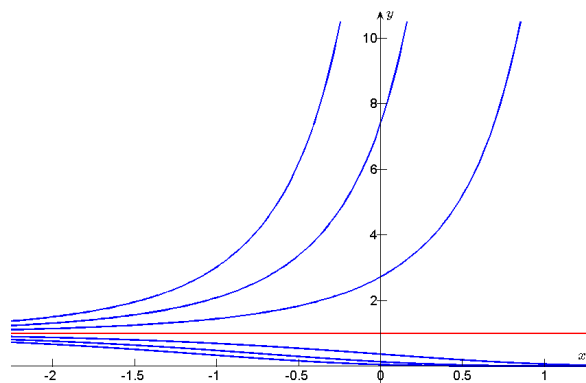
$$\ln \varphi = e^{x+c_1} = e^x \cdot e^{c_1} =: c \cdot e^x \quad (c \in \mathbb{R}^+).$$

Mindkét oldalt újra e -ad alakra emelve a megoldások explicit alakjához jutunk, azaz

$$\varphi(x) = e^{c \cdot e^x} \quad (c \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a $\varphi(x) = e^{c \cdot e^x}$ ($x \in \mathbb{R}$) függvények tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ mellett megoldások.

Mivel $\varphi \cdot \ln \varphi$ zérushelye $\varphi = 1$, ezért $\varphi \equiv 1$ megoldás. A differenciálegyenlet megoldásait szemlélteti a 2.3. ábra.



2.3. ábra. A $\varphi' = \varphi \cdot \ln \varphi$ differenciálegyenlet megoldásai.

□

2.1.5. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$2(x\varphi(x) + x - \varphi(x) - 1) = (x^2 - 2x)\varphi'(x) \quad (x > 2). \quad (2.1.7)$$

Megoldás. Ennél a példánál nem látszik első ránézésre, hogy szétválasztható változójú. A bal oldal első két tagjából x -et, a második két tagjából -1 -et kiemelve a bal oldalt szorzattá tudjuk alakítani, melyben a változók már szétválasztva szerepelnek.

$$\begin{aligned} 2(x(\varphi+1) - (\varphi+1))dx &= (x^2 - 2x)d\varphi \\ 2(x-1)(\varphi+1)dx &= (x^2 - 2x)d\varphi \end{aligned}$$

A $\varphi \equiv -1$ konstans függvény a differenciálegyenletnek nyilván megoldása.

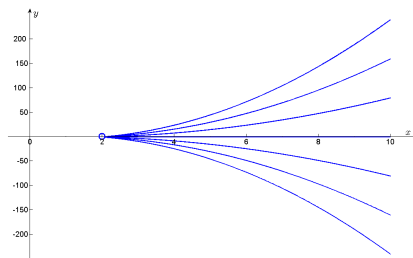
Tegyük fel, hogy $\varphi > -1$, akkor mindkét oldalt leosztva $(\varphi+1)$ -gyel, illetve $(x^2 - 2x)$ -szel, integrálva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2(x-1)(\varphi+1)dx &= (x^2 - 2x)d\varphi && / :(\varphi+1)(x^2-2x) \\ \frac{2(x-1)}{x^2-2x}dx &= \frac{1}{\varphi+1}d\varphi && / \int \\ \int \frac{2(x-1)}{x^2-2x}dx &= \int \frac{1}{\varphi+1}d\varphi && / (x^2-2x)'=2x-2=2(x-1) \\ \ln \underbrace{|x^2-2x|}_{>0} + c_1 &= \ln \underbrace{|\varphi+1|}_{>0} && (c_1 \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

amivel a megoldást implicit alakban megkaptuk. Explicit alakhoz emeljük mindkét oldalt e -ad alapra.

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x)e^{c_1} &= \varphi + 1 \\ c \cdot (x^2 - 2x) - 1 &= \varphi(x) \quad (c \in \mathbb{R}^+, x > 2). \end{aligned}$$

$\varphi < 0$ esetben φ -re ugyanez a képlet adódik, csak $c \in \mathbb{R}^-$ feltétellel. A differenciálegyenlet megoldásait szemlélteti a 2.4. ábra.



2.4. ábra. A (2.1.7) differenciálegyenlet megoldásai.

□

2.1.1.2. Szétválasztható változójúra visszavezethető differenciálegyenletek

Ebben az alfejezetben olyan differenciálegyenlet-típusokkal ismerkedünk meg, amelyek bár nem szétválasztható változójúak, de egy egyszerű trükkel szétválasztható változójú differenciálegyenletté alakíthatók.

2.1.1.2.1. Változóban homogén differenciálegyenletek

2.1.2. Definíció. Tegyük fel, hogy a $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos. Az

$$f(x, y) := g\left(\frac{y}{x}\right) \quad ((x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty))$$

függvény, mint jobb oldal által meghatározott d.e.-et **változóban homogén (vagy homogén fokszámú) differenciálegyenletnek** nevezünk. Ekkor tehát olyan $\varphi \in (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ differenciálható függvényt keresünk, amelyre $\mathcal{D}_\varphi \subset (0, \infty)$ nyílt intervallum és

$$\varphi'(x) = g\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi). \quad (2.1.8)$$

Megjegyezzük, hogy mivel a (2.1.8) differenciálegyenlet jobb oldalán folytonos függvény szerepel, ezért ha létezik megoldás, akkor az folytonosan differenciálható függvény lesz.

Megmutatjuk, hogy a szóban forgó d.e. visszavezethető szeparábilis egyenletre.

Tegyük ugyanis, hogy $\varphi(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi \subset (0, \infty)$) megoldása a (2.1.8) egyenletnek. Ekkor a $\psi(x) := \varphi(x)/x$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$) függvényre egyrészt

$$\varphi'(x) = x\psi'(x) + \psi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

másrészt

$$\varphi'(x) = g(\varphi(x)/x) = g(\psi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Innen következik, hogy a ψ függvény megoldása a

$$\psi'(x) \cdot x + \psi(x) = g(\psi(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \psi'(x) = \frac{1}{x}(g(\psi(x)) - \psi(x)) \quad (x \in (0, \infty))$$

szeparábilis egyenletnek.

2.1.6. Példa. Oldjuk meg az alábbi homogén fokszámú differenciálegyenletet:

$$x\varphi'(x) = \varphi(x) \cos \ln \frac{\varphi(x)}{x} \quad (x > 0).$$

Megoldás. Az egyenlet mindkét oldalát x -szel leosztva látjuk, hogy valóban változóban homogén az egyenletünk. Végrehajtv a $\varphi(x) = \psi(x) \cdot x$ helyettesítést, $\varphi'(x) = \psi'(x) \cdot x + \psi(x)$ alkalmazásával, az x -től való függés jelölésének elhagyásával kapjuk, hogy

$$\psi'x + \psi = \psi \cos \ln \psi,$$

melyből átrendezéssel és $\psi' = \frac{d\psi}{dx}$ jelölést használva

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{\psi(\cos \ln \psi - 1)}{x}$$

egyenlet adódik. A logaritmus értelmezése alapján a jobb oldal pontosan akkor lesz nulla, ha

$$\cos \ln \psi - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln \psi = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad \psi = e^{2k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a

$$\psi(x) = e^{2k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) = x \cdot e^{2k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

megoldásai az egyenletnek.

Keressük azon megoldásokat, melyre $\psi(\cos \ln \psi - 1) \neq 0$ a $\mathcal{D}_\psi$ intervallumon. Az egyenletet rendezve és integrálva a differenciálegyenlet

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{\psi(\cos \ln \psi - 1)} &= \frac{dx}{x} & / & \int \\ u = \ln \psi \quad du = \frac{1}{\psi} d\psi & / & \int \frac{d\psi}{\psi(\cos \ln \psi - 1)} = \int \frac{dx}{x} \\ 1 - \cos u = 2 \cdot \sin^2 \frac{u}{2} & / & \int \frac{du}{\cos u - 1} = \ln |x| + c \quad (c \in \mathbb{R}, x > 0) \\ (\operatorname{ctg} \frac{u}{2})' = -\frac{1}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} & / & \int \frac{du}{-2 \cdot \sin^2 \frac{u}{2}} = \ln x + c \\ \operatorname{ctg} \frac{u}{2} &= \ln x + c \\ \operatorname{ctg} \frac{\ln \psi}{2} &= \ln x + c \\ \operatorname{ctg} \frac{\ln \frac{x}{\psi}}{2} &= \ln x + c \quad (c \in \mathbb{R}, x > 0) \end{aligned}$$

implicit megoldásához jutunk.³ A megoldás explicit alakban is megadható, melyet az olvasóra bízunk. $\square$

2.1.7. Példa. Oldjuk meg az alábbi homogén fokszámú differenciálegyenletet:

$$(\varphi + \sqrt{x\varphi}) = x\varphi'.$$

Megoldás. Csak az $x > 0$ és $\varphi > 0$ feltételt kielégítő megoldásokkal foglalkozunk. Az $x < 0$, $\varphi < 0$ eset hasonlóan tárgyalható. Az egyenlet mindkét oldalát x -szel elosztva látjuk, hogy valóban változóban homogén az egyenletünk, hiszen

$$\frac{\varphi}{x} + \sqrt{\frac{\varphi}{x}} = \varphi'$$

alakú. Végrehajtva a $\varphi(x) = \psi(x) \cdot x$ helyettesítést, $\varphi'(x) = \psi'(x) \cdot x + \psi(x)$ alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\psi + \sqrt{\psi} = \psi'x + \psi,$$

melyből átrendezéssel és a $\psi' = \frac{d\psi}{dx}$ jelölést használva a

$$\sqrt{\psi} = x \frac{d\psi}{dx},$$

egyenlet adódik.

A bal oldal pontosan akkor lesz nulla, ha $\psi = 0$, tehát $\psi(x) = 0$ ($x > 0$) megoldás. Mivel $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$, ezért φ -re szintén a $\varphi \equiv 0$ megoldás adódik.

Keressük azon megoldásokat, melyekre $\psi \neq 0$ teljesül a $\mathcal{D}_\psi$ intervallumon. A változókat szétválasztjuk, integrálunk és a d.e. megoldásához jutunk.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{d\psi}{\sqrt{\psi}} & / & \int \\ \int \frac{dx}{x} &= \int \frac{d\psi}{\sqrt{\psi}} \\ \ln |x| + c &= 2\sqrt{\psi} \quad (c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

³Az integrálás során kihasználtuk, hogy a négyzetes és a duplaszöges összefüggés alapján, $1 - \cos u = \sin^2 \frac{u}{2} + \cos^2 \frac{u}{2} - (\cos^2 \frac{u}{2} - \sin^2 \frac{u}{2}) = 2 \cdot \sin^2 \frac{u}{2}$

Visszahelyettesítve $\varphi(x) = \psi(x) \cdot x$ -et, a differenciálegyenlet megoldását implicit alakban kapjuk:

$$\ln |x| + c = 2\sqrt{\frac{\varphi}{x}} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

A megoldás explicit alakban is megadható:

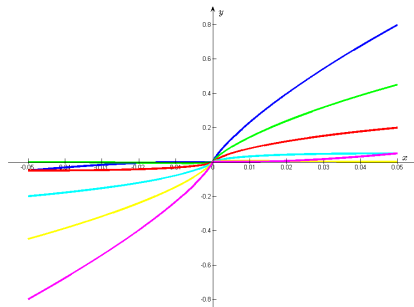
$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (\ln |x| + c)^2 &= \frac{\varphi}{x} \\ \frac{x}{4} (\ln |x| + c)^2 &= \varphi(x) \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+). \end{aligned}$$

Egyszerűen igazolható, hogy $x < 0$, $\varphi < 0$ esetben az

$$\frac{x}{4} (-\ln |x| + c)^2 = \varphi(x) \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^-)$$

megoldások adódnak.

Mivel $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln |x| = 0$, a pozitív, illetve negatív tengelyen kapott megoldások összeilleszthetők, azonban a 0 pontban a kapott függvény nem lesz differenciálható, csak folytonos. A megoldásokat a 2.5. ábra szemlélteti.



2.5. ábra. A $(\varphi + \sqrt{x\varphi})dx = x d\varphi$ differenciálegyenlet megoldásai.

□

2.1.1.2.2. $\varphi' = g(ax + b\varphi + c)$ típusú differenciálegyenletek

2.1.3. Definíció. Tegyük fel, hogy $a, b, c \in \mathbb{R}$ valós számok, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tekintsük az

$$f(x, y) := g(ax + by + c) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény, mint jobb oldal által meghatározott d.e.-et, azaz olyan $\varphi \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényt keresünk, melyre $\mathcal{D}_\varphi \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és

$$\varphi'(x) = g(ax + b\varphi(x) + c) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi) \quad (2.1.9)$$

teljesül.

Megmutatjuk, hogy a szóban forgó d.e. visszavezethető szeparábilis egyenletre.

Ha $b = 0$, akkor egy speciális szétválasztható változójú differenciálegyenletről van szó, és így a jobb oldal integrálásával kapható meg a megoldás:

$$\varphi(x) = \int g(ax+c)dx + d \quad (d \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).$$

Tegyük fel, hogy $b \neq 0$, továbbá, hogy a $\varphi(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi \subset \mathbb{R}$) megoldása a (2.1.9) egyenletnek. Ekkor a $\psi \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\psi(x) = ax + b\varphi(x) + c \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

függvényre egyrészt

$$\varphi'(x) = \left(\frac{\psi(x) - ax - c}{b} \right)' = \frac{\psi'(x) - a}{b} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

másrészt (2.1.9) egyenlet alapján

$$\varphi'(x) = g(\psi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

teljesül. A két egyenletet összevetve kapjuk, hogy ψ -re a

$$\frac{\psi'(x) - a}{b} = g(\psi(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \psi'(x) = b \cdot g(\psi(x)) + a \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

szeparábilis egyenlet teljesül.

2.1.8. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet a valós számok halmazán:

$$\varphi' = 3x + 4\varphi + 5.$$

Megoldás. Az egyenlet (2.1.9) alakú, ahol $g=y$ ($y \in \mathbb{R}$). Bevezetve a $\psi(x) = 3x + 4\varphi(x) + 5$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$) jelölést, deriválással

$$\varphi'(x) = \frac{\psi'(x) - 3}{4} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik. Végrehajtva a helyettesítést, ψ -nek az x -től való függését nem jelölve kapjuk, hogy

$$\frac{\psi' - 3}{4} = \psi \quad \Leftrightarrow \quad \psi' = 4\psi + 3$$

melyből $\psi' = \frac{d\psi}{dx}$ jelölést használva

$$\frac{d\psi}{dx} = 4\psi + 3$$

egyenlet adódik.

A jobb oldal pontosan akkor lesz nulla, ha $\psi = -\frac{3}{4}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\psi \equiv -\frac{3}{4}$ megoldás. Ebből φ -re a

$$3x + 4\varphi(x) + 5 = -\frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) = \frac{-23 - 12x}{16} \quad (x \in \mathbb{R})$$

megoldás adódik.

A megoldásokat először $\psi > -\frac{3}{4}$ esetben keressük. Formálisan rendezve és integrálva a d.e. megoldásához juthatunk.

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{4\psi+3} &= dx & / & \int \\ \int \frac{d\psi}{4\psi+3} &= \int dx \\ \ln \left| \overbrace{4\psi+3}^0 \right| &= x + c_1 & (c_1 \in \mathbb{R}) / \cdot 4, \quad e^{\sim} \\ 4\psi+3 &= e^{4x} \cdot e^{4c_1} & (c_1 \in \mathbb{R}) \\ \psi(x) &= \frac{e^{4x} \cdot e^{4c_1} - 3}{4} & (c_1 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve $\psi(x) = 3x + 4\varphi(x) + 5$ -öt, a differenciálegyenlet megoldását implicit alakban kapjuk:

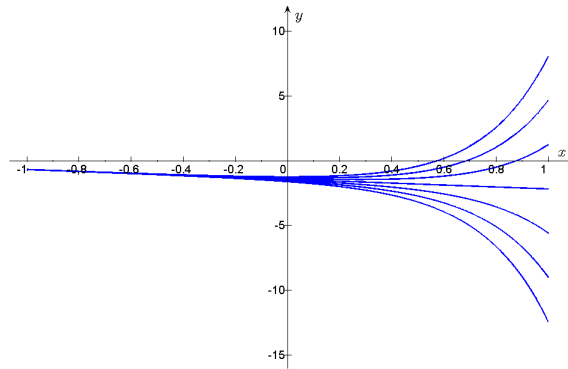
$$3x + 4\varphi(x) + 5 = \frac{e^{4x} \cdot e^{4c_1} - 3}{4} \quad (c_1 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).$$

A megoldás explicit alakban is megadható:

$$\varphi(x) = \frac{c \cdot e^{4x} - 23 - 12x}{16} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol $c = e^{4c_1} \in \mathbb{R}^+$ ($c_1 \in \mathbb{R}$).

A $\psi < -\frac{3}{4}$ esetben φ -re ugyanez a képlet adódik, azzal a különbséggel, hogy $c \in \mathbb{R}^-$. A differenciálegyenlet megoldásait szemlélteti a 2.6. ábra.



2.6. ábra. A $\varphi' = 3x + 4\varphi + 5$ differenciálegyenlet megoldásai.

□

2.1.9. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$\varphi' = 3 \sin^2(x + \varphi).$$

Megoldás. Az egyenlet (2.1.9) alakú, ahol $g = 3 \sin^2$. Bevezetve a $\psi(x) = x + \varphi(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$) jelölést, deriválással

$$\varphi'(x) = \psi'(x) - 1 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik. Végrehajtva a helyettesítést, ψ -nek az x -től való függését nem jelölve kapjuk, hogy

$$\psi' - 1 = 3 \sin^2 \psi \quad \Leftrightarrow \quad \psi' = 1 + 3 \sin^2 \psi$$

melyből a $\psi' = \frac{d\psi}{dx}$ jelölést használva

$$\frac{d\psi}{dx} = 1 + 3 \sin^2 \psi$$

egyenlet adódik.

A jobb oldal soha sem nulla, ezért leoszthatunk vele. Együttal dx -szel átszorozva és integrálva a differenciálegyenlet megoldásához jutunk.⁴

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{1+3\sin^2\psi} &= dx \quad / \quad \int \\ \int \frac{d\psi}{1+3\sin^2\psi} &= \int dx \end{aligned}$$

A bal oldalon lévő integrált helyettesítéssel tudjuk kiszámítani:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\psi}{1+3\sin^2\psi} &\stackrel{\sin^2\psi = \frac{\operatorname{tg}^2\psi}{1+\operatorname{tg}^2\psi}}{=} \int \frac{d\psi}{1+3\frac{\operatorname{tg}^2\psi}{1+\operatorname{tg}^2\psi}} = \int \frac{1+\operatorname{tg}^2\psi}{1+4\operatorname{tg}^2\psi} d\psi = \int \frac{1+v^2}{1+4v^2} \cdot \frac{1}{1+v^2} dv = \\ &\quad \begin{array}{l} v = \operatorname{tg} \psi \quad \psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \psi = \arctan v \\ d\psi = \frac{1}{1+v^2} dv \end{array} \\ &= \int \frac{1}{1+4v^2} dv = \int \frac{1}{1+(2v)^2} dv = \frac{\arctan(2v)}{2} = \frac{\arctan(2\operatorname{tg} \psi)}{2}. \end{aligned}$$

Ezzel a ψ -re vonatkozó d.e. megoldását implicit alakban kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\arctan(2\operatorname{tg} \psi)}{2} &= x + c \quad (c \in \mathbb{R}) \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{1}{2} \operatorname{tg} (2x + 2c) \quad (c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve $\psi(x) = x + \varphi(x)$ -et, a differenciálegyenlet megoldása az alábbi implicit függvényegyenlettel adható meg:

$$\operatorname{tg}(x + \varphi) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} (2x + 2c) \quad (c \in \mathbb{R}).$$

A függvényegyenlet megoldását az olvasóra bízunk. □

2.1.1.2.3. $\varphi' = g\left(\frac{a_1x+b_1\varphi+c_1}{a_2x+b_2\varphi+c_2}\right)$ típusú differenciálegyenletek

⁴A $\mathcal{R}_\psi \subseteq (-\pi/2, \pi/2)$ esetben keresünk megoldást. A periodicitás miatt a kapott függvények π egész számú többszörösével való eltoltjai is megoldásai lesznek a feladatnak.

2.1.4. Definíció. Tegyük fel, hogy $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ valós számok, melyekre $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 \neq 0$ ($i \in \{1, 2\}$), továbbá I és J egyaránt egy-egy nyílt intervallum, melyekre $a_2x + b_2y + c_2 \neq 0$ ($x \in I, y \in J$), $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tekintsük az

$$f(x, y) := g\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad ((x, y) \in I \times J)$$

függvény, mint jobb oldal által meghatározott d.e.-et, azaz olyan $\varphi \in I \rightarrow J$ differenciálható függvényt keresünk, melyre $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallum és

$$\varphi'(x) = g\left(\frac{a_1x + b_1\varphi(x) + c_1}{a_2x + b_2\varphi(x) + c_2}\right) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi) \quad (2.1.10)$$

teljesül.

Megmutatjuk, hogy a szóban forgó d.e. visszavezethető szeparábilis egyenletre.

Ha $b = 0$, akkor egy speciális szétválasztható változójú differenciálegyenletről van szó, és így a jobb oldal integrálásával kapható meg a megoldás:

$$\varphi(x) = \int g(ax + c)dx + d \quad (d \in \mathbb{R}, x \in I).$$

Ha $a_1^2 + a_2^2 = 0$, vagy $b_1^2 + b_2^2 = 0$, akkor szeparábilis, míg ha $c_1^2 + c_2^2 = 0$, akkor a változóban homogén d.e.-re vezetődik a feladat.

Tegyük fel, hogy $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$, továbbá $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. Ekkor tekintsük az

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer. Mindkét egyenlet egy egyenest határoz meg a síkon. Az egyenletrendszer megoldásának geometriai jelentése: a két egyenes metszéspontja. Három eset lehetséges.

1. eset. A két egyenes egybeesik. Ekkor végtelen sok metszéspont van. A (2.1.10) differenciálegyenlet jobb oldala konstans ($\varphi' = g(1)$), így a differenciálegyenlet megoldása triviális:

$$\varphi(x) = g(1) \cdot x + c \quad (c \in \mathbb{R}, x \in I).$$

2. eset. A két egyenes párhuzamos, de nem esik egybe. Ekkor nincs a két egyenesnek metszéspontja. A lineáris egyenletrendszer nem oldható meg. A nem egybeeső párhuzamosság algebrai feltétele:

$$b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1 = 0, \quad a_1, b_1, a_2, b_2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Tegyük fel, hogy $\varphi(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi \subset I$) megoldása a (2.1.10) egyenletnek. Ekkor a $\psi \in I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\psi(x) = a_1x + b_1\varphi(x) \quad (x \in I)$$

függvényre egyrészt

$$\varphi'(x) = \left(\frac{\psi(x) - a_1x}{b_1}\right)' = \frac{\psi'(x) - a_1}{b_1} \quad (x \in I),$$

másrészt (2.1.10) egyenlet alapján

$$\varphi'(x) = g\left(\frac{\psi(x) + c_1}{\frac{a_2}{a_1}\psi(x) + c_2}\right) \quad (x \in I)$$

teljesül. A két egyenletet összevetve kapjuk, hogy ψ -re a

$$\frac{\psi'(x) - a_1}{b_1} = g\left(\frac{\psi(x) + c_1}{\frac{a_2}{a_1}\psi(x) + c_2}\right) \Leftrightarrow \psi'(x) = b_1 \cdot g\left(\frac{\psi(x) + c_1}{\frac{a_2}{a_1}\psi(x) + c_2}\right) + a_1 \quad (x \in I)$$

szeparábilis egyenlet teljesül. ⁵

3. eset. A két egyenes metszi egymást. Ekkor az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Jelöljük ezt $P_0(x_0, y_0)$ -l. Az egy pontban való metszés algebrai feltétele:

$$b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1 \neq 0.$$

Mivel P_0 mindkét egyenesnek pontja, ezért érvényes az

$$\begin{aligned} a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) &= a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0) &= a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned}$$

átalakítás. A (2.1.10) differenciálegyenletben g argumentumában osszuk le a számlálót és a nevezőt is $x - x_0$ -l:

$$\frac{a_1x + b_1\varphi(x) + c_1}{a_2x + b_2\varphi(x) + c_2} = \frac{a_1(x - x_0) + b_1(\varphi(x) - y_0)}{a_2(x - x_0) + b_2(\varphi(x) - y_0)} = \frac{a_1 + b_1 \frac{\varphi(x) - y_0}{x - x_0}}{a_2 + b_2 \frac{\varphi(x) - y_0}{x - x_0}} \quad (x \in I \setminus \{x_0\}),$$

továbbá tegyük fel, hogy a $\varphi(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi \subset I$) megoldása a (2.1.10) egyenletnek. Ekkor a $\psi \in I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - y_0}{x - x_0} \quad (x \in \mathcal{D}_\psi \subset \mathcal{D}_\varphi \setminus \{x_0\}, \mathcal{D}_\psi \text{ intervallum}).$$

függvényre egyrészt

$$\varphi'(x) = ((x - x_0)\psi(x) + y_0)' = \psi(x) + (x - x_0)\psi'(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\psi),$$

másrészt (2.1.10) alapján

$$\varphi'(x) = g\left(\frac{a_1 + b_1\psi(x)}{a_2 + b_2\psi(x)}\right) \quad (x \in \mathcal{D}_\psi)$$

teljesül. A két egyenletet összevetve kapjuk, hogy ψ -re a

$$\psi(x) + (x - x_0)\psi'(x) = g\left(\frac{a_1 + b_1\psi(x)}{a_2 + b_2\psi(x)}\right) \Rightarrow \psi'(x) = \frac{1}{x - x_0} \cdot \left(g\left(\frac{a_1 + b_1\psi(x)}{a_2 + b_2\psi(x)}\right) - \psi(x)\right)$$

($x \in \mathcal{D}_\psi$) szeparábilis egyenlet teljesül.

⁵A d.e. szeparábilisra visszavezethető a $\psi(x) = a_2x + b_2\varphi(x)$ ($x \in I$)-s helyettesítéssel is.

2.1.10. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$(2x - 4\varphi + 6) + (x + \varphi - 3)\varphi' = 0. \quad (2.1.11)$$

Megoldás. Az egyenlet egyszerű átrendezéssel (2.1.10) alakra hozható:

$$\varphi' = -\frac{2x - 4\varphi + 6}{x + \varphi - 3}, \quad (2.1.12)$$

ahol $g \equiv -1$, feltételezve, hogy $x + \varphi - 3 \neq 0$ ($x \in D_\varphi$). Keressük meg az

$$\left. \begin{array}{rclcl} x & + & y & - & 3 & = & 0 \\ 2x & - & 4y & + & 6 & = & 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldását. Az első egyenletből $y = 3 - x$ adódik, melyet a másodikba behelyettesítve kapjuk, hogy

$$2x - 4(3 - x) + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 12 + 4x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 2.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása az $(1; 2)$ számpár. Ez alapján átírjuk (2.1.11)-ben a lineáris kifejezéseket:

$$(2(x - 1) - 4(\varphi - 2)) + ((x - 1) + (\varphi - 2))\varphi' = 0$$

Olyan megoldásokat keresünk, melyre $1 \notin \mathcal{D}_\varphi$. Mindkét oldalt elosztjuk $(x - 1)$ -gyel:

$$\left(2 - 4\frac{\varphi - 2}{x - 1}\right) + \left(1 + \frac{\varphi - 2}{x - 1}\right)\varphi' = 0$$

Bevezetve a $\psi(x) = \frac{\varphi(x) - 2}{x - 1}$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$) jelölést, rendezve, deriválással

$$(\varphi(x) - 2)' = ((x - 1)\varphi(x))' \quad \Leftrightarrow \quad \varphi'(x) = \psi(x) + (x - 1)\psi'(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik. Végrehajtva a d.e.-ben a fenti helyettesítést, a ψ -nek x -től való függését nem jelölve kapjuk, hogy

$$(2 - 4\psi) + (1 + \psi)(\psi + (x - 1)\psi') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2 - 3\psi + \psi^2) + (1 + \psi)(x - 1)\psi' = 0,$$

melyből $2 - 3\psi + \psi^2$ kifejezés szorzattá alakításával és a $\psi' = \frac{d\psi}{dx}$ jelölést használva a

$$(\psi - 1)(\psi - 2)dx = -(1 + \psi)(x - 1)d\psi$$

egyenlet adódik.

A bal oldal pontosan akkor nulla, ha $\psi = 1$ vagy $\psi = 2$. Ezért $\psi \equiv 1$ és $\psi \equiv 2$ megoldások, melyeket visszahelyettesítve a $\psi = \frac{\varphi - 2}{x - 1}$ kifejezést, φ -re

$$\varphi(x) = x + 1 \quad \text{és} \quad \varphi(x) = 2x \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények adódnak. ⁶

⁶Ha behelyettesítjük az adott függvényeket a (2.1.12) egyenletbe, akkor

$$\varphi'(x) = (x + 1)' = -\frac{2x - 4(x + 1) + 6}{x + (x + 1) - 3} = 1 \quad \varphi'(x) = (2x)' = -\frac{2x - 4(2x) + 6}{x + 2x - 3} = 2$$

adódik, ami valóban teljesül.

Keressük azon ψ függvényeket, melyre ψ függvény sehol sem 1 és sehol sem 2, azaz $\mathcal{R}_\psi$ részhalmaza a $(-\infty, 1)$ vagy $(1, 2)$ vagy $(2, +\infty)$ intervallumoknak. Ekkor az egyenletet rendezve és integrálva a differenciálegyenletünk megoldásához juthatunk.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} dx &= \frac{-\psi-1}{(\psi-1)(\psi-2)} d\psi & / \quad \int \\ \int \frac{1}{x-1} dx &= \int \frac{-\psi-1}{(\psi-1)(\psi-2)} d\psi \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

A jobb oldalon egy racionális törtefüggvény integrálja szerepel. Ennek kiszámításához az integrandust elemi törtekre bontjuk. Keressük azokat az A, B valós számokat, melyekre

$$\frac{-\psi-1}{(\psi-1)(\psi-2)} = \frac{A}{\psi-1} + \frac{B}{\psi-2}$$

teljesül. Mindkét oldalt beszorozva a bal oldal nevezőjével,

$$-\psi-1 = A(\psi-2) + B(\psi-1) = \psi(A+B) + (-2A-B)$$

adódik. Mindkét oldalon polinom áll. Két polinom pontosan akkor egyezik meg, ha együtthatóik megegyeznek. Együttható-egyeztetés módszerével kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} A+B &= -1 \\ -2A-B &= -1 \end{aligned} \right\}$$

A két egyenletet összeadva A és B kiszámolható:

$$-A = -2 \quad \Rightarrow \quad A = 2 \quad \Rightarrow \quad B = -3.$$

Ezek alapján kiszámítjuk a primitív függvényt:

$$\int \frac{-\psi-1}{(\psi-1)(\psi-2)} d\psi = \int \frac{2}{\psi-1} + \frac{-3}{\psi-2} d\psi = 2 \ln |\psi-1| - 3 \ln |\psi-2|.$$

Az itt kapott eredményt visszahelyettesítve (2.1.13)-be a t -re vonatkozó differenciálegyenlet megoldását implicit alakban kapjuk.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x-1} dx &= \int \frac{-\psi-1}{(\psi-1)(\psi-2)} d\psi \\ \ln |x-1| + c_1 &= 2 \ln |\psi-1| - 3 \ln |\psi-2| \quad (c_1 \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Alkalmazva a logaritmus azonosságait, a megoldást egyszerűbb alakban is megadhatjuk:

$$\begin{aligned} \ln |x-1| + c_1 &= \ln \frac{|\psi-1|^2}{|\psi-2|^3} \quad (c_1 \in \mathbb{R}) & / e^\sim \\ e^{c_1} \cdot |x-1| &= \frac{|\psi-1|^2}{|\psi-2|^3} \quad (c_1 \in \mathbb{R}) \\ c|x-1| &= \frac{(\psi-1)^2}{|\psi-2|^3} \quad (c := e^{c_1} \in \mathbb{R}^+). \end{aligned}$$

A $\psi(x) = \frac{\varphi(x)-2}{x-1}$ helyettesítést visszaírva (2.1.11) megoldását implicit alakban kapjuk:

$$c|x-1| = \frac{\left(\frac{\varphi-2}{x-1}-1\right)^2}{\left|\frac{\varphi-2}{x-1}-2\right|^3} \quad (c \in \mathbb{R}^+).$$

Ha $\mathcal{D}_\varphi \subseteq (1, +\infty)$, $\mathcal{R}_\psi \subseteq (2, +\infty)$, akkor az implicit egyenlet

$$(\varphi - 1 - x)^2 = c(\varphi - 2x)^3 \quad (c \in \mathbb{R}^+, x > 1)$$

ha pedig $\mathcal{D}_\varphi \subseteq (-\infty, 1)$, $\mathcal{R}_\psi \subseteq (2, +\infty)$, akkor

$$(\varphi - 1 - x)^2 = c(\varphi - 2x)^3 \quad (c \in \mathbb{R}^-, x < 1)$$

alakba írható. A többi esetben az implicit függvényegyenlet felírását az olvasóra bízjuk. A megoldás explicit alakban is megadható lenne, ugyanakkor egy harmadfokú polinom gyökeit kellene hozzá megkeresni, ezért annak meghatározásától eltekintünk. $\square$

2.1.11. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$2x - 2\varphi - 3 + (\varphi - x + 4)\varphi' = 0. \quad (2.1.14)$$

Megoldás. Az egyenlet egyszerű átrendezéssel (2.1.10) alakra hozható:

$$\varphi' = -\frac{2x - 2\varphi - 3}{\varphi - x + 4},$$

ahol $g \equiv -1$, feltételezve, hogy $\varphi - x + 4 \neq 0$ ($x \in D_\varphi$). Keressük meg a

$$\left. \begin{array}{rrrr} 2x & - & 2y & - & 3 & = & 0 \\ -x & + & y & + & 4 & = & 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldását. A második egyenletet -2 -vel beszorozva látszik, hogy nincs megoldása az egyenletrendszernek, az egyenletek által meghatározott egyenesek párhuzamosak. Bevezetve a $\psi(x) = \varphi(x) - x$ ($x \in \mathcal{D}_\psi := \mathcal{D}_\varphi$) jelölést, deriválással

$$\psi'(x) = \varphi'(x) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi'(x) = \psi'(x) + 1$$

adódik. Végrehajtva a fenti helyettesítést (2.1.14)-ben, ψ -nek x -től való függését nem jelölve kapjuk, hogy

$$-2\psi - 3 + (\psi + 4)(\psi' + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\psi + 1 + (\psi + 4)\psi' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\psi + 4)\psi' = \psi - 1.$$

A jobb oldal pontosan akkor nulla, ha $\psi = 1$. Az $\psi \equiv 1$ -ből (2.1.14) egyenletre $\varphi(x) = x + 1$ ($x \in \mathbb{R}$) megoldás adódik.

Olyan további ψ megoldásokat keresünk, melyekre $\mathcal{R}_\psi \subseteq (-\infty, 1)$, vagy $\mathcal{R}_\psi \subseteq (1, +\infty)$ teljesül. Beírva az $\psi' = \frac{d\psi}{dx}$ jelölést, az az egyenletet rendezve és integrálva a ψ -re vonatkozó differenciálegyenlet megoldásához jutunk:

$$\begin{aligned} \frac{\psi + 4}{\psi - 1} d\psi &= dx & / \quad \int \\ \int \frac{\psi + 4}{\psi - 1} d\psi &= \int dx \\ \int \frac{(\psi - 1) + 5}{\psi - 1} d\psi &= x + c \quad (c \in \mathbb{R}) \\ \int 1 + \frac{5}{\psi - 1} d\psi &= x + c \quad (c \in \mathbb{R}) \\ \psi + 5 \ln |\psi - 1| &= x + c \quad (c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Visszaírva az $\psi(x) = \varphi(x) - x$ ($x \in \mathcal{D}_\psi$) helyettesítést, $\mathcal{R}_\psi \subseteq (-\infty, 1)$ esetben a (2.1.14) differenciálegyenlet megoldására a

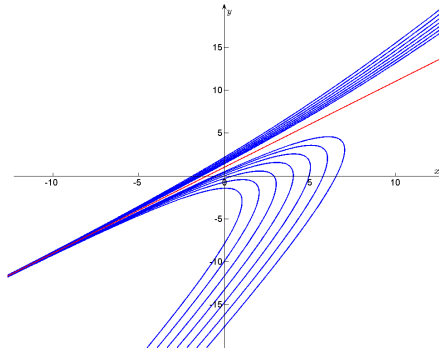
$$\varphi - x + 5 \ln(1 + x - \varphi) = x + c \quad (c \in \mathbb{R}),$$

míg $\mathcal{R}_\psi \subseteq (1, +\infty)$ esetben a

$$\varphi - x + 5 \ln |\varphi - x - 1| = x + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

implicit függvényegyenletet kapjuk.

A (2.1.14) differenciálegyenlet megoldásait szemlélteti a 2.7. ábra.



2.7. ábra. A $2x - 2\varphi - 3 + (\varphi - x + 4) \cdot \varphi' = 0$ lineáris differenciálegyenlet megoldásai.

□

2.1.1.2.4. $\varphi g_1(x\varphi)dx + xg_2(x\varphi)d\varphi = 0$ típusú differenciálegyenletek

2.1.5. Definíció. Tegyük fel, hogy $g_1, g_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2(t) \neq 0$ ($t \in (0, \infty)$) folytonos függvények. Tekintsük az

$$f(x, y) := -\frac{yg_1(xy)}{xg_2(xy)} \quad ((x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty))$$

függvény, mint jobb oldal által meghatározott d.e.-et. Azaz olyan $\varphi \in (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ differenciálható függvényt keresünk, amelyre $\mathcal{D}_\varphi \subset (0, \infty)$ nyílt intervallum és

$$\varphi'(x) = -\frac{\varphi(x)g_1(x\varphi(x))}{xg_2(x\varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi) \quad (2.1.15)$$

teljesül.

Megmutatjuk, hogy a szóban forgó d.e. visszavezethető szeparábilis egyenletre.

Tegyük fel, hogy $\varphi(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi \subset (0, \infty)$) megoldása a (2.1.15) d.e.-nek. Ekkor a $\psi \in (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\psi(x) = x\varphi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\psi = \mathcal{D}_\varphi)$$

függvényre egyrészt

$$\varphi'(x) = \left(\frac{\psi(x)}{x} \right)' = \frac{\psi'(x)x - \psi(x)}{x^2} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

mivel $0 \notin \mathcal{D}_\varphi$, továbbá (2.1.15) egyenlet alapján

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\psi(x)}{x}g_1(\psi(x))}{xg_2(\psi(x))}$$

teljesül. A két egyenletet összevetve ψ -re a

$$\frac{\psi'(x)x - \psi(x)}{x^2} = -\frac{\frac{\psi(x)}{x}g_1(\psi(x))}{xg_2(\psi(x))} \Leftrightarrow \psi'(x) = \frac{\psi(x)}{x} \cdot \left(1 - \frac{g_1(\psi(x))}{g_2(\psi(x))}\right) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

szeparábilis egyenlet adódik.

2.1.3. Megjegyzés. A (2.1.15) d.e.-et illetően gyakran találkozhatunk az alábbi jelöléssel is:

$$\varphi g_1(x\varphi)dx + xg_2(x\varphi)d\varphi = 0. \quad (2.1.16)$$

Állapodjunk meg abban, hogy a fenti szimbólum ugyanazt fogja jelenteni, mint a (2.1.15) egyenlőség. (A dolog hátterében az áll, hogy (2.1.15)-ben $\varphi'(x)$ helyett $\frac{d\varphi}{dx}$ -et írva, φ -nek x -től való függését nem jelölve „rendezzük” a (2.1.15) egyenlőséget. Természetesen pusztán formai „manipulációról” van szó.)

2.1.12. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$\varphi(1 + \ln(x\varphi)) + x(1 - \ln(x\varphi))\varphi' = 0 \quad (x > 0). \quad (2.1.17)$$

Megoldás. Az egyenlet (2.1.15) alakra hozható. Bevezetjük a $\psi(x) = x\varphi(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$) jelölést, majd deriválással

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi'(x)x - \varphi(x)}{x^2} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi \subseteq (0, +\infty))$$

adódik. Végrehajtva a (2.1.17) differenciálegyenletben a fenti helyettesítést, ψ -nek x -től való függését nem jelölve kapjuk, hogy

$$\frac{\psi}{x}(1 + \ln \psi) + x(1 - \ln \psi)\frac{\psi'x - \psi}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\psi \ln \psi}{x} = (\ln \psi - 1)\psi'.$$

A bal oldal pontosan akkor nulla, ha $\psi = 1$. Ebből következik, hogy $\psi \equiv 1$ a fenti d.e.-nek, míg $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ ($x \in \mathbb{R}^+$) a (2.1.17) egy megoldása.⁷

Olyan további ψ megoldásokat keresünk, melyekre $\mathcal{R}_\psi \subseteq (-\infty, 1)$, vagy $\mathcal{R}_\psi \subseteq (1, +\infty)$ teljesül. Beírva az $\psi' = \frac{d\psi}{dx}$ formulát, az az egyenletet rendezve és integrálva a ψ -re vonatkozó differenciálegyenlet megoldásához jutunk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}dx &= \frac{\ln \psi - 1}{2\psi \ln \psi}d\psi & / \int \\ \int \frac{1}{x}dx &= \int \frac{\ln \psi - 1}{2\psi \ln \psi}d\psi \\ & \quad v = \ln \psi \Rightarrow dv = \frac{1}{\psi}d\psi \\ \ln |x| + c &= \int \frac{v - 1}{2v}dv \quad (c \in \mathbb{R}) \\ \ln |x| + c &= \frac{v}{2} - \frac{1}{2} \ln |v| \quad (c \in \mathbb{R}) \\ \ln |x| + c &= \frac{\ln \psi}{2} - \frac{1}{2} \ln |\ln \psi| \quad (c \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

⁷ $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ -et behelyettesítve (2.1.17) egyenletbe, $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ adódik, amivel az egyenlet valóban teljesül.

Visszaírva az $\psi(x) = x\varphi(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\psi$) helyettesítést, $\mathcal{R}_\psi \subseteq (-\infty, 1)$ esetben a (2.1.17) differenciálegyenlet megoldására az

$$\ln x + c = \frac{\ln(x\varphi)}{2} - \frac{1}{2} \ln(\ln(x\varphi)) \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+),$$

míg $\mathcal{R}_\psi \subseteq (1, +\infty)$ esetben az

$$\ln x + c = \frac{\ln(x\varphi)}{2} - \frac{1}{2} \ln(-\ln(x\varphi)) \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+),$$

implicit függvényegyenletet kapjuk. □

2.1.13. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$(\varphi + x\varphi^2) + (x^2\varphi + x^3\varphi^2 + x)\varphi' = 0 \quad (x > 0). \quad (2.1.18)$$

Megoldás. Az egyenlet (2.1.15) alakra hozható:

$$\varphi(1 + x\varphi) + x(x\varphi + x^2\varphi^2 + 1)\varphi' = 0. \quad (2.1.19)$$

Bevezetjük a $\psi(x) = x\varphi(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$) jelölést, majd deriválással

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi'(x)x - \varphi(x)}{x^2} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi \subseteq (0, +\infty))$$

adódik. Végrehajtva a (2.1.19) differenciálegyenletben a fenti helyettesítést, ψ -nek x -től való függését nem jelölve kapjuk, hogy

$$\frac{\psi}{x}(1 + \psi) + x(\psi + \psi^2 + 1)\frac{\psi'x - \psi}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\psi}{x}(-\psi^2) = -(\psi^2 + \psi + 1)\psi'.$$

A bal oldal pontosan akkor nulla, ha $\psi = 0$. Ebből következik, hogy $\psi \equiv 0$ megoldás, így $\varphi \equiv 0$ ($\mathcal{D}_\varphi = (0, +\infty)$) (2.1.18) egy megoldása.⁸

Olyan további ψ megoldásokat keresünk, melyekre $\mathcal{R}_\psi \subseteq (-\infty, 0)$, vagy $\mathcal{R}_\psi \subseteq (0, +\infty)$ teljesül. Az egyenletet rendezve és integrálva az u -ra vonatkozó d.e. megoldásához jutunk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}dx &= \frac{\psi^2 + \psi + 1}{\psi^3}d\psi & / \int \\ \int \frac{1}{x}dx &= \int \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\psi^2} + \frac{1}{\psi^3}d\psi \\ \ln|x| + c &= \ln|\psi| - \frac{1}{\psi} - \frac{1}{2\psi^2} \quad (c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Visszaírva az $\psi(x) = x\varphi(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\psi$) helyettesítést, $\mathcal{R}_\psi \subseteq (-\infty, 0)$ esetben a (2.1.18) differenciálegyenlet megoldására az

$$\ln x + c = \ln(-x\varphi) - \frac{1}{x\varphi} - \frac{1}{2x^2\varphi^2} \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+).$$

míg $\mathcal{R}_\psi \subseteq (0, +\infty)$ esetben az

$$\ln x + c = \ln(x\varphi) - \frac{1}{x\varphi} - \frac{1}{2x^2\varphi^2} \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+).$$

implicit függvényegyenletet kapjuk. □

⁸ $\varphi \equiv 0$ -t behelyettesítve (2.1.18) egyenletbe, $\varphi' = 0' = 0$ adódik, amivel az egyenlet valóban teljesül.

2.1.1.3. Feladatok

2.1.1. Feladat. Oldjuk meg az alábbi szétválasztható változójú vagy arra visszavezethető differenciálegyenleteket:

i) $x\varphi(1+x^2)\varphi' = 1 + \varphi^2;$	Útmutatás	Megoldás
ii) $x\varphi' - \varphi = x \operatorname{tg} \frac{\varphi}{x};$	Útmutatás	Megoldás
iii) $x - \varphi - 1 + (\varphi - x + 2)\varphi' = 0;$	Útmutatás	Megoldás
iv) $(x + 4\varphi)\varphi' = 2x + 3\varphi - 5;$	Útmutatás	Megoldás
v) $\varphi' = -2(2x + 3\varphi)^2;$	Útmutatás	Megoldás
vi) $\varphi' = \varphi^2 - \frac{2}{x^2};$	Útmutatás	Megoldás
vii) $\varphi' = \frac{\varphi}{x} - \frac{2}{x^2}.$	Útmutatás	Megoldás

2.1.2. Elsőrendű lineáris és elsőrendű lineárisra visszavezethető differenciálegyenletek

2.1.2.1. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

2.1.6. Definíció. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ pedig legyenek folytonos függvények, és tekintsük azt a d.e.-et, amelynek a jobb oldala az

$$f(x, y) := q(x) - p(x)y \quad ((x, y) \in I \times \mathbb{R})$$

függvény. Az így definiált d.e.-et **lineáris differenciálegyenletnek nevezzük**. Most tehát olyan differenciálható $\varphi \in I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt keresünk, amelyre $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallum és

$$\varphi'(x) = q(x) - p(x)\varphi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi). \quad (2.1.20)$$

- Ha $q \equiv 0$, akkor **homogén lineáris differenciálegyenletről**,
- ha $q \not\equiv 0$, akkor **inhomogén lineáris differenciálegyenletről**

beszélünk.

2.1.2. Tétel. Legyen $P : I \rightarrow \mathbb{R}$ a 2.1.6. definícióban szereplő p függvény egy primitív függvénye⁹. A homogén elsőrendű d.e. összes megoldása előáll

$$\chi(x) = c \cdot e^{-P(x)} \quad (x \in \tilde{I}) \quad (2.1.21)$$

alakban, ahol $c \in \mathbb{R}$ és $\tilde{I} \subseteq I$ nyílt intervallum, és minden ilyen χ függvény megoldása az adott homogén d.e.-nek.

Bizonyítás. A

$$\chi_0(x) := e^{-P(x)} \quad (x \in I) \quad (2.1.22)$$

(csak pozitív értékeket felvevő) függvény megoldása a

$$\varphi'(x) = -p(x)\varphi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

⁹Mivel p folytonos függvény, így létezik primitív függvénye.

homogén lineáris d.e.-nek. Erről egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk:

$$e^{-P(x)} \cdot (-P'(x)) = -p(x) \cdot e^{-P(x)} \quad (x \in I),$$

ami valóban teljesül, hiszen P a p függvény egy primitív függvénye I -n.

Tegyük fel, hogy a χ függvény is megoldása ennek a homogén lineáris d.e.-nek:

$$\chi'(x) = -p(x)\chi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\chi)$$

Ekkor a differenciálható $\frac{\chi}{\chi_0} : \mathcal{D}_\chi \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre azt kapjuk, hogy bármely $x \in \mathcal{D}_\chi$ helyen

$$\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)'(x) = \frac{\chi'(x)\chi_0(x) - \chi(x)\chi_0'(x)}{\chi_0^2(x)} = \frac{-p(x)\chi(x)\chi_0(x) + \chi(x)p(x)\chi_0(x)}{\chi_0^2(x)} = 0,$$

azaz - lévén $\mathcal{D}_\chi \subset I$ nyílt intervallum - egy alkalmas $c \in \mathbb{R}$ számmal $\frac{\chi(x)}{\chi_0(x)} = c$ ($x \in \mathcal{D}_\chi$).

Nyilván minden ilyen χ függvény - könnyen ellenőrizhető módon - megoldása az adott homogén d.e.-nek.

□

2.1.3. Tétel. A (2.1.20) inhomogén lineáris d.e. tetszőleges (maximális értelmezési tartománnyal rendelkező, teljes) φ megoldása egy alkalmas $c \in \mathbb{R}$ számmal és $m : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvénnyel

$$\varphi(x) = c\chi_0(x) + m(x)\chi_0(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi = I) \quad (2.1.23)$$

alakban írható, ahol χ_0 a (2.1.22) képletben adott. Sőt, az itt szereplő $c \in \mathbb{R}$ bármely megválasztásával megoldást kapunk.

Bizonyítás. Ha az (2.1.20) lineáris d.e.-nek ψ is teljes megoldása, akkor a φ -re és ψ -re vonatkozó d.e.-et egymásból kivonva kapjuk, hogy

$$(\varphi - \psi)'(x) = -p(x)(\varphi(x) - \psi(x)) \quad (x \in I),$$

azaz a $\chi := \varphi - \psi$ függvény megoldása a homogén egyenletnek.

A 2.1.2. tétel szerint egy alkalmas $c \in \mathbb{R}$ számmal

$$\varphi(x) - \psi(x) = c\chi_0(x) \quad (x \in I)$$

Mutassuk meg, hogy van olyan differenciálható $m : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy a $\psi := m\chi_0$ függvény megoldása az inhomogén lineáris d.e.-nek. Ehhez azt kell „biztosítani”, hogy $\psi' = q - p\psi$, azaz

$$m'\chi_0 + m\chi_0' = m'\chi_0 - mp\chi_0 = q - pm\chi_0.$$

Egyszerűsítés után innen szükséges feltételként az adódik m -re, hogy

$$m' = \frac{q}{\chi_0}.$$

Ilyen m függvény valóban létezik, mivel a $\frac{q}{\chi_0} : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos leképezésnek van primitív függvénye. Továbbá - az előbbi rövid számolás „megfordításával” - azt is beláthatjuk, hogy a q/χ_0 függvény bármely m primitív függvényét véve, $m\chi_0$ megoldás.

Tehát a fenti inhomogén lineáris d.e. tetszőleges φ megoldása egy alkalmas $c \in \mathbb{R}$ valós számmal (2.1.23) alakban írható.

Az itt szereplő $c \in \mathbb{R}$ bármely megválasztásával (és az I minden nyílt $\mathcal{D}_\varphi$ részintervallumával) megoldást kapunk. Ezt megint csak egy egyszerű behelyettesítéssel igazolhatjuk:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &\stackrel{\varphi=c\chi_0+m\chi_0}{=} c\chi_0'(x) + m'(x)\chi_0(x) + m(x)\chi_0'(x) \stackrel{\chi_0'=-p\chi_0, \quad m'=q/\chi_0}{=} \\ &= -cp(x)\chi_0(x) + \frac{q(x)}{\chi_0(x)}\chi_0(x) - m(x)p(x)\chi_0(x) \\ &= q(x) - p(x)(c\chi_0(x) + m(x)\chi_0(x)) = q(x) - p(x)\varphi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).\end{aligned}$$

□

Legyen $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{R}$ és az (2.1.20)-beli φ -től a $\varphi(\tau) = \xi$ egyenlőséget is követeljük meg. Ekkor

$$c = \frac{\varphi(\tau)}{\chi_0(\tau)} - m(\tau) = \varphi(\tau)e^{P(\tau)} - m(\tau) = \xi e^{P(\tau)} - m(\tau).$$

Ha $P(\tau) = m(\tau) = 0$ (ami feltehető), akkor $c = \xi$, így a szóban forgó k.é.p. megoldása:

$$\varphi(x) = (\xi + m(x))e^{-P(x)} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A most mondott P, m függvényeket integrálfüggvényekként állítva elő

$$P(x) := \int_{\tau}^x p(t)dt, \quad m(x) := \int_{\tau}^x \frac{q(t)}{\chi_0(t)}dt \quad (x \in I),$$

azaz

$$\varphi(x) = \left(\xi + \int_{\tau}^x q(t)e^{\int_{\tau}^t p(s)ds} dt \right) e^{-\int_{\tau}^x p(t)dt} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

(A most kapott „megoldóképletet” nem érdemes memorizálni, inkább a hozzá vezető utat. Ez utóbbi bármely feladat esetén könnyen reprodukálható.)

2.1.4. Megjegyzés. 1. Az eddigiekhez hasonlóan, a lineáris d.e.-eknél is a „tolvajnyelvet” fogjuk a feladatok megadásánál követni. Az egyenletekben φ -nek x -től való függést általában nem jelöljük.

2. A 2.1.6. definícióban szereplő p, q függvényekkel a differenciálegyenlet általános alakja

$$\varphi'(x) + p(x)\varphi(x) = q(x) \quad (x \in I) \quad (2.1.24)$$

formában is megadható.

3. A homogén lineáris d.e. egy speciális szétválasztható változójú d.e. A 2.1.2. tételben beláttuk, hogy ennek összes megoldása előáll (2.1.21) alakban. A továbbiakban a megoldások összességét a homogén egyenlet általános megoldásának nevezzük és φ_h^a szimbólummal jelöljük. A szétválasztható változójú d.e.-eknél tanult módszer szerint a homogén egyenlet megoldása, feltételezve, hogy $\varphi \neq 0$ I -n:

$$\begin{aligned}\varphi' &= -\varphi \cdot p(x) & / : \varphi \neq 0 \\ \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dx} &= -p(x) & / \cdot dx \\ \frac{1}{\varphi} d\varphi &= -p(x)dx & / \int \\ \int \frac{1}{\varphi} d\varphi &= -\int p(x)dx + c_1 & (c_1 \in \mathbb{R}),\end{aligned}$$

melyből integrálás és rendezés után, továbbá a $\varphi \equiv 0$ megoldást is hozzávéve, differenciálegyenlet megoldására a

$$\varphi_h^a(x) = c \cdot e^{-\int p(x)dx} \quad (c \in \mathbb{R}, x \in I)$$

képlet adódik.¹⁰ A 2.1.2. tételből következik, hogy a homogén egyenletnek nincs több megoldása.

4. Az inhomogén egyenletnek egy megoldását az egyenlet **partikuláris megoldásának** nevezzük. A 2.1.3. tétel szerint az inhomogén egyenlet összes megoldása előáll a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként. A partikuláris megoldásnak a bizonyítás során bemutatott előállítását **konstans variálás módszerének** nevezzük.¹¹ A továbbiakban a megoldások összességét az inhomogén egyenlet általános megoldásának nevezzük és φ_{ih}^a , az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását pedig φ_{ih}^p szimbólummal jelöljük.

A tételek bizonyítása során eljárást is kaptunk a lineáris differenciálegyenletek megoldására.

Elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldásának menete:

1. **lépés.** A homogén egyenlet általános megoldásának (φ_h^a) kiszámítása.
2. **lépés.** Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának (φ_{ih}^p) keresése konstans variálás módszerével. Itt a tételben szereplő $m(x)$ helyett a $c(x)$ ($x \in I$) szimbólumot használjuk.
3. **lépés.** Az inhomogén egyenlet általános (φ_{ih}^a) megoldásának meghatározása a

$$\varphi_{ih}^a(x) = \varphi_h^a(x) + \varphi_{ih}^p(x) \quad (x \in I)$$

képlet alapján.

2.1.14. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$\varphi'(x) - \frac{2\varphi(x)}{x+1} = (x+1)^2. \quad (2.1.25)$$

Megoldás. A differenciálegyenlet inhomogén lineáris:

$$p(x) = -\frac{2}{x+1}, \quad q(x) = (x+1)^2.$$

A d.e. megoldását az $I_1 = (-\infty, -1)$ és $I_2 = (-1, +\infty)$ intervallumon keressük.

1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A

$$\varphi'(x) - \frac{2\varphi(x)}{x+1} = 0 \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2)$$

homogén egyenlet általános megoldása 2.1.2. tétel alapján $c \cdot e^{-P(x)}$ ($c \in \mathbb{R}, x \in I_j, j = 1, 2$) alakú, ahol P a p függvény primitív függvénye. Mivel p függvény egy primitív függvénye

$$P(x) = \int -\frac{2}{x+1} dx = -2 \ln |x+1| = -\ln |x+1|^2 \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2),$$

ezért a homogén egyenlet megoldására

¹⁰Természetesen értelmezési tartománynak I összes nyílt részintervalluma adható. A feladatok során a lehető legbővebb értelmezési tartományt adjuk meg.

¹¹A módszer *J.L. Lagrange* (1736-1813) francia matematikustól származik.

$$\varphi_h^{\hat{a}}(x) = c \cdot e^{\ln(x+1)^2} = c \cdot (x+1)^2 \quad (c \in \mathbb{R}, x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2)$$

adódik.

2. lépés. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának keresése konstans variálás módszerével. A partikuláris megoldást

$$\varphi_0(x) := \varphi_{ih}^p(x) = c(x) \cdot (x+1)^2 \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2)$$

alakban keressük. Mivel φ_0 az inhomogén egyenlet megoldása, ezért

$$\varphi_0'(x) - \frac{2\varphi_0(x)}{x+1} = (x+1)^2 \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2)$$

egyenlet teljesül. Felhasználva a

$$\varphi_0'(x) = c'(x) \cdot (x+1)^2 + c(x) \cdot 2(x+1) \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2),$$

azonosságot azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c'(x) \cdot (x+1)^2 + c(x) \cdot 2(x+1) - \frac{2c(x) \cdot (x+1)^2}{x+1} &= (x+1)^2 \\ c'(x) \cdot (x+1)^2 &= (x+1)^2 \quad / : (x+1)^2 \\ c'(x) &= 1 \\ c(x) &= x. \end{aligned}$$

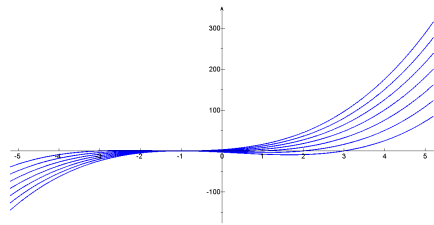
A c -re vonatkozó differenciálegyenletnek csak egy megoldására van szükség, ezért az integrációs konstansról eltekintünk. A partikuláris megoldás tehát

$$\varphi_{ih}^p(x) = x \cdot (x+1)^2 \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2).$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. Az első két lépés eredményét összeadva az (2.1.25) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

$$\varphi_{ih}^{\hat{a}}(x) = \varphi_h^{\hat{a}}(x) + \varphi_{ih}^p(x) = c \cdot (x+1)^2 + x \cdot (x+1)^2 \quad (c \in \mathbb{R}, x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2).$$

A (2.1.25) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását, a c paramétertől függő görbese-reget szemlélteti a 2.8. ábra. □



2.8. ábra. $\varphi' - \frac{2\varphi}{x+1} = (x+1)^2$ lineáris differenciálegyenlet általános megoldása.

2.1.15. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$\varphi'(x) \sin^2 x - \varphi(x) \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x. \quad (2.1.26)$$

Megoldás. A differenciálegyenlet elsőrendű inhomogén lineáris. Az általános alakhoz $\sin^2 x$ -szel való osztással jutunk:

$$\varphi'(x) - \varphi(x) \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{\sin x}{\cos^3 x}.$$

A definícióban használt jelölésekkel:

$$p(x) = -\frac{1}{\sin x \cos x}, \quad q(x) = \frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{\sin x}{\cos^3 x}.$$

A d.e.-ben szereplő függvények értelmezési tartománya nem intervallum. A megoldásokat az $I_k := (k\pi/2, \pi/2 + k\pi/2)$ ($k \in \mathbb{Z}$) intervallumokon keressük.

1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A

$$\varphi'(x) - \varphi(x) \frac{1}{\sin x \cos x} = 0 \quad (x \in I_k, k \in \mathbb{Z})$$

homogén egyenlet általános megoldása 2.1.2. tétel alapján $c \cdot e^{-P(x)}$ ($x \in I_k, k \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{R}$) alakú, ahol P a p függvény primitív függvénye. A p függvény egy primitív függvénye

$$P(x) = - \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx = - \int \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} \cos^2 x} dx = - \int \frac{1}{u} du = - \ln |u| = - \ln |\operatorname{tg} x|,$$

$u = \operatorname{tg} x \Rightarrow du = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

ezért a homogén egyenlet megoldására minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén a

$$\boxed{\varphi_h^{\hat{a}}(x) = c \cdot e^{\ln \operatorname{tg} x} = c \cdot \operatorname{tg} x \quad (c \in \mathbb{R}, x \in I_k)}$$

adódik.

2. lépés. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével. A partikuláris megoldást

$$\varphi_0(x) := \varphi_{ih}^p(x) = c(x) \cdot \operatorname{tg} x \quad (x \in I_k, k \in \mathbb{Z})$$

alakban keressük. Mivel φ_0 az inhomogén egyenlet megoldása, ezért

$$\varphi_0'(x) \sin^2 x - \varphi_0(x) \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x \quad (x \in I_k, k \in \mathbb{Z})$$

egyenlet teljesül. Felhasználva a

$$\varphi_0'(x) = c'(x) \cdot \operatorname{tg} x + c(x) \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \in I_k, k \in \mathbb{Z}),$$

azonosságot, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left(c'(x) \operatorname{tg} x + c(x) \frac{1}{\cos^2 x} \right) \sin^2 x - (c(x) \operatorname{tg} x) \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x \\ c'(x) \operatorname{tg} x \sin^2 x &= \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x \quad / : (\operatorname{tg} x \sin^2 x) \\ c'(x) &= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \\ c(x) &= \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

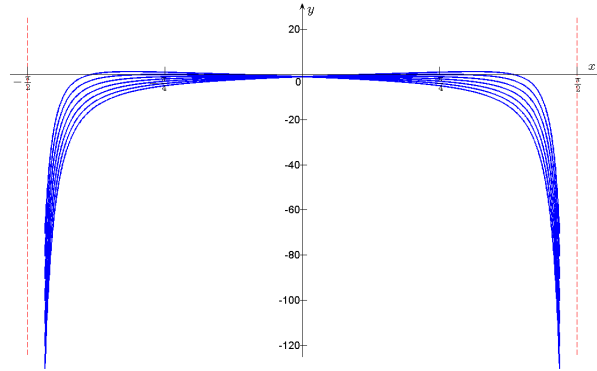
A partikuláris megoldás tehát minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\varphi_{ih}^p(x) = (-\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) \cdot \operatorname{tg} x = -(1 + \operatorname{tg}^2 x) \quad (x \in I_k, k \in \mathbb{Z}).$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. Az első két lépés eredményét összeadva az (2.1.26) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

$$\varphi_{ih}^{\acute{a}}(x) = \varphi_h^{\acute{a}}(x) + \varphi_{ih}^p(x) = c \cdot \operatorname{tg} x - (1 + \operatorname{tg}^2 x) \quad (c \in \mathbb{R}, x \in I_k, k \in \mathbb{Z}).$$

A differenciálegyenlet megoldásait szemlélteti a 2.9. ábra.



2.9. ábra. A (2.1.26) differenciálegyenlet megoldásai a $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumon.

□

2.1.16. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$x\varphi'(x) + \varphi(x) + e^x \cdot x = 0. \quad (2.1.27)$$

Megoldás. A differenciálegyenletet rendezve a

$$\varphi'(x) + \frac{\varphi(x)}{x} = -e^x \quad (2.1.28)$$

egyenlethez jutunk. Így már látszik, hogy a differenciálegyenlet inhomogén lineáris, ahol

$$p(x) = \frac{1}{x}, \quad q(x) = -e^x.$$

A p függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. A megoldásokat ezért az $I_1 := \mathbb{R}^+$ illetve az $I_2 := \mathbb{R}^-$ intervallumokon keressük.

1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A

$$\varphi'(x) + \frac{\varphi(x)}{x} = 0 \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2)$$

homogén egyenlet általános megoldása 2.1.2. tétel alapján $c \cdot e^{-P(x)}$ ($c \in \mathbb{R}, x \in I_j, j = 1, 2$) alakú, ahol P a p függvény primitív függvénye. A p függvény egy primitív függvénye

$$P(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x|,$$

ezért a homogén egyenlet megoldására

$$\boxed{\varphi_h^{\hat{a}}(x) = \frac{c}{x} \quad (c \in \mathbb{R}, \ x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2)}$$

adódik.

2. lépés. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével. A partikuláris megoldást

$$\varphi_0(x) := \varphi_{ih}^p(x) = \frac{c(x)}{x} \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2)$$

alakban keressük. Mivel φ_0 az inhomogén egyenlet megoldása, ezért

$$x\varphi_0'(x) + \varphi_0(x) = -e^x \cdot x$$

egyenlet teljesül. Felhasználva a

$$\varphi_0'(x) = \frac{c'(x) \cdot x - c(x)}{x^2} \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2)$$

azonosságot, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x \frac{c'(x) \cdot x - c(x)}{x^2} + \frac{c(x)}{x} &= -e^x \cdot x \\ c'(x) - \frac{c(x)}{x} + \frac{c(x)}{x} &= -e^x \cdot x \\ c'(x) &= -e^x \cdot x \\ c(x) &= \int -e^x \cdot x dx = -e^x \cdot x - \int -e^x dx = -e^x \cdot x + e^x. \end{aligned}$$

$f'(x) = -e^x \quad g(x) = x$
 $f(x) = -e^x \quad g'(x) = 1$

A partikuláris megoldás tehát

$$\boxed{\varphi_{ih}^p(x) = \frac{-e^x x + e^x}{x} = -e^x + \frac{1}{x}e^x \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2)}.$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. Az első két lépés eredményét összeadva az (2.1.28) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

$$\boxed{\varphi_{ih}^{\hat{a}}(x) = \varphi_h^{\hat{a}}(x) + \varphi_{ih}^p(x) = \frac{c}{x} - e^x + \frac{1}{x}e^x \quad (c \in \mathbb{R}, \ x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2)}.$$

A differenciálegyenlet megoldásait szemlélteti a 2.10. ábra.

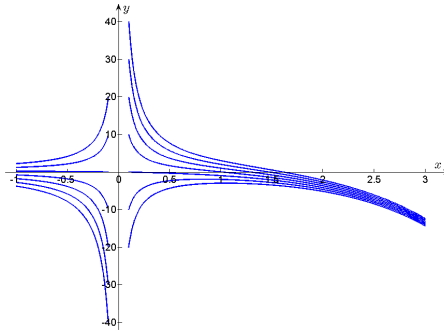
□

2.1.17. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$(x + \varphi^2(x))\varphi'(x) = \varphi(x). \quad (2.1.29)$$

Megoldás. Első ránézésre meglepő, hogy ez a d.e. a lineáris egyenletekhez soroltuk be, hiszen a képletből nyilvánvalóan látszik, hogy nem lineáris. Ezen a példán keresztül szeretnénk egy trükköt bemutatni, melynek segítségével bizonyos esetekben át tudjuk írni a d.e.-eket más formába.

Tegyük fel, hogy a (2.1.29) differenciálegyenletnek létezik olyan φ megoldása, melynek van differenciálható inverze. Ekkor az inverzfüggvény differenciálási szabálya alapján az inverzfüggvény deriváltja $\frac{1}{\varphi'}$.



2.10. ábra. A (2.1.27) differenciálegyenlet megoldásai.

A (2.1.29) d.e.-et átfogalmazzuk az $\psi(x) := \varphi^{-1}(x)$ ($x \in \mathcal{R}_\varphi$) függvényre. Keresünk olyan $\psi \in J \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre teljesül a

$$\psi(x) + x^2 = x\psi'(x) \quad \Rightarrow \quad \psi'(x) - \frac{\psi(x)}{x} = x \quad (x \in \tilde{J} \subseteq J)$$

differenciálegyenlet. Ez a d.e. ψ -re vonatkozóan inhomogén lineáris. Először keressünk megoldást a $J := \mathbb{R}^+$ intervallumon.

1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A

$$\psi'(x) - \frac{\psi(x)}{x} = 0 \quad (x \in J)$$

homogén egyenlet általános megoldása 2.1.2. tétel alapján $c \cdot e^{-P(x)}$ ($x \in J, c \in \mathbb{R}$) alakú, ahol P a $p(x) = -\frac{1}{x}$ függvény primitív függvénye. A p függvény egy primitív függvénye

$$P(x) = - \int \frac{1}{x} dx = -\ln|x| = -\ln x \quad (x \in J),$$

ezért a homogén egyenlet megoldására

$$\boxed{\psi_h^{\text{á}}(x) = ce^{\ln x} = cx \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+)}$$

adódik.

2. lépés. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével. A partikuláris megoldást

$$\psi_0(x) := \psi_{ih}^p(x) = c(x)x \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

alakban keressük. Mivel ψ_0 az inhomogén egyenlet megoldása, ezért

$$\psi_0'(x) - \frac{\psi_0(x)}{x} = x \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

egyenlet teljesül. Felhasználva az

$$\psi_0'(x) = c'(x)x + c(x) \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

azonosságot, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c'(x)x + c(x) - c(\varphi) - \frac{c(x)x}{x} &= x \\ c'(x) \cdot x &= x \quad / : x \\ c'(x) &= 1 \\ c(x) &= x. \end{aligned}$$

A partikuláris megoldás tehát

$$\boxed{\psi_{ih}^p(x) = x \cdot x = x^2 \quad (x \in \mathbb{R}^+).}$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. Az első két lépés eredményét összeadva a (2.1.28) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

$$\boxed{\psi_{ih}^{\hat{a}}(x) = \psi_h^{\hat{a}}(x) + \psi_{ih}^p(x) = cx + x^2 \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+).}$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az értelmezési tartomány kiterjeszthető $\mathbb{R}$ -re.

A ψ függvény megfelelő leszűkítéseinek inverzének kiszámításával φ -re a

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4x}}{2} & \left(c \in \mathbb{R}, x \in \left(-\frac{c^2}{4}, +\infty\right) \right), \\ \varphi(x) &= \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4x}}{2} & \left(c \in \mathbb{R}, x \in \left(-\frac{c^2}{4}, +\infty\right) \right) \end{aligned}$$

függvények adódnak. Behelyettesítve a függvényeket (2.1.29) egyenletbe ellenőrizhetjük, hogy azok a d.e.-nek valóban megoldásai, melynek elvégzését az olvasóra bízunk. $\square$

2.1.2.2. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletekre visszavezethető egyenletek

A korábban vizsgált egyenlet-típusokhoz hasonlóan bizonyos (nem lineáris) differenciálegyenletek megoldása visszavezethető a lineáris esetre. Példaként tekintsük a Bernoulli-féle d.e.-et.

2.1.7. Definíció. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, $\alpha \in \mathbb{R}$ pedig valós szám, és tekintsük azt a d.e.-et, amelynek a jobb oldala az

$$f(x, y) := q(x)y^\alpha - p(x)y \quad ((x, y) \in I \times (0, +\infty))$$

függvény. Mivel az $\alpha \in \{0, 1\}$ vagy a $q(x) = 0$ ($x \in I$) választással egy-egy lineáris d.e.-et kapunk, ezért feltehetjük, hogy $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ és $\mathcal{R}_h \neq \{0\}$. Ekkor a szóban forgó d.e.-et **Bernoulli-féle differenciálegyenletnek**¹² nevezzük. Ha a $\varphi \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény ennek egy megoldása, akkor $\mathcal{D}_\varphi \subseteq I$ nyílt intervallum, $\varphi(x) > 0$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$) és

$$\varphi'(x) = q(x)(\varphi(x))^\alpha - p(x)\varphi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi). \quad (2.1.30)$$

¹²Ezt a differenciálegyenletet először Jacob Bernoulli (1654-1705) állította fel 1695-ben, az egyenlet megoldását pedig Johann Bernoulli (1667-1748) adta meg 1697-ben.

A (2.1.30) egyenlet nyilván ekvivalens az $(1-\alpha)(\varphi(x))^{-\alpha}$ -val való beszorzás után kapott

$$(1-\alpha)\varphi'(x)(\varphi(x))^{-\alpha} = (1-\alpha)q(x) - (1-\alpha)p(x)(\varphi(x))^{1-\alpha} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi) \quad (2.1.31)$$

egyenlőséggel. Ha $\psi := \varphi^{1-\alpha}$, $\tilde{q} := (1-\alpha)q$, $\tilde{p} := (1-\alpha)p$, akkor (2.1.31) a következőt jelenti:

$$\psi'(x) = \tilde{q}(x) - \tilde{p}(x)\psi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\psi = \mathcal{D}_\varphi). \quad (2.1.32)$$

A ψ függvény tehát megoldása annak a lineáris d.e.-nek, amelynek a jobb oldala az alábbi:

$$\tilde{f}(x, y) := \tilde{q}(x) - \tilde{p}(x)y \quad ((x, y) \in I \times \mathbb{R}).$$

Ez utóbbi lineáris d.e.-nek bármely $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $\tilde{\psi}$ megoldása, amelyre $\tilde{\psi}(\tau) = \xi$. Ha $\xi > 0$, akkor egy alkalmas τ -t tartalmazó $J \subseteq I$ nyílt intervallumra $\tilde{\psi}(x) > 0$ ($x \in J$). Legyen $\psi(x) := \tilde{\psi}(x)$ ($x \in J$), ekkor ψ eleget tesz (2.1.32)-nek, a $\varphi := \psi^{\frac{1}{1-\alpha}}$ függvény pedig (2.1.31)-nek:

$$\begin{aligned} (1-\alpha)\varphi'(x)(\varphi(x))^{-\alpha} &= \psi^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\psi'(x)\psi^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} = \psi'(x) = \\ &= \tilde{q}(x) - \tilde{p}(x)\psi(x) = (1-\alpha)q(x) - (1-\alpha)p(x)(\varphi(x))^{1-\alpha} \quad (x \in J). \end{aligned}$$

Ha tehát $\mathcal{B}$ jelöli a szóban forgó Bernoulli-féle d.e. megoldásainak a halmazát, $\mathcal{L}$ pedig az $\tilde{f}$ által meghatározott lineáris d.e. csak pozitív értékeket felvevő megoldásainak a halmazát, akkor

$$\mathcal{B} = \left\{ \varphi^{\frac{1}{1-\alpha}} \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \in \mathcal{L} \right\}.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a Bernoulli-féle d.e. visszavezethető lineáris d.e.-re.

Bernoulli-féle lineáris differenciálegyenlet megoldásának menete:

1. **lépés.** Az egyenlet mindkét oldalát leosztjuk φ^α -nal, majd végrehajtjuk a $\psi := \varphi^{1-\alpha}$ helyettesítést.
2. **lépés.** Megoldjuk a ψ -re vonatkozó lineáris differenciálegyenletet.
3. **lépés.** $\psi_{ih}^{\frac{1}{1-\alpha}}$ általános megoldásból meghatározzuk (2.1.30) általános megoldását a $\psi = \varphi^{1-\alpha}$ egyenlőség alapján.

2.1.18. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$x\varphi'(x) + \varphi(x) = \varphi^2(x) \ln x. \quad (2.1.33)$$

Megoldás. A differenciálegyenlet Bernoulli-típusú, $\alpha = 2 > 0$. Olyan megoldásokat keresünk, melyekre $\mathcal{R}_\varphi \subseteq (0, +\infty)$ teljesül.

1. lépés. Differenciálegyenlet átalakítása lineáris egyenletté változócserevel.

Osszuk le (2.1.33) mindkét oldalát φ^2 -tel:

$$x\varphi'\varphi^{-2} + \varphi^{-1} = \ln x \quad (2.1.34)$$

Bevezetjük a

$$\psi := \varphi^{-1} \quad (2.1.35)$$

jelölést. Deriválással kapjuk, hogy

$$\psi' = -\varphi^{-2}\varphi' \Leftrightarrow -\psi' = \varphi^{-2}\varphi'.$$

Végrehajtva a (2.1.35) helyettesítést a (2.1.34) egyenletben,

$$x(-\psi'(x)) + \psi(x) = \ln x \Rightarrow \psi'(x) - \frac{\psi(x)}{x} = -\frac{\ln x}{x} \quad (x \in \mathbb{R}^+) \quad (2.1.36)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlethez jutunk.

2. lépés. Lineáris differenciálegyenlet megoldása.

Megkeressük a (2.1.36) lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

2.1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása.

A

$$\psi'(x) - \frac{\psi(x)}{x} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

homogén egyenlet általános megoldása 2.1.2. tétel alapján $c \cdot e^{-P(x)}$ ($c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+$) alakú, ahol P a $p(x) = -\frac{1}{x}$ ($x \in \mathbb{R}^+$) függvény primitív függvénye. Mivel p függvény egy primitív függvénye

$$P(x) = - \int \frac{1}{x} dx = -\ln|x| = -\ln x \quad (x \in \mathbb{R}^+),$$

a homogén egyenlet megoldására

$$\boxed{\psi_h^a(x) = ce^{\ln x} = cx \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+)}$$

adódik.

2.2. lépés. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével.

A partikuláris megoldást

$$\psi_0(x) := \psi_{ih}^p(x) = c(x)x$$

alakban keressük. Mivel ψ_0 az (2.1.36) inhomogén egyenlet megoldása, ezért

$$x(-\psi_0'(x)) + \psi_0(x) = \ln x$$

egyenlet teljesül. Felhasználva a

$$\psi_0'(x) = c'(x) \cdot x + c(x) \quad (x \in \mathbb{R}^+),$$

azonosságot kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x(-(c'(x) \cdot x + c(x))) + c(x) \cdot x &= \ln x \\ -c'(x) \cdot x^2 &= \ln x \quad / : (-x^2) \\ c'(x) &= -\frac{1}{x^2} \cdot \ln x \\ c(x) &= \int -\frac{1}{x^2} \cdot \ln x dx = \frac{1}{x} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad g(x) = \ln x$
 $f(x) = \frac{1}{x} \quad g'(x) = \frac{1}{x}$

A c -re vonatkozó differenciálegyenletnek csak egy megoldására van szükség, ezért az integrációs konstanstól eltekintünk. A partikuláris megoldás tehát

$$\boxed{\psi_{ih}^p(x) = \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) \cdot x = \ln x + 1 \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+).$$

2.3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása.

Az előző két lépés eredményét összeadva az (2.1.36) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

$$\psi_{ih}^{\hat{a}}(x) = \psi_h^{\hat{a}}(x) + \psi_{ih}^p(x) = cx + \ln x + 1 \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+).$$

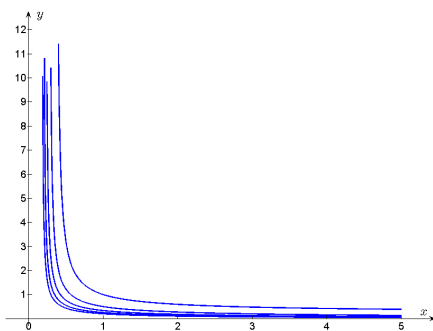
3. lépés. (2.1.33) differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározása.

(2.1.35) alapján az eredeti, (2.1.33) differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\psi(x)} = \frac{1}{cx + \ln x + 1} \quad (c \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^+ : c \cdot x + \ln x + 1 > 0\}).$$

Ellenőrizhető, hogy $\mathcal{D}_\varphi$ minden $c \in \mathbb{R}$ esetén nyílt intervallum.

A differenciálegyenlet megoldásait szemlélteti a 2.11. ábra.



2.11. ábra. A (2.1.33) differenciálegyenlet megoldásai.

□

2.1.19. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$\varphi'(x) + \varphi(x) = \varphi^{-1}(x)e^x. \quad (2.1.37)$$

Megoldás. A differenciálegyenlet Bernoulli-típusú, $\alpha = -1 < 0$. Olyan megoldásokat keresünk, melyekre $\mathcal{R}_\varphi \subseteq (0, +\infty)$ teljesül.

1. lépés. Differenciálegyenlet átalakítása lineáris egyenletté változócserével.

Mivel $\varphi \neq 0$, leoszthatjuk (2.1.37) mindkét oldalát φ^{-1} -gyel:

$$\varphi'(x)\varphi(x) + \varphi^2(x) = e^x \quad (2.1.38)$$

Bevezetjük a

$$\psi := \varphi^2 \quad (2.1.39)$$

jelölést. (2.1.39) mindkét oldalának deriválásával kapjuk, hogy

$$\psi' = 2\varphi\varphi' \Leftrightarrow \frac{\psi'}{2} = \varphi\varphi'.$$

Végrehajtva a (2.1.39) helyettesítést (2.1.38) egyenletben,

$$\frac{\psi'(x)}{2} + \psi(x) = e^x \Rightarrow \psi'(x) + 2\psi(x) = 2e^x \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (2.1.40)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlethez jutunk.

2. lépés. Lineáris differenciálegyenlet megoldása.

Megkeressük a (2.1.40) lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

2.1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása.

A

$$\psi'(x) + 2\psi(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

homogén egyenlet általános megoldása 2.1.2. tétel alapján $c \cdot e^{-P(x)}$ ($c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$) alakú, ahol P a p függvény primitív függvénye. Mivel $p = 2$ függvény egy primitív függvénye

$$P(x) = - \int 2dx = 2x \quad (x \in \mathbb{R}^+),$$

a homogén egyenlet megoldására

$$\boxed{\psi_h^{\hat{a}}(x) = ce^{-2x} \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})}$$

adódik.

2.2. lépés. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével.

A partikuláris megoldást

$$\psi_0(x) := \psi_{ih}^p(x) = c(x)e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük. Mivel ψ_0 az (2.1.40) inhomogén egyenlet megoldása, ezért

$$\psi_0'(x) + 2\psi_0(x) = 2e^x$$

egyenlet teljesül. Felhasználva a

$$\psi_0'(x) = c'(x)e^{-2x} + c(x)(-2)e^{-2x}$$

azonosságot, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c'(x)e^{-2x} + c(x)(-2)e^{-2x} + 2c(x) \cdot e^{-2x} &= 2e^x \\ c'(x) \cdot e^{-2x} &= 2e^x \quad / \cdot e^{2x} \\ c'(x) &= 2e^{3x} \\ c(x) &= \int 2e^{3x} dx = \frac{2}{3}e^{3x} \end{aligned}$$

A partikuláris megoldás tehát

$$\boxed{\psi_{ih}^p(x) = \frac{2}{3}e^{3x}e^{-2x} = \frac{2}{3}e^x \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).}$$

2.3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása.

Az előző két lépés eredményét összeadva az (2.1.40) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

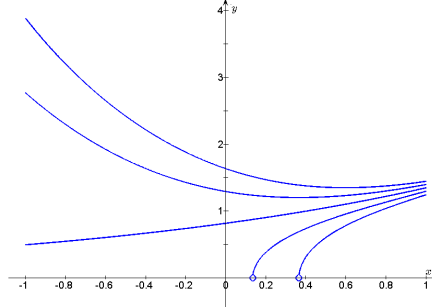
$$\boxed{\psi_{ih}^{\hat{a}}(x) = \psi_h^{\hat{a}}(x) + \psi_{ih}^p(x) = ce^{-2x} + \frac{2}{3}e^x = \frac{3c+2e^{3x}}{3 \cdot e^{2x}} \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).}$$

3. lépés. (2.1.33) differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározása.

(2.1.39) alapján az eredeti, (2.1.37) differenciálegyenlet általános megoldása:

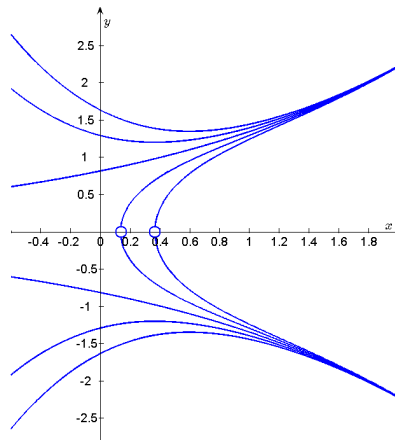
$$\varphi(x) \stackrel{\varphi > 0}{=} \sqrt{\psi(x)} = \sqrt{\frac{3c + 2e^{3x}}{3 \cdot e^{2x}}} = \frac{\sqrt{3c + 2e^{3x}}}{\sqrt{3} \cdot e^x} \quad (c \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_\varphi = \{x \in \mathbb{R} : 3c + 2e^{3x} > 0\}).$$

A (2.1.37) differenciálegyenlet általános megoldását, a c paramétertől függő görbesereget szemlélteti a 2.12. ábra.



2.12. ábra. A $\varphi' + \varphi = \varphi^{-1}e^x$ differenciálegyenlet általános megoldása.

Mivel $\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi}$, ezért a $\varphi < 0$ esetben is értelmezhető lenne a feladat. Az általános megoldásra ebben az esetben a fenti függvények (-1) -szeresei adódnának, geometriailag a függvények grafikonjának x -tengelyre vett tükörképének felelnek meg. (Lásd a 2.13. ábrát.)



2.13. ábra. A $\varphi' + \varphi = 1/\varphi e^x$ differenciálegyenlet megoldása. ($\varphi < 0$ is megengedett.)

□

2.1.2.3. Feladatok

2.1.2. Feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris vagy arra visszavezethető differenciálegyenleteket:

- | | | |
|--|-----------|----------|
| i) $(x+1)^2 \varphi' + 3(x+1)\varphi = 2;$ | Útmutatás | Megoldás |
| ii) $\varphi' + \varphi \cos x = \sin x \cos x;$ | Útmutatás | Megoldás |
| iii) $(2e^\varphi - x) \varphi' = 1;$ | Útmutatás | Megoldás |

$$iv) \quad \varphi' \cos x + \varphi \sin x = -\varphi^3;$$

Útmutatás

Megoldás

$$v) \quad x\varphi' - 4\varphi = -\sqrt{\varphi}.$$

Útmutatás

Megoldás

2.1.3. Egzakt és egzakra visszavezethető differenciálegyenletek

Eddigi differenciálegyenleteink mind $P(x, \varphi) + Q(x, \varphi)\varphi' = 0$ alakúak, vagy ilyen alakra hozhatóak voltak, ahol P, Q kétváltozós valós függvények. Speciális P és Q függvények esetén eljárást adtunk megoldhatóságukra. Ebben a fejezetben megismerkedünk egy olyan eljárással, melyet szintén ilyen típusú differenciálegyenletek megoldására lehet alkalmazni, viszont az eddigieknél sokkal általánosabb P , illetve Q függvényekre.

2.1.3.1. Egzakt differenciálegyenletek

2.1.8. Definíció. Legyen I és J egy-egy nyílt intervallum, a

$$P : I \times J \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényekről pedig tegyük fel, hogy folytonosak és $0 \notin \mathcal{R}_Q$. Azt mondjuk, hogy az

$$f(x, y) := -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad ((x, y) \in I \times J)$$

függvény (mint jobb oldal) által meghatározott d.e. **egzakt**, ha a

$$g : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad g(x, y) := (P(x, y), Q(x, y))$$

leképezésnek van primitív függvénye. Ez utóbbi követelmény azt jelenti, hogy egy alkalmas differenciálható $G : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ függvénnyel

$$G' = \text{grad } G = (P, Q).$$

Olyan $\varphi \in I \rightarrow J$ differenciálható függvényt keresünk tehát, amelyre $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt részintervalluma I -nek és

$$\varphi'(x) = -\frac{P(x, \varphi(x))}{Q(x, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi). \quad (2.1.41)$$

A (2.1.41) egyenlőség $0 \notin \mathcal{R}_h$ miatt azzal ekvivalens, hogy

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi). \quad (2.1.42)$$

Ha van ilyen φ függvény, akkor az

$$S(x) := G(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyváltozós valós függvény differenciálható és bármely $x \in \mathcal{D}_\varphi$ helyen

$$\begin{aligned} S'(x) &= \langle \text{grad} G(x, \varphi(x)), (1, \varphi'(x)) \rangle = \\ &= G'_x(x, \varphi(x)) + G'_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi) = 0. \end{aligned}$$

Mivel $\mathcal{D}_S = \mathcal{D}_\varphi$ egy nyílt intervallum és deriváltja nulla ezen az intervallumon, ezért S konstans-függvény, azaz létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, amellyel

$$S(x) = G(x, \varphi(x)) = c \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi). \quad (2.1.43)$$

Amennyiben φ -től azt is megköveteljük, hogy adott $\tau \in I, \xi \in J$ mellett tegyen eleget a $\varphi(\tau) = \xi$ k.é.p.-nak, akkor (2.1.43)-ból

$$c = G(\tau, \xi)$$

következik. Mivel G -ről feltehetjük, hogy $G(\tau, \xi) = 0$, ezért a szóban forgó k.é.p. (feltételezett) φ megoldása eleget tesz a

$$G(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi) \quad (2.1.44)$$

egyenletnek.

Vegyük észre, hogy (2.1.44) szerint φ nem más, mint egy, a G által meghatározott implicit függvény. A feltételek alapján $G \in C^1$, azaz G folytonosan differenciálható, $G(\tau, \xi) = 0$ és $G'_y(\tau, \xi) = Q(\tau, \xi) \neq 0$, ezért G -re (a (τ, ξ) helyen) teljesülnek az implicit függvény tételének feltételei. Következésképpen van olyan differenciálható $\varphi \in I \rightarrow J$ függvény, amelyre $\mathcal{D}_\varphi \subseteq I$ nyílt intervallum, $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$, $\varphi(\tau) = \xi$, igaz a (2.1.44) egyenlőség és az implicit függvény deriválási szabálya szerint

$$\varphi'(x) = -\frac{G'_x(x, \varphi(x))}{G'_y(x, \varphi(x))} = -\frac{P(x, \varphi(x))}{Q(x, \varphi(x))} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A szóban forgó k.é.p. tehát megoldható, és a megoldás(ok) a (2.1.44) implicit függvényegyenletből határozható(k) meg.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

2.1.4. Tétel. *A (2.1.41) egzakt d.e.-nek mindig létezik megoldása. Továbbá valamely $\varphi \in I \rightarrow J$ differenciálható függvény pontosan akkor megoldása a (2.1.41) d.e.-nek, ha létezik olyan $c \in \mathcal{R}_G$ szám, hogy φ megoldása a $G(x, y) = c$ implicit egyenletnek, és G a (P, Q) függvény egy primitív függvénye.*

2.1.5. Megjegyzés. 1. *Ha a tételben szereplő $c \neq 0$, akkor a $G - c$ primitív függvény már a bizonyítás során alkalmazott függvényegyenletet eredményezi.*

2. *A $\text{grad } G = (P, Q)$ feltételből a $G'_x = P$, $G'_y = Q$ egyenlőségek következnek. Ha $P, Q \in D$ differenciálható függvények, akkor $G \in D^2$, így a Young-tétel¹³ miatt $G''_{xy} = P'_y = G''_{yx} = Q'_x$, azaz ekkor a $P'_y = Q'_x$ feltétel teljesülése szükséges az „egzaktsághoz”.*

3. *Az egzakt differenciálegyenleteket illetően gyakran találkozhatunk az alábbi jelöléssel is:*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (2.1.45)$$

Állapodjunk meg abban, hogy a fenti szimbólum ugyanazt fogja jelenteni, mint az (2.1.41) egyenlőség. (A dolog hátterében az áll, hogy (2.1.41)-ben a φ függvény helyett y -t, $y'(x)$ helyett $\frac{dy}{dx}$ -et írva, y -nak x -től való függését nem jelölve „rendezzük” a (2.1.41) egyenlőséget. Természetesen pusztán formai „manipulációról” van szó. A feladatok megadása és megoldása során ezt a jelölésrendszert alkalmazzuk.)

4. *A (2.1.44) implicit függvényegyenlettel kapcsolatban is elmondható ugyanaz, mint a szeparábilis differenciálegyenleteknél: a (2.1.44)-nek eleget tevő φ függvény explicit megadása a gyakorlatban sokszor nem lehetséges.*

¹³Legyen az $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ($U \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz) függvény kétszer differenciálható az $a \in U$ pontban. Ekkor

$$f''_{xy}(a) = f''_{yx}(a).$$

Az egzakt d.e.-ek megoldása szempontjából fontos kérdés, hogy mikor tudjuk garantálni a (P, Q) függvény primitív függvényének létezését, illetve ha tudjuk, hogy létezik, akkor hogyan tudjuk meghatározni.

Primitív függvény létezésére vonatkozik az alábbi tétel, melynek bizonyítása megtalálható [6]-ben (152. oldal, 4. Tétel).

2.1.5. Tétel. *Legyenek $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallumok. Ha $g : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g = (P, Q)$ kétváltozós, vektorértékű, folytonosan differenciálható függvény ($g \in D_{I \times J}$), és teljesül a*

$$P'_y(x, y) = Q'_x(x, y) \quad ((x, y) \in I \times J) \quad (2.1.46)$$

egyenlőség, akkor g -nek létezik primitív függvénye $I \times J$ -n. Nevezetesen g integrálfüggvénye primitív függvény is egyben.

A P, Q függvények értelmezési tartománya geometriailag egy nyílt téglalap. Azt kaptuk tehát, hogy ha a P, Q függvények folytonosan differenciálhatók, akkor (2.1.46) feltétel nem csak szükséges, hanem elégséges feltétele is az egzaktságnak. Az általunk vizsgált differenciálegyenletek esetén a folytonosan differenciálhatóság feltétele minden esetben teljesülni fog.

Kérdés az, hogyan határozzuk meg a (P, Q) függvény primitív függvényét? Erre két módszert mutatunk:

1. módszer. Vonalintegrál segítségével.

Ha a g -nek létezik primitív függvénye, akkor a vonalintegrál értéke független az úttól, csak a végpontoktól függ (Newton-Leibniz tétel következménye, lásd [6], 150. oldal, 2. tétel), és minden integrálfüggvény primitív függvény is egyben (lásd [6], 151. oldal, 3. Tétel), azaz ha $a = (a_1, a_2) \in I \times J$ tetszőleges rögzített pont, akkor

$$G(x, y) := \int_{\psi} Pdx + Qdy \quad (x, y) \in I \times J \quad (2.1.47)$$

integrálfüggvény egy alkalmas primitív függvény is, ahol $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow I \times J$ tetszőleges szakaszonként sima út¹⁴, mely az a pontot az (x, y) ponttal köti össze.

Mivel ψ tetszőlegesen választható, ezért célszerű a lehető legegyszerűbb utat választani. Szokás az utat a tengelyekkel párhuzamosan felvenni, azaz

$$\psi = \psi_1 \cup \psi_2,$$

ahol

$$\begin{aligned} \psi_1 &: \begin{cases} x(t) = t & x'(t) = 1 \\ y(t) = a_2 & y'(t) = 0 \\ t : a_1 \rightsquigarrow x; \end{cases} \\ \psi_2 &: \begin{cases} x(t) = x & x'(t) = 0 \\ y(t) = t & y'(t) = 1 \\ t : a_2 \rightsquigarrow y. \end{cases} \end{aligned}$$

14

- $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow u$ függvény **sima út**, ha $\varphi \in C^1_{[\alpha, \beta]}$ (folytonosan differenciálható), és $\varphi'(t) \neq (0, 0)$, ($t \in [\alpha, \beta]$).
- $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow u$ függvény **szakaszonként sima út**, ha $\exists \tau \in \mathcal{F}_{[\alpha, \beta]}$, $\tau = \{\alpha = x_0, x_1, \dots, x_n = \beta\}$ felosztás, hogy

$$\varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} \text{ sima út} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

paraméterezésűek. A vonalintegrál kiszámítási szabálya alapján kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
 G(x, y) &= \int_{\psi} Pdx + Qdy = \int_{\psi_1 \cup \psi_2} Pdx + Qdy = \int_{\psi_1} Pdx + Qdy + \int_{\psi_2} Pdx + Qdy = \\
 &= \int_{a_1}^x P(t, a_2) \cdot 1 + Q(t, a_2) \cdot 0 dt + \int_{a_2}^y P(x, t) \cdot 0 + Q(x, t) \cdot 1 dt = \\
 &= \int_{a_1}^x P(t, a_2) dt + \int_{a_2}^y Q(x, t) dt.
 \end{aligned} \tag{2.1.48}$$

2. módszer. *Visszavezetés egyváltozós primitív függvényre.*

Keressük azt a G függvényt, melyre

$$G'_x(x, y) = P(x, y) \quad \text{és} \quad G'_y(x, y) = Q(x, y) \tag{2.1.49}$$

Az első feltételből integrálással kapjuk, hogy

$$G(x, y) = \int P(x, y) dx + h(y),$$

ahol h csak y -től függő függvény. Ha sikerül h -t kiszámolnunk, akkor megkapjuk G -t. (2.1.49) második feltétele alapján

$$G'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y) dx \right) + h'(y) = Q(x, y),$$

ami h -ra vonatkoztatva egy differenciálegyenlet. A paraméteres integrálra vonatkozó tétel (lásd [6], 114. oldal, 1. Tétel) miatt az egyenlet

$$\int P'_y(x, y) dx + h'(y) = Q(x, y)$$

alakba írható. Ez a differenciálegyenlet egzakt, így teljesül (2.1.46), és így érvényes a további átalakítás:

$$\int Q'_x(x, y) dx + h'(y) = Q(x, y)$$

Kiszámolva a határozatlan integrált kapjuk, hogy

$$Q(x, y) + g(y) + h'(y) = Q(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad g(y) + h'(y) = 0,$$

ahol g csak y -től függő függvény. h tehát megkapható a

$$h(y) = \int -g(y) dy$$

integrál kiszámításával.

Egzakt differenciálegyenlet megoldásának menete:

1. **lépés.** Ellenőrizzük, hogy differenciálegyenletünk valóban egzakt-e? Ez tulajdonképpen két lényeges feltétel ellenőrzését jelenti:

- $U := \mathcal{D}_P \cap \mathcal{D}_Q$ téglalap-tartomány-e?
- (2.1.46) teljesül-e?

Ha (2.1.46) teljesül, de U nem téglalap, akkor leszűkítjük az értelmezési tartományt.

2. **lépés.** Kiszámoljuk a definiált $g = (P, Q)$ függvény egy primitív függvényét.

3. **lépés.** (2.1.43) alapján megadjuk a differenciálegyenlet megoldását implicit alakban. Ha tudjuk, explicit alakban is kifejezzük.

Az alábbi példákban mindkét módszerrel kiszámoljuk a (P, Q) függvény primitív függvényét. A megoldásokból is látszik, hogy vonalintegrál segítségével hamarabb eredményre jutunk, tehát ennek alkalmazása a javallott.

2.1.20. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$(y \cos^2 x - \sin x)dy - y \cos x(y \sin x + 1)dx = 0. \quad (2.1.50)$$

Megoldás. Célszerű a differenciálegyenletet az általános alaknak megfelelően átírni, nehogy össze-tévezzük a jelöléseket:

$$-y \cos x(y \sin x + 1)dx + (y \cos^2 x - \sin x)dy = 0.$$

Ebből az alakból egyszerűen leolvasható, hogy

$$P(x, y) = -y \cos x(y \sin x + 1) \quad \text{és} \quad Q(x, y) = y \cos^2 x - \sin x.$$

1. lépés. Egzaktság ellenőrzése. Mivel a trigonometrikus függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza, ezért P, Q értelmezési tartománya $U = \mathbb{R}^2$, ami egy nyílt téglalap. A P, Q függvények folytonosan differenciálhatók,

$$\begin{aligned} P'_y(x, y) &= (-1) \cdot \cos x(y \sin x + 1) + (-y \cos x) \cdot \sin x = -2y \cos x \sin x - \cos x \quad \text{és} \\ Q'_x(x, y) &= y \cdot 2 \cos x(-\sin x) - \cos x, \end{aligned}$$

azaz teljesül a $P'_y(x, y) = Q'_x(x, y)$ feltétel, ezért a (2.1.50) d.e. egzakt.

2. lépés. Primitív függvény keresése. Mindkét módszer segítségével megmutatjuk a primitív függvény keresését.

Vonalintegrál segítségével. A g függvény primitív függvényét a (2.1.48) képlet alapján fogjuk meghatározni $\mathbb{R}^2$ tartomány bármelyik pontjából nézve. Célszerű kezdőpontnak a lehető legegyszerűbbet választani. Legyen például $a := (0, 0)$. Ekkor (2.1.48) alapján $g = (P, Q)$ primitív függvényére

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int_{a_1}^x P(t, a_2)dt + \int_{a_2}^y Q(x, t)dt = \int_0^x (-0) \cdot \cos t(0 \cdot \sin x + 1)dt + \int_0^y t \cos^2 x - \sin x dt = \\ &= \int_0^y t \cos^2 x - \sin x dt = \left[\frac{t^2}{2} \cos^2 x - t \cdot \sin x \right]_{t=0}^{t=y} = \frac{1}{2} y^2 \cos^2 x - y \sin x \end{aligned} \quad (2.1.51)$$

adódik.

Két egymás utáni primitív függvény számításával. Keressük azt a G függvényt, melyre

$$G'_x(x, y) = P(x, y) = -y \cos x (y \sin x + 1) \quad \text{és} \quad G'_y(x, y) = Q(x, y) = y \cos^2 x - \sin x.$$

Az első feltételből integrálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int -y \cos x (y \sin x + 1) dx + h(y) = \int -y^2 \cos x \sin x - y \cos x dx + h(y) = \\ &= \int -\frac{y^2}{2} \sin 2x - y \cos x dx + h(y) = -\frac{y^2}{2} \cdot \left(-\frac{\cos(2x)}{2} \right) - y \sin x + h(y) = \\ &= \frac{y^2 \cos(2x)}{4} - y \sin x + h(y), \end{aligned} \quad (2.1.52)$$

ahol h csak y -től függő függvény. Célunk h meghatározása. A második feltétel alapján

$$G'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^2 \cos(2x)}{4} - y \sin x + h(y) \right) = \frac{y \cos(2x)}{2} - \sin x + h'(y) = y \cos^2 x - \sin x,$$

melyet rendezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{y \cos(2x)}{2} + h'(y) &= y \cos^2 x & / \cdot 2 \\ y(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2h'(y) &= 2y \cos^2 x & / -y(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ 2h'(y) &= y(\cos^2 x + \sin^2 x) & / : 2 \\ h'(y) &= \frac{y}{2}, \end{aligned}$$

melyből integrálással kapjuk, hogy

$$h(y) = \int \frac{y}{2} dy = \frac{y^2}{4}.$$

Egy megfelelő primitív függvényt keresünk, ezért az integrációs konstansztól eltekintünk. h -t behelyettesítve (2.1.52) képletbe, $g = (P, Q)$ primitív függvényét kapjuk:

$$G(x, y) = \frac{y^2 \cos(2x)}{4} - y \sin x + \frac{y^2}{4}.$$

Első ránézésre nem ugyanazt az eredményt kaptuk, mint (2.1.51)-ben. Egyszerű trigonometria átalakításokkal a most kapott függvényt más alakra hozhatjuk:

$$G(x, y) = \frac{y^2(\cos^2 x - \sin^2 x) + y^2(\cos^2 x + \sin^2 x)}{4} - y \sin x = \frac{y^2 \cos^2 x}{2} - y \sin x,$$

ami már megegyezik (2.1.51)-tal. ¹⁵

3. lépés. Differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározása. A 2.1.4. tétel alapján a (2.1.50) differenciálegyenlet megoldása az alábbi implicit függvényegyenlet megoldása:

$$\frac{y^2 \cos^2 x}{2} - y \sin x = c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

¹⁵Megjegyezzük, hogy mivel a primitív függvények csak additív konstans erejéig egyértelműek, ezért a két eredmény között additív konstansbeli eltérés lehet.

A megoldás jelen esetben explicit alakban is megadható: $c = 0$ esetén

$$\varphi \equiv 0 \quad (D_\varphi = \mathbb{R}) \quad \text{vagy} \quad \varphi(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}),$$

$c > 0$ esetben

$$\varphi(x) = \frac{\sin x + \sqrt{\sin^2 x + 2c \cos^2 x}}{\cos^2 x} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}),$$

illetve

$$\varphi(x) = \frac{\sin x - \sqrt{\sin^2 x + 2c \cos^2 x}}{\cos^2 x} \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}),$$

$c < 0$ esetén a hozzárendelési szabály a $c > 0$ esettel megegyezik, az értelmezési tartomány meghatározását az olvasóra bízuk. $\square$

2.1.21. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$\ln(y^2 + 1)dx + \frac{2y(x-1)}{y^2 + 1}dy = 0. \quad (2.1.53)$$

Megoldás. A differenciálegyenlet 2.1.45 alakú, melyben

$$P(x, y) = \ln(y^2 + 1) \quad \text{és} \quad Q(x, y) = \frac{2y(x-1)}{y^2 + 1}.$$

1. lépés. Egzaktság ellenőrzése. Mivel $y^2 + 1 > 0$ ($y \in \mathbb{R}$), ezért P, Q értelmezési tartománya $U = \mathbb{R}^2$, ami egy nyílt téglalap.

A P, Q függvények megfelelő parciális deriváltjai:

$$P'_y(x, y) = \frac{1}{y^2 + 1} \cdot 2y$$

$$Q'_x(x, y) = \frac{2y}{y^2 + 1} \cdot 1,$$

azaz teljesül a $P'_y(x, y) = Q'_x(x, y)$ feltétel is, ezért a (2.1.53) d.e. egzakt.

2. lépés. Primitív függvény keresése. Mindkét módszer segítségével megmutatjuk a primitív függvény keresését.

Vonalintegrál segítségével. A g függvény primitív függvényét a (2.1.48) képlet alapján fogjuk meghatározni $\mathbb{R}^2$ tartomány bármelyik pontjából nézve. Legyen például $a := (0, 0)$. Ekkor (2.1.48) alapján $g = (P, Q)$ primitív függvényére

$$G(x, y) = \int_{a_1}^x P(t, a_2)dt + \int_{a_2}^y Q(x, t)dt = \int_0^x \overbrace{\ln(0^2 + 1)}^{=0} dt + \int_0^y \frac{2t(x-1)}{t^2 + 1} dt =$$

$$= (x-1) \underbrace{\int_0^y \frac{2t}{t^2 + 1} dt}_{(1+t^2)'=2t} = (x-1) [\ln |1+t^2|]_{t=0}^{t=y} = (x-1) \cdot \ln(1+y^2) \quad (2.1.54)$$

adódik.

Két egymás utáni primitív függvény számításával. Keressük azt a G függvényt, melyre

$$G'_x(x, y) = P(x, y) = \ln(y^2 + 1) \quad \text{és} \quad G'_y(x, y) = Q(x, y) = \frac{2y(x-1)}{y^2 + 1}.$$

Az első feltételből integrálással kapjuk, hogy

$$G(x, y) = \int \ln(y^2 + 1) dx + h(y) = \ln(y^2 + 1) \cdot x + h(y), \quad (2.1.55)$$

ahol h csak y -től függő függvény. Célunk h meghatározása. A második feltétel alapján

$$G'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (\ln(y^2 + 1) \cdot x + h(y)) = \frac{2y}{y^2 + 1} \cdot x + h'(y) = \frac{2y(x-1)}{y^2 + 1},$$

melyet rendezve kapjuk, hogy

$$h'(y) = -\frac{2y}{y^2 + 1},$$

melyből integrálással kapjuk, hogy

$$h(y) = \int -\frac{2y}{y^2 + 1} dy = -\ln(y^2 + 1).$$

Egy megfelelő primitív függvényt keresünk, ezért az integrációs konstansról eltekintünk. h -t behelyettesítve (2.1.55) képletbe, $g = (P, Q)$ primitív függvényét kapjuk:

$$G(x, y) = \ln(y^2 + 1) \cdot x - \ln(y^2 + 1) = (x-1) \cdot \ln(y^2 + 1).$$

Ugyanazt az eredményt kaptuk, mint (2.1.54)-ban.

3. lépés. Differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározása. A 2.1.4. tétel alapján a (2.1.53) differenciálegyenlet megoldása az alábbi implicit függvényegyenlettel adható meg:

$$(x-1) \cdot \ln(y^2 + 1) = c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

A megoldás jelen esetben explicit alakban is megadható:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2}(x) &= \pm \sqrt{e^{\frac{c}{x-1}} - 1} & (c > 0, x \in (1, +\infty)), \\ \varphi(x) &= 0 & (c = 0, x \in \mathbb{R}), \\ \varphi_{3,4}(x) &= \pm \sqrt{e^{\frac{c}{x-1}} - 1} & (c < 0, x \in (-\infty, 1)). \end{aligned}$$

□

2.1.6. Megjegyzés. A 2.1.21. példa egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet, hiszen

$$\ln(y^2 + 1) dx = -\frac{2y(x-1)}{y^2 + 1} dy \quad \xrightarrow{x \neq 0} \quad \frac{1}{x-1} dx = -\frac{2y}{\ln(y^2 + 1)(y^2 + 1)} dy$$

alakra hozható. Integrálással a megoldást implicit alakban kapjuk:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x-1} dx &= - \underbrace{\int \frac{2y}{\ln(y^2 + 1)(y^2 + 1)} dy}_{(\ln(y^2 + 1))' = \frac{2y}{1+y^2}} \\ \ln|x-1| + c &= \ln|\ln(1+y^2)| / e^\sim \\ e^c \cdot |x-1| &= |\ln(1+y^2)| \quad (c \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Felmerül a kérdés, hogy vajon az összes szétválasztható változójú differenciálegyenlet egzakt-e?. Erről szól a

2.1.6. Tétel. A 2.1.1. definícióban értelmezett szétválasztható változójú differenciálegyenlet egzakt.

Bizonyítás. Mivel $0 \notin \mathcal{R}_h$, ezért a

$$P(x, y) = g(x) \quad \text{és} \quad Q(x, y) = -\frac{1}{h(y)}$$

utasítással értelmezett függvények értelmezési tartományának metszete az $I \times J$ nyílt téglalap ($D_P \cap D_Q = I \times J$), és ezekkel a P , Q függvényekkel a szeparábilis d.e. (2.1.41) alakba írható. Legyen $a = (a_1, a_2) \in I \times J$ rögzített pont, és tekintsük a

$$G(x, y) := \int_{a_1}^x g(t)dt - \int_{a_2}^y \frac{1}{h(s)}ds \quad ((x, y) \in I \times J)$$

függvényt. Mivel g és $\frac{1}{h}$ egyváltozós folytonos függvények, ezért integrálfüggvényük egyben primitív függvény is. Ezért a (P, Q) függvénynek G primitív függvénye, tehát a szeparábilis d.e. valóban egzakt.

□

2.1.3.2. Euler-féle multiplikátor

A 2.1.6. tétel is sugallja, hogy ha egy differenciálegyenlet $Pdx + Qdy = 0$ alakra hozható, és nem ismerjük fel, hogy szétválasztható változójú, akkor célszerű megnézni, hogy egzakt-e, és ha igen, akkor érdemes egzakt differenciálegyenletként megoldani. A lineáris és Bernoulli-féle differenciálegyenletek általában nem egzaktak. Ezen kívül sok olyan (2.1.45) típusú differenciálegyenlet van, mely nem egzakt, illetve a differenciálegyenletek többféle módon hozhatók $Pdx + Qdy = 0$ alakra és nem minden esetben teljesül az egzaktság.

Kérdés, hogy a szóban forgó d.e.-et alkalmas függvénnyel szorozva egzakttá tehető-e?

Mindkét oldalt beszorozva egy $\mu \in I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható, sehol sem nulla függvénnyel elérhető-e, hogy a

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0 \quad ((x, y) \in \mathcal{D}_\mu)$$

differenciálegyenlet egzakt legyen? ¹⁶ Feltételezve, hogy a differenciálegyenletünkben szereplő kétváltozós függvények értelmezési tartománya nyílt téglalap marad, (2.1.46) alapján μ -nak a

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu(x, y)P(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x, y)Q(x, y))$$

parciális differenciálegyenletnek kell, hogy eleget tegyen. A deriválást elvégezve kapjuk, hogy

$$\mu'_y(x, y)P(x, y) + \mu(x, y)P'_y(x, y) = \mu'_x(x, y)Q(x, y) + \mu(x, y)Q'_x(x, y),$$

ahonnan átrendezéssel,

$$\mu(x, y) (P'_y(x, y) - Q'_x(x, y)) = \mu'_x(x, y)Q(x, y) - \mu'_y(x, y)P(x, y)$$

¹⁶ Mivel μ nemnulla függvény, ezért ha a μ -vel beszorzott differenciálegyenletnek az φ függvény megoldása, akkor az eredetinek is megoldása.

adódik. Feltételezve, hogy $\mu > 0$, az összetett függvény differenciálási szabálya alapján kapjuk, hogy $(\ln \mu)'_y = \frac{1}{\mu} \mu'_y$, valamint $(\ln \mu)'_x = \frac{1}{\mu} \mu'_x$, amit felhasználva a megoldandó differenciálegyenletünk

$$P'_y(x, y) - Q'_x(x, y) = (\ln \mu)'_x(x, y)Q(x, y) - (\ln \mu)'_y(x, y)P(x, y) \quad (2.1.56)$$

alakba írható. Ha tehát találunk a (2.1.56) parciális differenciálegyenletnek egy partikuláris megoldását, akkor a $Pdx + Qdy = 0$ alakú differenciálegyenletet egzakttá tudjuk tenni, és így meg tudjuk oldani. Ezt a módszert **Euler-féle multiplikátoros módszernek**¹⁷, a μ függvényt pedig **Euler-féle multiplikátornak**, vagy **integráló tényezőnek** nevezzük. A (2.1.56) parciális differenciálegyenlet megoldása általában bonyolult, de bizonyos speciális esetekben meg tudjuk adni a megoldást. Ezek közül néhányat felsorolunk.

1. Csak x -től függő multiplikátor létezése. A $\mu = \mu(x)$ alakú multiplikátor esetén a (2.1.56) differenciálegyenletre

$$P'_y(x, y) - Q'_x(x, y) = (\ln \mu)'(x)Q(x, y)$$

adódik. Ez akkor oldható meg, ha a

$$\frac{P'_y(x, y) - Q'_x(x, y)}{Q(x, y)}$$

függvény nem függ y -től. Ebben az esetben

$$\mu(x) = e^{\int \frac{P'_y(x, y) - Q'_x(x, y)}{Q(x, y)} dx} \quad (x \in I)$$

a parciális differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása, azaz egy alkalmas multiplikátor.

2. Csak y -től függő multiplikátor létezése. A $\mu = \mu(y)$ alakú multiplikátor esetén a (2.1.56) differenciálegyenletre

$$P'_y(x, y) - Q'_x(x, y) = -(\ln \mu)'(y)P(x, y)$$

adódik. Ez akkor oldható meg, ha a

$$\frac{Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)}{P(x, y)}$$

függvény nem függ x -től. Ebben az esetben

$$\mu(y) = e^{\int \frac{Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)}{P(x, y)} dy} \quad (y \in J)$$

a parciális differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása, azaz egy alkalmas multiplikátor.

3. $x \cdot y$ -től függő multiplikátor létezése. A $\mu(x, y) = \mu(xy)$ alakú multiplikátor esetén a (2.1.56) differenciálegyenletre

$$P'_y(x, y) - Q'_x(x, y) = \frac{1}{\mu} \mu'(xy) (yQ(x, y) - xP(x, y))$$

adódik, mivel $(\mu(xy))'_x = \mu'(xy)y$ és $(\mu(xy))'_y = \mu'(xy)x$. Ez akkor megoldható, ha ha a

$$\frac{P'_y(x, y) - Q'_x(x, y)}{yQ(x, y) - xP(x, y)} = h(xy)$$

¹⁷Az ötlet Leonhard Euler (1707-1783) svájci matematikustól származik. Ő volt a matematikatörténet egyik legtermékenyebb és legjelentősebb alakja.

függvény xy függvénye. Ebben az esetben a

$$\mu(t) = e^{\int h(t)dt}$$

függvénnyel a $\mu(x, y) = \mu(xy)$ függvény a parciális differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása, azaz egy alkalmas multiplikátor.

4. $\mu(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ alakú multiplikátor létezése. A $\mu(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ alakú multiplikátor esetén a (2.1.56) differenciálegyenletre

$$P'_y(x, y) - Q'_x(x, y) = (\ln g)'(x)Q(x, y) - (\ln h)'(y)P(x, y) \quad (2.1.57)$$

adódik, mivel

$$\begin{aligned} (\ln \mu)'_x(x, y) &= \frac{1}{g(x)h(y)} \cdot g'(x) \cdot h(y) = \frac{g'(x)}{g(x)} = (\ln g)'(x), \\ (\ln \mu)'_y(x, y) &= \frac{1}{g(x)h(y)} \cdot g(x) \cdot h'(y) = \frac{h'(y)}{h(y)} = (\ln h)'(y). \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy léteznek olyan H, G függvények, melyekre

$$P'_y(x, y) - Q'_x(x, y) = G(x) \cdot Q(x, y) - H(y) \cdot P(x, y) \quad (2.1.58)$$

teljesül. Az azonosságot a (2.1.57) egyenletbe beírva és rendezve kapjuk, hogy

$$0 = Q(x, y) ((\ln g)'(x) - G(x)) - P(x, y) ((\ln h)'(y) - H(y))$$

Ennek az egyenletnek

$$g(x) = e^{\int G(x)dx} \quad \text{és} \quad h(y) = e^{\int H(y)dy}$$

függvények nyilván megoldásai, és ekkor a $\mu(x, y) = g(x)h(y)$ jó multiplikátor.

2.1.7. Megjegyzés. Az Euler-féle multiplikátoros módszer alkalmas arra, hogy bizonyos $Pdx + Qdy = 0$ alakú differenciálegyenleteket megoldjunk. Előfordul azonban, hogy a multiplikátor segítségével kapott egzakt differenciálegyenlet megoldáshalmaza szűkebb, mint az eredeti differenciálegyenleté, azaz megoldásokat veszítünk a módszer alkalmazásával.

2.1.22. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$(xy^2 + y)dx - xdy = 0. \quad (2.1.59)$$

Megoldás. A differenciálegyenlet (2.1.45) alakú. Egyszerűen leolvasható, hogy

$$P(x, y) = xy^2 + y \quad \text{és} \quad Q(x, y) = -x.$$

1. lépés. Egzaktság ellenőrzése. P, Q értelmezési tartománya $U = \mathbb{R}^2$.

A P, Q függvények megfelelő parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} P'_y(x, y) &= 2xy + 1 \\ Q'_x(x, y) &= -1, \end{aligned}$$

így a $P'_y(x, y) = Q'_x(x, y)$ feltétel nem teljesül, ezért alkalmas multiplikátort keresünk. Mivel

$$\frac{Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)}{P(x, y)} = \frac{-2 - 2xy}{xy^2 + y} = \frac{-2(1 + xy)}{y(xy + 1)} = -\frac{2}{y}$$

nem függ x -től, ezért létezik csak y -tól függő multiplikátor. Nevezetesen a

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y} dy} = e^{-2 \ln y} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2}$$

egy alkalmas multiplikátor.¹⁸ μ -val beszorozva a (2.1.59) differenciálegyenletet, a

$$(x + y^{-1})dx - xy^{-2}dy = 0 \quad (2.1.60)$$

egzakt differenciálegyenlethez jutunk, ahol

$$P_1(x, y) = x + \frac{1}{y} \quad \text{és} \quad Q_1(x, y) = -\frac{x}{y^2}.$$

Vegyük észre, hogy P_1 és Q_1 értelmezési tartománya már téglalap, mert nem tartalmazza az x tengely pontjait. Primitív függvényt ezért csak értelmezési tartományának egy leszűkítésén, például a $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ téglalapon keresünk.

2. lépés. Primitív függvény keresése. *Vonalintegrál segítségével* keresünk primitív függvényt. A g függvény primitív függvényét a (2.1.48) képlet alapján fogjuk meghatározni a H tartomány bármelyik pontjából nézve. Legyen a kezdőpont $a := (0, 1)$. Ekkor (2.1.48) alapján az $f = (P_1, Q_1)$ primitív függvényére

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int_{a_1}^x P_1(t, a_2) dt + \int_{a_2}^y Q_1(x, t) dt = \int_0^x t + 1 dt + \int_1^y -\frac{x}{t^2} dt = \\ &= \left[\frac{t^2}{2} + t \right]_{t=0}^{t=x} + \left[\frac{x}{t} \right]_{t=1}^{t=y} = \frac{x^2}{2} + x + \frac{x}{y} - x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y} \end{aligned} \quad (2.1.61)$$

adódik.

3. lépés. Differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározása. A 2.1.4. tétel alapján a (2.1.60) differenciálegyenlet általános megoldása implicit alakban:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y} = c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

A megoldás jelen esetben explicit alakban is megadható:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{2x}{2c - x^2} \quad (c \in \mathbb{R}_0^-, x \in (-\infty, 0)), \\ \varphi(x) &= \frac{2x}{2c - x^2} \quad (c \in \mathbb{R}^+, x \in (0, \sqrt{2c}) \text{ vagy } x \in (-\infty, -\sqrt{2c})). \end{aligned}$$

Ellenőrizhető, hogy más tartomány ($y < 0$) választásával is ugyanez a képlet adódik. Az értelmezési tartomány vizsgálatát ebben az esetben az olvasóra bizzuk. Ezek a függvények a (2.1.59) differenciálegyenletnek is megoldásai, továbbá ennek a differenciálegyenletnek $y \equiv 0$ is megoldása. $\square$

2.1.23. Példa. *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:*

$$(x \cos y - y \sin y)dy + (x \sin y + y \cos y)dx = 0. \quad (2.1.62)$$

¹⁸ Az abszolútértéket azért nem írjuk ki, mert csak pozitív multiplikátort keresünk.

Megoldás. A differenciálegyenlet (2.1.45) alakú. Egyszerűen leolvasható, hogy

$$P(x, y) = x \sin y + y \cos y \quad \text{és} \quad Q(x, y) = x \cos y - y \sin y.$$

1. lépés. Egzaktság ellenőrzése. P, Q értelmezési tartománya $U = \mathbb{R}^2$.

A P, Q függvények megfelelő parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} P'_y(x, y) &= x \cos y + \cos y - y \sin y = Q(x, y) + Q'_x(x, y) \\ Q'_x(x, y) &= \cos y, \end{aligned}$$

így a $P'_y(x, y) = Q'_x(x, y)$ feltétel nem teljesül, ezért multiplikátort keresünk. Mivel

$$\frac{P'_y(x, y) - Q'_x(x, y)}{Q(x, y)} = 1$$

nem függ y -től, ezért létezik csak x -től függő multiplikátor. Nevezetesen a

$$\mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

egy alkalmas multiplikátor. Ezért a (2.1.62) differenciálegyenletből az

$$e^x(x \cos y - y \sin y)dy + e^x(x \sin y + y \cos y)dx = 0 \quad (2.1.63)$$

egzakt differenciálegyenlethez jutunk, ahol

$$P_1(x, y) = e^x(x \sin y + y \cos y) \quad \text{és} \quad Q_1(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y).$$

P_1, Q_1 értelmezési tartománya továbbra is $\mathbb{R}^2$.

2. lépés. Primitív függvény keresése. *Vonalintegrál segítségével* keresünk primitív függvényt. Az g függvény primitív függvényét a (2.1.48) képlet alapján fogjuk meghatározni az $\mathbb{R}^2$ tartomány bármelyik pontjából nézve. Legyen például $a := (0, 0)$. Ekkor (2.1.48) alapján $g = (P_1, Q_1)$ primitív függvényére

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int_{a_1}^x P_1(t, a_2) dt + \int_{a_2}^y Q_1(x, t) dt = \int_0^x e^t(t \sin 0 + 0 \cos 0) dt + \int_0^y e^x(x \cos t - t \sin t) dt = \\ &= e^x \cdot x \int_0^y \cos t dt - e^x \underbrace{\int_0^y t \sin t dt}_{\substack{u=t \quad v'=\sin t \\ u'=1 \quad v=-\cos t}} = e^x \cdot x [\sin t]_{t=0}^{t=y} - \\ &- e^x \left([-t \cos t]_{t=0}^{t=y} + \int_0^y \cos t dt \right) = e^x \cdot x \cdot \sin y + e^x \cdot y \cdot \cos y - e^x \cdot \sin y \end{aligned}$$

adódik.

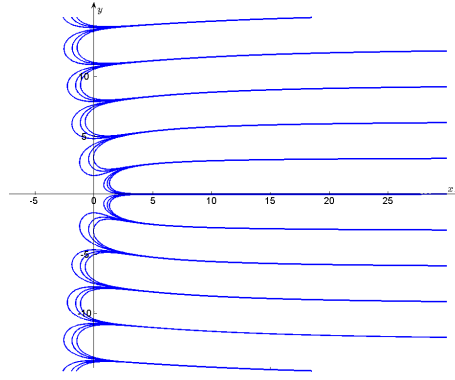
3. lépés. Differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározása. A 2.1.4. tétel alapján a (2.1.63) differenciálegyenlet általános megoldása implicit alakban:

$$e^x \cdot x \cdot \sin y + e^x \cdot y \cdot \cos y - e^x \cdot \sin y = c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Ezek a függvények a (2.1.62) differenciálegyenletnek is megoldásai.

A a (2.1.62) differenciálegyenlet általános megoldását, a c paramétertől függő görbesereget szemlélteti a 2.14. ábra.

□



2.14. ábra. Az $(x \cos y - y \sin y)dy + (x \sin y + y \cos y)dx = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása.

2.1.24. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0. \quad (2.1.64)$$

Megoldás. Az $y' = \frac{dy}{dx}$ azonosságot beírva, dx -szel beszorozva a differenciálegyenlet (2.1.45) alakra hozható. Egyszerűen leolvasható, hogy

$$P(x, y) = x^2y^3 + y \quad \text{és} \quad Q(x, y) = x^3y^2 - x.$$

1. lépés. Egzaktság ellenőrzése. P, Q értelmezési tartománya $U = \mathbb{R}^2$.

A P, Q függvények megfelelő parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} P'_y(x, y) &= 3x^2y^2 + 1 \\ Q'_x(x, y) &= 3x^2y^2 - 1, \end{aligned}$$

azaz a $P'_y(x, y) = Q'_x(x, y)$ feltétel nem teljesül, ezért multiplikátort keresünk. Mivel

$$\frac{P'_y(x, y) - Q'_x(x, y)}{yQ(x, y) - xP(x, y)} = \frac{2}{x^3y^3 - xy - (x^3y^3 + xy)} = -\frac{1}{xy}$$

xy függvénye, ezért létezik xy -től függő multiplikátor. Nevezetesen a

$$h(t) = e^{\int -\frac{1}{t} dt} = e^{-\ln t} = e^{\ln t^{-1}} = \frac{1}{t}$$

függvény segítségével definiált

$$\mu(xy) = \frac{1}{xy}$$

egy alkalmas multiplikátor. Ezért a (2.1.64) differenciálegyenletből a

$$\left(xy^2 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x^2y - \frac{1}{y}\right)dy = 0 \quad (2.1.65)$$

egzakt differenciálegyenlethez jutunk, ahol

$$P_1(x, y) = xy^2 + \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad Q_1(x, y) = x^2y - \frac{1}{y}.$$

P_1, Q_1 értelmezési tartománya megváltozott, értelmezési tartományuk metszete a tengelyek nélküli sík, ami nem téglalap tartomány, ezért választásunk alapján csak az első síknegyedben ($H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$) keressük a primitív függvényt, ami már geometriailag téglalap.

2. lépés. Primitív függvény keresése. *Vonalintegrál segítségével* keresünk primitív függvényt. Az g függvény primitív függvényét a (2.1.48) képlet alapján fogjuk meghatározni a H tartomány bármelyik pontjából nézve. Legyen a kezdőpont $a := (1, 1)$. Ekkor (2.1.48) alapján $g = (P_1, Q_1)$ primitív függvényére

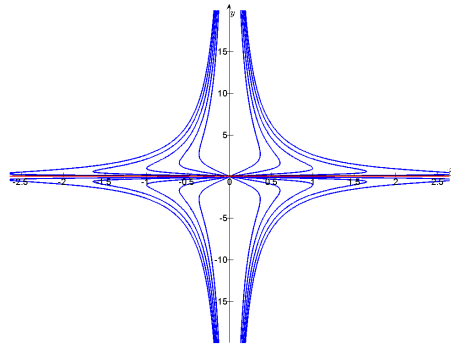
$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int_{a_1}^x P_1(t, a_2) dt + \int_{a_2}^y Q_1(x, t) dt = \int_1^x t^2 + \frac{1}{t} dt + \int_1^y x^2 t - \frac{1}{t} dt = \\ &= \left[\frac{t^3}{3} + \ln |t| \right]_{t=1}^{t=x} + x^2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=1}^{t=y} - [\ln |t|]_{t=1}^{t=y} \\ &= \frac{x^3}{3} + \ln |x| - \frac{1}{3} - \ln 1 + x^2 \frac{y^2}{2} - x^2 \frac{1}{2} - \ln |y| + \ln 1 = \ln \left| \frac{x}{y} \right| + \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.1.66)$$

adódik. ¹⁹

3. lépés. Differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározása. A 2.1.4. tétel alapján a (2.1.65) differenciálegyenlet általános megoldása implicit alakban:

$$\ln \left| \frac{x}{y} \right| + \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{1}{2} = c \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+).$$

Ezek a függvények a (2.1.64) differenciálegyenletnek is megoldásai. Ellenőrizhető, hogy (2.1.64) differenciálegyenletnek $\varphi \equiv 0$ $\mathcal{D}_\varphi = \mathbb{R}$ is megoldása. $\square$



2.15. ábra. Az $x^2 y^3 + y + (x^3 y^2 - x) y' = 0$ differenciálegyenlet megoldásai.

A (2.1.64) differenciálegyenlet megoldását szemlélteti a 2.15. ábra.

2.1.25. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$y \cdot (x^2 + 2y^2) dx + x \cdot (y^2 + 2x^2) dy = 0. \quad (2.1.67)$$

Megoldás. A differenciálegyenlet (2.1.45) alakú. Egyszerűen leolvasható, hogy

$$P(x, y) = y \cdot (x^2 + 2y^2) \quad \text{és} \quad Q(x, y) = x \cdot (y^2 + 2x^2).$$

¹⁹ A logaritmus mögött az abszolútértékkel elhagyható lenne, de a többi síknegyedre leszűkítve a problémát az abszolútértékes képlet ad egységes eredményt.

1. lépés. Egzaktság ellenőrzése. P, Q értelmezési tartománya $U = \mathbb{R}^2$, ami téglalap.

A P, Q függvények megfelelő parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} P'_y(x, y) &= x^2 + 2y^2 + y \cdot 4y = x^2 + 6y^2 \\ Q'_x(x, y) &= y^2 + 2x^2 + x \cdot 4x = y^2 + 6x^2, \end{aligned}$$

azaz a $P'_y(x, y) = Q'_x(x, y)$ feltétel nem teljesül, ezért multiplikátort keresünk. Mivel

$$P'_y(x, y) - Q'_x(x, y) = 5y^2 - 5x^2 = 5 \cdot \left(\frac{P(x, y)}{y} - \frac{Q(x, y)}{x} \right) = -\frac{5}{x}Q(x, y) - \left(-\frac{5}{y}\right)P(x, y)$$

alakra hozható (lásd (2.1.58)), ezért létezik $\mu(x, y) = g(x)h(y)$ ($\mu > 0$) típusú multiplikátor. Nevezetesen a

$$\mu(x, y) = e^{\int -\frac{5}{x}dx} \cdot e^{\int -\frac{5}{y}dy} = e^{-5 \ln |x|} \cdot e^{-5 \ln |y|} = \frac{1}{|x|^5 |y|^5} \stackrel{xy > 0}{=} \frac{1}{x^5 y^5}$$

egy alkalmas multiplikátor.²⁰ Ezért a (2.1.67) differenciálegyenletből a

$$(x^{-3}y^{-4} + 2x^{-5}y^{-2})dx + (x^{-4}y^{-3} + 2y^{-5}x^{-2})dy = 0 \quad (2.1.68)$$

egzakt differenciálegyenlethez jutunk, ahol

$$P_1(x, y) = x^{-3}y^{-4} + 2x^{-5}y^{-2} \quad \text{és} \quad Q_1(x, y) = x^{-4}y^{-3} + 2y^{-5}x^{-2}.$$

P_1, Q_1 értelmezési tartománya megváltozott, értelmezési tartományuk metszete a tengelyek nélküli sík, ami nem nyílt téglalap, ezért csak az első síknegyedben ($H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$) keressük a primitív függvényt..

2. lépés. Primitív függvény keresése. *Vonalintegrál segítségével* keresünk primitív függvényt. A g függvény primitív függvényét a (2.1.48) képlet alapján fogjuk meghatározni H tartomány bármelyik pontjából nézve. Kezdőpontnak a lehető legegyszerűbbet választjuk. Legyen például $a := (1, 1)$. Ekkor (2.1.48) alapján $g = (P_1, Q_1)$ primitív függvényére

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int_{a_1}^x P_1(t, a_2)dt + \int_{a_2}^y Q_1(x, t)dt = \int_1^x t^{-3}1^{-4} + 2t^{-5}1^{-2}dt + \int_1^y x^{-4}t^{-3} + 2t^{-5}x^{-2}dt = \\ &= \left[-\frac{1}{2t^2} - \frac{2}{4t^4} \right]_{t=1}^{t=x} + x^{-4} \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_{t=1}^{t=y} + x^{-2} \left[-\frac{2}{4t^4} \right]_{t=1}^{t=y} = \\ &= -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^4} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{x^4} \left(-\frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{x^2} \left(-\frac{1}{2y^4} + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2x^4y^2} - \frac{1}{2x^2y^4} \end{aligned}$$

adódik.

3. lépés. Differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározása. A 2.1.4. tétel alapján a (2.1.68) differenciálegyenlet általános megoldása implicit alakban:

$$1 - \frac{1}{2x^4y^2} - \frac{1}{2x^2y^4} = c \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+).$$

Ezek a függvények a (2.1.67) differenciálegyenletnek is megoldásai.²¹ Ellenőrizhető, hogy (2.1.67) differenciálegyenletnek $y \equiv 0$ is megoldása.

□

²⁰Mivel a multiplikátor jelen esetben xy -nak is függvénye, ezért a 3. módszerrel is meg lehetett volna találni a multiplikátort.

²¹Ugyanezen függvények adódnak, ha valamelyik másik síknegyedre szűkítjük le az értelmezési tartományt.

2.1.3.3. Feladatok

2.1.3. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egzakt vagy egzakttá tehető differenciálegyenleteket:

$$i) \quad e^y dx + (x \cdot e^y - 2y) dy = 0; \quad \text{Útmutatás} \quad \text{Megoldás}$$

$$ii) \quad \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \cos x \cdot \sin y \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sin x \cdot \cos y \right) dy = 0; \quad \text{Útmutatás} \quad \text{Megoldás}$$

$$iii) \quad (x^2 + y) dx - x dy = 0; \quad \text{Útmutatás} \quad \text{Megoldás}$$

$$iv) \quad e^y (y dx - dy) = e^x (x dy - dx); \quad \text{Útmutatás} \quad \text{Megoldás}$$

$$v) \quad (3xy + 2y^2) dx + (3xy + 2x^2) dy = 0. \quad \text{Útmutatás} \quad \text{Megoldás}$$

2.2. Másodrendű differenciálegyenletek

Legyen $G \in \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, és keressünk olyan $\varphi \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in D^2$ függvényt, amelyre $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum, bármely $x \in \mathcal{D}_\varphi$ pontra az $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x))$ vektor $\mathcal{D}_G$ -beli és

$$G(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) = 0. \quad (2.2.1)$$

A most megfogalmazott feladatot **implicit másodrendű közönséges differenciálegyenlet-nek** nevezzük. A másodrendű differenciálegyenletek megoldására általános módszer nem ismert. Bizonyos speciális alakú differenciálegyenletek esetén viszont tudunk megoldási eljárást adni, ezek közül néhányat ismertetünk ebben a fejezetben.

2.2.1. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Hiányos másodrendű differenciálegyenletről akkor beszélünk, amikor (2.2.1) differenciálegyenletben szereplő G függvény nem függ legalább az egyik változótól. Ezekben az esetekben két elsőrendű differenciálegyenlet egymásutáni megoldásával kapjuk a másodrendű differenciálegyenlet megoldását.

2.2.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a (2.2.1) másodrendű d.e. **hiányos**, ha egy alkalmas $H \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvénnel

$$G(x, y, z, v) = H(x, z, v) \quad (y \in \mathbb{R}, (x, z, v) \in \mathcal{D}_H),$$

vagy

$$G(x, y, z, v) = H(y, z, v) \quad (x \in \mathbb{R}, (y, z, v) \in \mathcal{D}_H).$$

Az első esetben a φ megoldásra

$$H(x, \varphi'(x), \varphi''(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi), \quad (2.2.2)$$

a második esetben

$$H(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi), \quad (2.2.3)$$

teljesül.

Bevezetve a $\phi := \varphi$ függvényt, (2.2.2)-ből ϕ függvényre a

$$H(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\phi = \mathcal{D}_\varphi)$$

implicit elsőrendű közönséges d.e.-et kapjuk. A korábbi ismereteink alapján ezt sok esetben meg tudjuk oldani, amiből φ már meghatározható.

A (2.2.3) esetben tegyük fel, hogy $\varphi'(x) \neq 0$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$), ekkor φ invertálható és $\varphi^{-1} \in D$. Legyen $\psi := \varphi' \circ \varphi^{-1}$, így

$$\psi' = (\varphi' \circ \varphi^{-1})' = \varphi'' \circ \varphi^{-1} \cdot (\varphi^{-1})' = \varphi'' \circ \varphi^{-1} \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}},$$

azaz

$$\varphi'' \circ \varphi^{-1} = \psi' \varphi' \circ \varphi^{-1}$$

A (2.2.3)-ból az $x := \varphi^{-1}(t)$ ($t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}$) helyettesítéssel a

$$H(t, \psi(t), \psi'(t)\psi(t)) = 0 \quad (t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}), \quad (2.2.4)$$

(implicit) elsőrendű közönséges d.e.-et kapjuk. A megoldás ismeretében a φ függvény a $\varphi' = \psi \circ \varphi$ elsőrendű explicit közönséges d.e.-ből számítható ki.

2.2.1. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$\varphi^3 \varphi'' = 1. \quad (2.2.5)$$

Megoldás. A differenciálegyenlet hiányos, (2.2.3) típusú. Tegyük fel, hogy $\varphi'(x) \neq 0$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$). Ekkor φ' folytonossága miatt φ' állandó előjelű, így φ szigorúan monoton, és ezért φ invertálható, továbbá $\varphi^{-1} \in D$. Legyen $\psi := \varphi' \circ \varphi^{-1}$, és hajtsuk végre az $x := \varphi^{-1}(t)$ ($t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}$) helyettesítést. Ekkor (2.2.4) alapján (2.2.5) d.e.

$$t^3 \psi' \psi = 1 \quad (2.2.6)$$

alakba írható, ahol $\psi > 0$, vagy $\psi < 0$. A megoldást $t > 0$, illetve $t < 0$ esetben keressük. A (4.0.22) egyenlet szeparábilis. Beírva a $\psi' = \frac{d\psi}{dt}$ jelölést, rendezve és integrálva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \psi d\psi &= \frac{1}{t^3} dt & / \int \\ \int \psi d\psi &= \int \frac{1}{t^3} dt \\ \frac{\psi^2}{2} &= -\frac{1}{2t^2} + c_1 & (c_1 \in \mathbb{R}) \quad / \cdot 2, \sqrt{\cdot} \end{aligned}$$

$$|\psi(t)| = \sqrt{\frac{2c_1 t^2 - 1}{t^2}} \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+, t \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2c_1}}), \text{ vagy } t \in (\frac{1}{\sqrt{2c_1}}, \infty)).$$

Visszaírva a $\psi := \varphi' \circ \varphi^{-1}$, $t = \varphi(x)$ helyettesítést kapjuk, hogy

$$|\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(x)))| = \sqrt{\frac{2c_1 \varphi^2(x) - 1}{\varphi^2(x)}} \Rightarrow |\varphi'(x)| = \sqrt{\frac{2c_1 \varphi^2(x) - 1}{\varphi^2(x)}} \quad (2.2.7)$$

azon $I_1 \subseteq \mathbb{R}$, $I_2 \subseteq \mathbb{R}$ intervallumokon, melyekre

$$\varphi(x) \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2c_1}}) \quad (x \in I_1) \quad \text{és} \quad \varphi(x) \in (\frac{1}{\sqrt{2c_1}}, \infty) \quad (x \in I_2) \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+).$$

A (2.2.7) differenciálegyenlet szintén szétválasztható változójú. Beírva a $\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}$ jelölést, rendezve kapjuk $\varphi' > 0, \varphi > 0$ esetben, hogy

$$\frac{\varphi}{\sqrt{2c_1\varphi^2-1}}d\varphi = dx \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+).$$

Mindkét oldalt integrálva a d.e. megoldását kapjuk:

$$\begin{aligned} \int \frac{\varphi}{\sqrt{2c_1\varphi^2-1}}d\varphi &= \int dx & /t = 2c_1\varphi^2-1, \quad dt = 4c_1\varphi d\varphi \\ \frac{1}{4c_1} \int \frac{1}{\sqrt{t}}dt &= x + c_2 & (c_2 \in \mathbb{R}) \\ \frac{1}{4c_1} 2\sqrt{t} &= x + c_2 \\ \frac{1}{2c_1} \sqrt{2c_1\varphi^2-1} &= x + c_2 & (c_1 \in \mathbb{R}^+, c_2 \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

ahonnan rendezéssel φ meghatározható:

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{(2c_1x + 2c_1c_2)^2 + 1}{2c_1}} \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+, c_2 \in \mathbb{R}, x \in (-c_2, \infty)).$$

A $\varphi' < 0, \varphi < 0$ esetben a

$$\varphi_2(x) = -\sqrt{\frac{(2c_1x + 2c_1c_2)^2 + 1}{2c_1}} \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+, c_2 \in \mathbb{R}, x \in (-c_2, \infty))$$

megoldás adódik. Még további két eset van vissza, melynek meggondolását az olvasóra bízunk. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a megoldások „összeragaszthatók”, azaz a φ_1, φ_2 értelmezési tartománya kiterjeszthető a valós számok halmazára. $\square$

2.2.2. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$1 + (\varphi')^2 = 2\varphi\varphi''. \quad (2.2.8)$$

Megoldás. A differenciálegyenlet hiányos, (2.2.3) típusú. Tegyük fel, hogy $\varphi'(x) \neq 0$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$). Ekkor φ' folytonossága miatt φ' állandó előjelű, így φ szigorúan monoton, és ezért φ invertálható, továbbá $\varphi^{-1} \in D$. Legyen $\psi := \varphi' \circ \varphi^{-1}$, és hajtsuk végre az $x := \varphi^{-1}(t)$ ($t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}$) helyettesítést. Ekkor (2.2.4) alapján (2.2.8) d.e.

$$1 + \psi^2(t) = 2t\psi'(t)\psi(t) \quad (2.2.9)$$

alakba írható, ahol $\psi > 0$, vagy $\psi < 0$. A (2.2.9) egyenlet szeparábilis. Beírva a $\psi' = \frac{d\psi}{dt}$ jelölést, rendezve és integrálva kapjuk, hogy

$$\frac{dt}{t} = \frac{2\psi d\psi}{1+\psi^2} \Rightarrow \int \frac{dt}{t} = \int \frac{2\psi d\psi}{1+\psi^2} \xrightarrow{(1+\psi^2)'=2\psi} \ln|t| = \ln|1+\psi^2| + \bar{c}_1 \quad (\bar{c}_1 \in \mathbb{R})$$

Mindkét oldalt e -ad alapra emelve kapjuk, hogy

$$|t| = |1+\psi^2| \cdot e^{\bar{c}_1} \quad (\bar{c}_1 \in \mathbb{R}) \quad \xrightarrow{c_1 := e^{\bar{c}_1}} |t| = c_1 \cdot (1+\psi^2) \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+),$$

melyből rendezéssel a

$$|\psi(t)| = \sqrt{\frac{|t|}{c_1} - 1} \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+, t \in (-\infty, -c_1) \text{ vagy } t \in (c_1, \infty))$$

megoldás adódik.

Visszaírva a $\psi := \varphi' \circ \varphi^{-1}$, $t = \varphi(x)$ helyettesítést kapjuk, hogy

$$|\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(x)))| = \sqrt{\frac{|\varphi(x)|}{c_1} - 1} \Rightarrow |\varphi'(x)| = \sqrt{\frac{|\varphi(x)|}{c_1} - 1} \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+) \quad (2.2.10)$$

azon $I_1 \subseteq \mathbb{R}$, $I_2 \subseteq \mathbb{R}$ intervallumokon, melyekre

$$\varphi(x) \in (-\infty, -c_1) \quad (x \in I_1) \quad \text{és} \quad \varphi(x) \in (c_1, \infty) \quad (x \in I_2) \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+).$$

A (2.2.10) differenciálegyenlet szintén szétválasztható változójú. Beírva a $\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}$ jelölést, rendezve kapjuk $\varphi' > 0$, $\varphi > 0$ esetben, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\varphi}{c_1} - 1}} d\varphi = dx \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+).$$

Mindkét oldalt integrálva a differenciálegyenletünk megoldása adódik:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{\varphi}{c_1} - 1}} d\varphi &= \int dx \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+) \\ 2c_1 \sqrt{\frac{\varphi}{c_1} - 1} &= x + c_2 \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+, c_2 \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

ahonnan rendezéssel φ meghatározható:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x + c_2)^2}{4c_1} + c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+, c_2 \in \mathbb{R}, x \in (-c_2, \infty)).$$

A $\varphi' < 0$, $\varphi < 0$ esetben a

$$\varphi_2(x) = -\frac{(x + c_2)^2}{4c_1} - c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+, c_2 \in \mathbb{R}, x \in (-c_2, \infty))$$

megoldás adódik. Még további két eset van vissza, melynek meggondolását az olvasóra bízunk. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a megoldások „összeragaszthatók”, azaz a φ_1 , φ_2 értelmezési tartománya kiterjeszthető a valós számok halmazára. $\square$

2.2.3. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$(1 - x^2)\varphi''(x) + x\varphi'(x) = 0 \quad (x \in (-1, 1)). \quad (2.2.11)$$

Megoldás. A differenciálegyenlet hiányos, (2.2.2) típusú. Végrehajtjuk a $\varphi' = \phi$ helyettesítést:

$$(1 - x^2)\phi'(x) + x\phi(x) = 0 \Leftrightarrow \phi'(x) + \frac{x}{(1 - x^2)}\phi(x) = 0 \quad (x \in (-1, 1)).$$

Ez a differenciálegyenlet elsőrendű homogén, lineáris. A 2.1.2. tétel alapján általános megoldása

$$\phi(x) = c_1 \cdot e^{-\int \frac{x}{(1-x^2)} dx} = c_1 \cdot e^{\frac{1}{2} \ln |1-x^2|} = c_1 \sqrt{1-x^2} \quad (c_1 \in \mathbb{R}, x \in (-1,1)).$$

Visszaírva a $\varphi' = \phi$ helyettesítést, a

$$\varphi'(x) = c_1 \sqrt{1-x^2} \quad (c_1 \in \mathbb{R}, x \in (-1,1))$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapjuk. Integrálással a differenciálegyenletünk általános megoldása adódik:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{\substack{x=\sin t & dx=\cos t dt \\ (t \in (-\pi/2, \pi/2))}} c_1 \sqrt{1-x^2} dx = c_1 \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t > 0} \cos t dt = c_1 \int \cos^2 t dt = c_1 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \\ &= c_1 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) = c_1 \left(\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \right) + c_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in (-1,1)). \end{aligned}$$

□

2.2.1.1. Feladatok

2.2.1. Feladat. Oldjuk meg az alábbi hiányos másodrendű differenciálegyenleteket:

- | | | |
|---|------------------|-----------------|
| i) $\varphi'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1,1));$ | Útmutatás | Megoldás |
| ii) $2\varphi\varphi'' + (\varphi')^2 + (\varphi')^4 = 0;$ | Útmutatás | Megoldás |
| iii) $\varphi + \varphi'' = 0;$ | Útmutatás | Megoldás |
| iv) $(x \cdot \ln x) \cdot \varphi'' - \varphi' = 0.$ | Útmutatás | Megoldás |

2.2.2. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

2.2.2. Definíció. Legyenek $p_1, p_0, q: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) intervallumon értelmezett folytonos függvények. Keressünk olyan $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in D^2$ függvényeket, melyekre a

$$\varphi''(x) + p_1(x)\varphi'(x) + p_0(x)\varphi(x) = q(x) \quad (x \in I) \quad (2.2.12)$$

teljesül. A (2.2.12) alakú egyenletet **másodrendű lineáris differenciálegyenletnek** nevezzük.

- Ha $q \equiv 0$, akkor **homogén lineáris differenciálegyenletről**,
- ha $q \not\equiv 0$, akkor **inhomogén lineáris differenciálegyenletről**

beszélünk.²²

²²Rövidebb írásmód: $\varphi'' + p_1\varphi' + p_0\varphi = q$

A (2.2.12) egyenlettel kapcsolatban a

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_1 \quad (2.2.13)$$

kezdeti feltételeket szokás kikötni, ahol $x_0 \in I$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ adott számok. Lineáris egyenletekkel kapcsolatban bebizonyítható az alábbi egzisztencia és unicitási tétel, melynek bizonyítása megtalálható a [3] és [6] könyvekben:

2.2.1. Tétel. *Bármely (2.2.13) kezdeti feltétel esetén egyetlen olyan $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény létezik, amely megoldása a (2.2.12) d.e.-nek és eleget tesz a (2.2.13) kezdeti feltételnek.*

Megjegyezzük, hogy az elsőrendű lineáris egyenlethez hasonlóan minden teljes megoldás az I intervallumon van értelmezve.

A homogén lineáris differenciálegyenlet

Az elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenlet egy speciális szétválasztható változójú differenciálegyenlet, ezért könnyen meg tudjuk határozni általános megoldását. Másodrendű esetben általában nem tudjuk visszavezetni korábban már megoldott differenciálegyenlet-típusra a homogén egyenletet. Felmerül tehát a kérdés, hogy van-e a differenciálegyenletnek megoldása? És ha van, akkor hogyan tudjuk előállítani az általános megoldást.

Ha találunk két megoldást, akkor végtelen sok megoldást elő tudunk állítani. Igaz ugyanis a következő tétel:

2.2.2. Tétel. *Ha φ_1 és φ_2 megoldása a*

$$\varphi''(x) + p_1(x)\varphi'(x) + p_0(x)\varphi(x) = 0 \quad (x \in I) \quad (2.2.14)$$

másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek, akkor minden $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ valós szám esetén a

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$$

függvény is megoldása a (2.2.14) egyenletnek.

Bizonyítás. Belátjuk, hogy φ -re teljesül (2.2.14). Mivel φ_1, φ_2 kétszer differenciálható függvények, ezért lineáris kombinációjuk is az, és

$$\varphi' = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)' = c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2' \quad \varphi'' = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)'' = c_1\varphi_1'' + c_2\varphi_2''.$$

Továbbá felhasználva, hogy φ_1 és φ_2 is a homogén egyenletnek megoldása, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \varphi'' + p_1\varphi' + p_0\varphi &= c_1\varphi_1'' + c_2\varphi_2'' + p_1(c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2') + p_0(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = \\ &= c_1 \underbrace{(\varphi_1'' + p_1\varphi_1' + p_0\varphi_1)}_{=0} + c_2 \underbrace{(\varphi_2'' + p_1\varphi_2' + p_0\varphi_2)}_{=0} = 0, \end{aligned}$$

amivel az állításunkat bebizonyítottuk. □

Az előző tétel felveti a kérdést, hogy vajon a differenciálegyenlet összes megoldása előáll-e ilyen alakban? Ennek a kérdésnek a megválaszolása előtt néhány új fogalmat és vele kapcsolatos néhány tételt kell megfogalmaznunk.

2.2.3. Definíció. *Az $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum) függvények **lineárisan függetlenek** I -n, ha léteznek $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ konstansok, melyekre*

$$c_1f(x) + c_2g(x) = 0 \quad (x \in I).$$

2.2.4. Definíció. Az $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum) függvények **lineárisan függetlenek** I -n, ha nem lineárisan függők, azaz csak $c_1 = c_2 = 0$ konstansok esetén teljesül a

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0 \quad (x \in I)$$

azonosság.

A valós számok halmazán lineárisan független függvények például a különböző kitevőjű hatványfüggvények. Legyen például $f(x) = x$, $g(x) = x^2$. A

$$c_1 x + c_2 x^2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

feltétel bal oldala egy polinom, melynek fokszáma maximum kettő, és végtelen sok megoldása van. Ez csak úgy lehetséges, ha a bal oldal a zéruspolinom.

A valós számok halmazán lineárisan függő függvények például az

$$f(x) = 4x \quad g(x) = 12x,$$

ugyanis

$$3f(x) - g(x) = 0$$

egyenlőség teljesül minden valós x esetén.

2.2.5. Definíció. A $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum) differenciálható függvények **Wronski determinánsának nevezzük** a

$$W(\varphi_1, \varphi_2) := \det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix} = \varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1'$$

függvényt.

2.2.3. Tétel. Ha $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum) differenciálható függvények lineárisan függők I -n, akkor a Wronski-determinánsuk mindenütt nulla az I intervallumon.

Bizonyítás. Mivel φ_1, φ_2 lineárisan függők, ezért léteznek $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ konstansok, melyekre

$$c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) = 0 \quad (x \in I).$$

Mindkét oldalt deriválva kapjuk, hogy

$$c_1 \varphi_1'(x) + c_2 \varphi_2'(x) = 0 \quad (x \in I).$$

Az első egyenletet $\varphi_2'(x)$ -szel, a másodikat $\varphi_2(x)$ -szel beszorozva, egymásból kivonva kapjuk, hogy

$$c_1(\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x)) = 0 \Rightarrow c_1 \cdot W(\varphi_1, \varphi_2)(x) = 0 \quad (x \in I),$$

míg az első egyenletet $\varphi_1'(x)$ -szel, a másodikat $\varphi_1(x)$ -szel beszorozva, egymásból kivonva kapjuk, hogy

$$c_2(\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x)) = 0 \Rightarrow c_2 \cdot W(\varphi_1, \varphi_2)(x) = 0 \quad (x \in I),$$

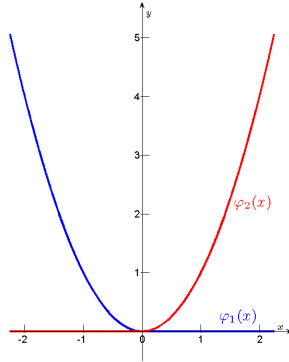
ami a $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ feltétel miatt csak úgy teljesülhet, ha $W(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ I -n. □

Felmerül a kérdés, hogy a Wronski-determináns alkalmas-e lineáris függetlenség vizsgálatára, azaz, hogy a fenti tétel megfordítható-e? A válasz általában nem. Ha ugyanis a két függvény tartója diszjunkt, azaz például (lásd a 2.16. ábrát)

$$\varphi_1(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x < 0; \\ 0, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \quad \varphi_2(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0; \\ x^2, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$$

akkor a két függvény Wronski-determinánsa nulla, holott lineárisan függetlenek.

Érvényes azonban a következő



2.16. ábra. A két függvény Wronski-determinánsa nulla és lineárisan függetlenek.

2.2.4. Tétel. Ha a $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum) differenciálható függvények Wronski-determinánsa nulla, azaz $W(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ I -n, akkor létezik $J \subseteq I$ $J \neq \emptyset$ intervallum, melyen φ_1 és φ_2 lineárisan függő.

Bizonyítás. Ha $\varphi_2 \equiv 0$ I -n, akkor az egész I intervallumon lineárisan függő φ_1 és φ_2 .

Ha $\varphi_2 \not\equiv 0$ I -n, akkor létezik $x_0 \in I$, melyre $\varphi_2(x_0) \neq 0$. Mivel φ_2 differenciálható x_0 -ban, ezért ott folytonos is. Létezik tehát x_0 -nak egy egész környezete, ahol φ_2 nem nulla. Jelöljük ezt a környezetet J -vel.

A φ_2 függvény nem nulla J -n, ezért az $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ függvény értelmezett és differenciálható J -n. Deriváltja

$$\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)' = \frac{\varphi_1' \varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2'}{\varphi_2^2} = -\frac{W(\varphi_1, \varphi_2)}{\varphi_2^2} = 0$$

J -n. Ha egy intervallumon értelmezett függvény deriváltja nulla, akkor a függvény konstans, tehát létezik $c \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = c \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 - c \cdot \varphi_2 = 0$$

J -n, azaz a két függvény lineárisan függ J -n. □

Ezzel beláttuk, hogy ha a teljes intervallumon nem is, de legalább egy részintervallumon teljesül a függőség. Tekintsük a (2.2.14) homogén differenciálegyenlet két megoldását. Kiszámoljuk a két megoldás Wronski-determinánsát:

2.2.5. Tétel (Liouville-tétele). Ha φ_1, φ_2 megoldásai a (2.2.14) differenciálegyenletnek, akkor

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(x) = W_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt},$$

ahol $x_0 \in I$ tetszőleges és $W_0 = W(\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0))$.

Bizonyítás. Mivel φ_1 és φ_2 is megoldása (2.2.14)-nak, ezért

$$\begin{aligned} \varphi_1'' + p_1 \varphi_1' + p_0 \varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2'' + p_1 \varphi_2' + p_0 \varphi_2 &= 0 \end{aligned}$$

teljesül I -n. Az első egyenletet φ_2 -vel, a másodikat φ_1 -gyel szorozva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \varphi_1'' \varphi_2 + p_1 \varphi_1' \varphi_2 + p_0 \varphi_1 \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_1 \varphi_2'' + p_1 \varphi_1 \varphi_2' + p_0 \varphi_1 \varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Az alsó egyenletből kivonva a felsőt, a

$$\varphi_1\varphi_2'' - \varphi_1''\varphi_2 + p_1(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2) = 0 \quad (2.2.15)$$

egyenlethez jutunk. A zárójelben $W(\varphi_1, \varphi_2)$ szerepel. Mivel φ_1, φ_2 kétszer differenciálható függvények, ezért $W(\varphi_1, \varphi_2)$ is differenciálható, és

$$(W(\varphi_1, \varphi_2))' = (\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2)' = \varphi_1'\varphi_2' + \varphi_1\varphi_2'' - \varphi_1''\varphi_2 - \varphi_1'\varphi_2' = \varphi_1\varphi_2'' - \varphi_1''\varphi_2.$$

Az eredményt összevetve (2.2.15)-vel W -re elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenletet kapunk:

$$(W(\varphi_1, \varphi_2))' + p_1W(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Vezessük be a rövidebb $W := W(\varphi_1, \varphi_2)$ jelölést. A W -re vonatkozó egyenlet homogén lineáris. Az általános megoldás tehát 2.1.2. tétel alapján, ha $x_0 \in I$ tetszőleges pont,

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(x) = W(x) = c \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} \quad (c \in \mathbb{R}, x \in I)$$

alakba írható. Behelyettesítéssel $W(x_0) = c$ adódik, amivel az állítást bebizonyítottuk. □

A fenti előállításnak van egy nagyon fontos következménye. Nevezetesen,

2.2.1. Következmény. *Ha φ_1, φ_2 megoldásai (2.2.14) differenciálegyenletnek, akkor a Wronski-determinánsuk vagy azonosan nulla, vagy egy pontban sem nulla.*

A (2.2.14) differenciálegyenlet megoldásainak lineáris függetlenségét a Wronski-determinánssal vizsgálhatjuk, érvényes ugyanis a következő tétel:

2.2.6. Tétel. *Ha φ_1, φ_2 megoldásai a (2.2.14) differenciálegyenletnek, akkor*

- φ_1, φ_2 pontosan akkor lineárisan függő, ha $W \equiv 0$,
- φ_1, φ_2 pontosan akkor lineárisan független, ha létezik $x_0 \in I$, melyre $W(x_0) \neq 0$.

Bizonyítás. Ha a Wronski determináns valamely x_0 pontban nulla, akkor a 2.2.1. következmény miatt az egész I intervallumon nulla, tehát a tétel két állítása egymással ekvivalens.

Azt már beláttuk, hogy ha lineárisan függő két tetszőleges differenciálható függvény, akkor Wronski-determinánsuk nulla.

Tegyük fel, hogy $W(\varphi_1, \varphi_2)(x_0) = 0$ valamely $x_0 \in I$ pontra. Ekkor a

$$\begin{cases} 0 &= c_1\varphi_1(x_0) + c_2\varphi_2(x_0), \\ 0 &= c_1\varphi_1'(x_0) + c_2\varphi_2'(x_0), \end{cases} \quad (2.2.16)$$

c_1, c_2 -re vonatkozó lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, hiszen az egyenletrendszer determinánsa a Wronski-féle determináns. Tehát léteznek $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ konstansok, melyekre (2.2.16) teljesül. A 2.2.2. tétel alapján a φ_1, φ_2 függvények ezekkel a konstansokkal vett lineáris kombinációja,

$$\varphi(x) := c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) \quad (x \in I)$$

is megoldása a (2.2.14) differenciálegyenletnek. A (2.2.16) egyenletrendszer teljesülése miatt φ -re a

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$$

kezdetiérték-feltételek is teljesülnek. A (2.2.14) differenciálegyenletnek ezeket a feltételeket is kielégítő megoldása a $\varphi \equiv 0$ megoldás. A 2.2.1. tétel alapján a k.é.p.-nak nincs több megoldása, tehát

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = 0 \quad (x \in I),$$

azaz a függvények valóban lineárisan függők az I intervallumon. $\square$

2.2.6. Definíció. Ha φ_1, φ_2 két lineárisan független megoldása a (2.2.14) differenciálegyenletnek, akkor az $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ függvényrendszert **alapszisztemnek** nevezzük.

Alapszisztemeket a 2.2.1. tétel alapján szerkeszthetünk. Legyen ui. φ_1 a homogén d.e.-nek a

$$\varphi_1(x_0) = 1, \quad \varphi_1'(x_0) = 0$$

kezdeti feltételt kielégítő megoldása, φ_2 a homogén d.e.-nek a

$$\varphi_2(x_0) = 0, \quad \varphi_2'(x_0) = 1$$

kezdeti feltételt kielégítő megoldása valamely $x_0 \in I$ pontra. Ekkor $W(\varphi_1, \varphi_2)(x_0) = 1$, következésképpen a szóban forgó megoldások lineárisan függetlenek.

A későbbiekben két speciális esetben keresünk alapszisztemet a 2.2.1. tétel alkalmazása nélkül is.

Belátjuk, hogy az alapszisztem segítségével a homogén lineáris differenciálegyenlet összes megoldása előállítható.²³

2.2.7. Tétel. Ha $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ alapszisztere (2.2.14)-nak, akkor az összes megoldás előáll

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

alakban.

1. Bizonyítás. Legyen φ a homogén egyenlet egy megoldása és $x_0 \in I$. A c_1, c_2 ismeretlenekre vonatkozó

$$\left. \begin{aligned} c_1\varphi_1(x_0) + c_2\varphi_2(x_0) &= \varphi(x_0) \\ c_1\varphi_1'(x_0) + c_2\varphi_2'(x_0) &= \varphi'(x_0) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.17)$$

lineáris egyenletrendszer determinánsa $W(\varphi_1, \varphi_2)(x_0) \neq 0$, következésképpen az egyenletrendszernek van megoldása. Ezekkel az együtthatókkal képezzük a

$$\psi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) \quad (x \in I)$$

függvényt. Ekkor a ψ is megoldása a homogén egyenletnek és (2.2.17) alapján eleget tesz a

$$\psi(x_0) = \varphi(x_0), \quad \psi'(x_0) = \varphi'(x_0)$$

kezdeti feltételeknek. A k.é.p. megoldásának egyértelműsége alapján $\varphi(x) = \psi(x)$ ($x \in I$). $\square$

2. Bizonyítás. Legyen φ a (2.2.14) differenciálegyenlet egy tetszőleges megoldása. Keresünk olyan c_1, c_2 valós számokat, melyekre

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$$

²³A tételnek két bizonyítását is bemutatjuk. A rövidebbik bizonyításban kihasználjuk az általunk nem bizonyított 2.2.1. tételt, majd közvetlenül is belátjuk az állítást.

teljesül.

Legyenek $z_1, z_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, melyek a következő egyenletrendszer megoldásai:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= z_1(x) \cdot \varphi_1(x) + z_2(x) \cdot \varphi_2(x) \\ \varphi'(x) &= z_1(x) \cdot \varphi_1'(x) + z_2(x) \cdot \varphi_2'(x) \end{aligned} \right\} \quad (x \in I)$$

A fenti lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixának determinánsa a φ_1, φ_2 függvények Wronski-determinánsa, ami nem nulla, hiszen lineárisan függetlenek, ezért a lineáris egyenletrendszernek létezik megoldása. Mivel z_1, z_2 a φ_1, φ_2 függvények és deriváltjainak lineáris kombinációja, ezért mindkettő differenciálható.

Az első egyenlet deriválásából

$$\varphi'(x) = z_1'(x) \cdot \varphi_1(x) + z_1(x) \cdot \varphi_1'(x) + z_2'(x) \cdot \varphi_2(x) + z_2(x) \cdot \varphi_2'(x) \quad (x \in I)$$

adódik. Ezt összevetve a második egyenlettel, a

$$0 = z_1'(x) \cdot \varphi_1(x) + z_2'(x) \cdot \varphi_2(x) \quad (2.2.18)$$

feltételt kapjuk. A második egyenlet deriválásával kapjuk, hogy

$$\varphi''(x) = z_1'(x) \cdot \varphi_1'(x) + z_1(x) \cdot \varphi_1''(x) + z_2'(x) \cdot \varphi_2'(x) + z_2(x) \cdot \varphi_2''(x) \quad (x \in I).$$

Mivel φ a (2.2.14) differenciálegyenlet megoldása, ezért ²⁴

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{z_1' \cdot \varphi_1' + z_1 \cdot \varphi_1'' + z_2' \cdot \varphi_2' + z_2 \cdot \varphi_2''}_{\varphi''} + p_1 \cdot \underbrace{(z_1 \cdot \varphi_1' + z_2 \cdot \varphi_2')}_{\varphi'} + p_0 \cdot \underbrace{(z_1 \cdot \varphi_1 + z_2 \cdot \varphi_2)}_{\varphi} \\ &= z_1' \cdot \varphi_1' + z_2' \cdot \varphi_2' + z_1 \cdot \underbrace{(\varphi_1'' + p_1 \varphi_1' + p_0 \varphi_1)}_{=0} + z_2 \cdot \underbrace{(\varphi_2'' + p_1 \varphi_2' + p_0 \varphi_2)}_{=0} = \\ &= z_1' \cdot \varphi_1' + z_2' \cdot \varphi_2'. \end{aligned}$$

Az itt kapott feltételt összevetve a (2.2.18) feltétellel egy homogén lineáris egyenletrendszert kapunk:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= z_1'(x) \cdot \varphi_1(x) + z_2'(x) \cdot \varphi_2(x) \\ 0 &= z_1'(x) \cdot \varphi_1'(x) + z_2'(x) \cdot \varphi_2'(x), \end{aligned} \right\} \quad (x \in I)$$

melynek csak triviális megoldása van, azaz $z_1'(x) = z_2'(x) = 0$ ($x \in I$). Ebből következik, hogy léteznek $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok, melyre $z_1 \equiv c_1$, $z_2 \equiv c_2$ I -n. Ezáltal φ -t előállítottuk φ_1 és φ_2 lineáris kombinációjaként, amivel a tételünket bebizonyítottuk. $\square$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy elegendő a homogén lineáris differenciálegyenletnek két lineárisan független megoldását megtalálni. Az alaprendszer előállítását két esetben fogjuk a későbbiekben megmutatni. Előtte módszert adunk az inhomogén egyenlet megoldására.

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet

Az elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összegeként állítottuk elő, a partikuláris megoldást pedig a homogén egyenlet megoldásából az ún. konstans variálás módszerével kaptuk. Másodrendű esetben is érvényben marad ez a módszer.

²⁴A túl hosszú formulák elkerülése végett a függvények argumentumának leírásától eltekintünk.

2.2.8. Tétel. A (2.2.12) inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása előáll a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként:

$$\varphi_{ih}^a(x) = \varphi_h^a(x) + \varphi_{ih}^p(x) \quad (x \in I). \quad (2.2.19)$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy ha φ_0 az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása ($\varphi_0'' + p_1(x)\varphi_0' + p_0(x)\varphi_0 = q(x)$), v a homogén egyenlet általános megoldása ($v'' + p_1(x)v' + p_0(x)v = 0$), akkor a két megoldás összege

$$\varphi := \varphi_0 + v$$

megoldása az inhomogén egyenletnek:

$$\begin{aligned} \varphi'' + p_1(x)\varphi' + p_0(x)\varphi &= (\varphi_0 + v)'' + p_1(x)(\varphi_0 + v)' + p_0(x)(\varphi_0 + v) \\ &= \varphi_0'' + v'' + p_1(x)\varphi_0' + p_1(x)v' + p_0(x)\varphi_0 + p_0(x)v \\ &= \underbrace{\varphi_0'' + p_1(x)\varphi_0' + p_0(x)\varphi_0}_{q(x)} + \underbrace{(v'' + p_1(x)v' + p_0(x)v)}_0 = q(x) \quad (x \in I) \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy φ valóban megoldása az inhomogén egyenletnek.

Már csak azt kell belátni, hogy az inhomogén egyenlet minden megoldása előáll-e ilyen alakban. Ennek igazolásához jelöljük φ -vel az inhomogén egyenlet általános, φ_0 -lal egy partikuláris megoldását:

$$\varphi'' + p_1(x)\varphi' + p_0(x)\varphi = q(x) \quad \text{és} \quad \varphi_0'' + p_1(x)\varphi_0' + p_0(x)\varphi_0 = q(x).$$

Legyen továbbá $v := \varphi - \varphi_0$. Belátjuk, hogy v a homogén egyenlet megoldása.

$$\begin{aligned} v'' + p_1(x)v' + p_0(x)v &= (\varphi - \varphi_0)'' + p_1(x)(\varphi - \varphi_0)' + p_0(x)(\varphi - \varphi_0) = \\ &= \varphi'' - \varphi_0'' + p_1(x)\varphi' - p_1(x)\varphi_0' + p_0(x)\varphi - p_0(x)\varphi_0 = \\ &= \underbrace{(\varphi'' + p_1(x)\varphi' + p_0(x)\varphi)}_{q(x)} - \underbrace{(\varphi_0'' + p_1(x)\varphi_0' + p_0(x)\varphi_0)}_{q(x)} = 0, \end{aligned}$$

amivel az állításunkat bebizonyítottuk. $\square$

Tehát az elsőrendű differenciálegyenlethez hasonlóan elegendő az inhomogén egyenletnek egy partikuláris megoldását megkeresni. A partikuláris megoldást ismét a konstans variálás módszerével keressük meg. Belátjuk, hogy az inhomogén egyenletnek létezik

$$\varphi_0(x) := \varphi_{ih}^p(x) = c_1(x) \cdot \varphi_1(x) + c_2(x) \cdot \varphi_2(x) \quad (x \in I) \quad (2.2.20)$$

alakú megoldása, ahol $c_1, c_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ a (2.2.14) homogén egyenlet alaprendszer. Keressük tehát azokat a c_1, c_2 függvényeket, mellyel φ_0 -ra teljesül (2.2.12). A szorzatfüggvény differenciálási szabálya alapján kapjuk, hogy

$$\varphi_0' = c_1' \cdot \varphi_1 + c_1 \cdot \varphi_1' + c_2' \cdot \varphi_2 + c_2 \cdot \varphi_2' \quad (2.2.21)$$

I -n. A c_1 és c_2 ismeretlen függvényekre azon kívül, hogy φ_0 kielégíti az inhomogén d.e.-et, egy további feltételt is szabhatunk. Nevezetesen tegyük fel, hogy

$$c_1' \cdot \varphi_1 + c_2' \cdot \varphi_2 = 0 \quad (2.2.22)$$

teljesül.²⁵

²⁵Elegendő egyetlen c_1, c_2 függvényt párt meghatároznunk, tehát tehetünk megkötéseket c_1, c_2 -re.

(2.2.21)-ből (2.2.22) felhasználásával és deriválással kapjuk, hogy

$$\varphi_0'' = c_1' \cdot \varphi_1' + c_1 \cdot \varphi_1'' + c_2' \cdot \varphi_2' + c_2 \cdot \varphi_2'' \quad (2.2.23)$$

I -n.

Behelyettesítve a (2.2.20), (2.2.21), (2.2.22) és (2.2.23) egyenleteket (2.2.12)-be kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_1' \cdot \varphi_1' + c_1 \cdot \varphi_1'' + c_2' \cdot \varphi_2' + c_2 \cdot \varphi_2'' + p_1 \cdot (c_1 \cdot \varphi_1' + c_2 \cdot \varphi_2') + p_0 \cdot (c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2) &= q \\ c_1' \cdot \varphi_1' + c_2' \cdot \varphi_2' + c_1 \cdot \underbrace{(\varphi_1'' + p_1 \cdot \varphi_1' + p_0 \cdot \varphi_1)}_{=0} + c_1 \cdot \underbrace{(\varphi_1'' + p_1 \cdot \varphi_1' + p_0 \cdot \varphi_1)}_{=0} &= q \\ c_1' \cdot \varphi_1' + c_2' \cdot \varphi_2' &= q, \end{aligned}$$

amely (2.2.22)-tel együtt c_1', c_2' -re egy lineáris inhomogén egyenletrendszert ad eredményül:

$$\left. \begin{aligned} c_1' \cdot \varphi_1 + c_2' \cdot \varphi_2 &= 0 \\ c_1' \cdot \varphi_1' + c_2' \cdot \varphi_2' &= q \end{aligned} \right\}. \quad (2.2.24)$$

Mivel (2.2.24) együttható-mátrixának determinánsa az alaprendszer nemnulla Wronski-determinánsa, ezért létezik egyértelmű megoldása, melyből integrálással c_1, c_2 meghatározható.

Tehát a (2.2.12) inhomogén lineáris differenciálegyenletnek létezik (2.2.20) alakú partikuláris megoldása.

Másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldásának menete:

1. **lépés.** A homogén egyenlet általános megoldásának $(\varphi_h^{\hat{a}})$ kiszámítása.
2. **lépés.** Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának (φ_{ih}^p) keresése konstans variálás módszerével és a (2.2.24) egyenletrendszer megoldásával.
3. **lépés.** Az inhomogén egyenlet általános $(\varphi_{ih}^{\hat{a}})$ megoldásának meghatározása.

Amennyiben ismerjük tehát a homogén egyenlet két lineárisan független megoldását, akkor az inhomogén egyenlet általános megoldását is meg tudjuk határozni. A következőkben két speciális esetben adunk eljárást erre.

2.2.2.1. Konstans együtthatós lineáris differenciálegyenletek

2.2.7. Definíció. Legyen $q: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) intervallumon értelmezett folytonos függvény, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valós számok. Az

$$\varphi''(x) + \alpha\varphi'(x) + \beta\varphi(x) = q(x) \quad (x \in I) \quad (2.2.25)$$

alakú egyenletet **konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletnek** nevezzük. ²⁶

²⁶Rövidebb írásmód: $\varphi'' + \alpha\varphi' + \beta\varphi = q$

Konstans együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldása

A

$$\varphi''(x) + \alpha\varphi'(x) + \beta\varphi(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (2.2.26)$$

homogén egyenlet megoldásait $\varphi(x) = e^{\lambda x}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) alakban keressük. φ -t kétszer deriválva és behelyettesítve (2.2.26)-be kapjuk, hogy a

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \alpha \lambda e^{\lambda x} + \beta e^{\lambda x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\lambda x} (\lambda^2 + \alpha \lambda + \beta) = 0$$

egyenletnek kell teljesülnie. Mivel az exponenciális függvény nem veszi fel a nullát, ezért a fenti egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha λ a

$$\lambda^2 + \alpha \lambda + \beta = 0 \quad (2.2.27)$$

másodfokú, ún. **karakterisztikus egyenlet**nek gyöke. A másodfokú egyenlet diszkriminánsa alapján három esetet különböztetünk meg.

1. Ha a $D = \alpha^2 - 4\beta > 0$, akkor a (2.2.27) karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke van:

$$\lambda_1 := \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \quad \text{és} \quad \lambda_2 := \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2},$$

tehát a (2.2.26) differenciálegyenletnek két különböző megoldását kapjuk:

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{és} \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A homogén egyenlet összes megoldását akkor tudjuk ezen megoldások lineáris kombinációjaként előállítani, ha lineárisan függetlenek. A 2.2.6. tétel alapján ehhez elegendő a két függvény Wronski-determinánsát meghatározni:

$$W(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) := \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0,$$

mert a két gyök különböző és az exponenciális függvény sehol sem nulla. Tehát a két megoldás lineárisan független és ezért a homogén egyenlet általános megoldása:

$$\varphi_h^{\hat{a}}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).$$

2. Ha a $D = \alpha^2 - 4\beta = 0$, akkor a (2.2.27) karakterisztikus egyenletnek két megegyező valós gyöke van:

$$\lambda := \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\alpha}{2},$$

tehát a (2.2.26) differenciálegyenletnek egyelőre csak egy megoldását kapjuk:

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda x} = e^{-\frac{\alpha}{2}x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Szükségünk van egy ettől a megoldástól lineárisan független második megoldásra. Belátjuk, hogy a

$$\varphi_2(x) := x\varphi_1(x) = x e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

φ_1 -től lineárisan független megoldás. A szorzatfüggvény differenciálási szabály alapján

$$\varphi_2'(x) = \varphi_1(x) + x\varphi_1'(x) \quad \text{és} \quad \varphi_2''(x) = \varphi_1'(x) + \varphi_1'(x) + x\varphi_1''(x) = 2\varphi_1'(x) + x\varphi_1''(x)$$

Ezt behelyettesítve (2.2.26)-be kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2\varphi_1'(x) + x\varphi_1''(x) + \alpha(\varphi_1(x) + x\varphi_1'(x)) + \beta(x\varphi_1(x)) &= 2\varphi_1'(x) + \alpha\varphi_1(x) + x \underbrace{(\varphi_1''(x) + \alpha\varphi_1'(x) + \beta\varphi_1(x))}_{=0} \\ &= -\alpha\varphi_1(x) + \alpha\varphi_1(x) = 0, \end{aligned}$$

tehát φ_2 valóban megoldás.

A homogén egyenlet összes megoldását akkor tudjuk ezen megoldások lineáris kombinációjaként előállítani, ha lineárisan függetlenek. A 2.2.6. tétel alapján ehhez elegendő a két függvény Wronski-determinánsát meghatározni:

$$W(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) := \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & x\varphi_1(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_1(x) + x\varphi_1'(x) \end{pmatrix} = \varphi_1(x)(\varphi_1(x) + x\varphi_1'(x)) - x\varphi_1(x)\varphi_1'(x) = \varphi_1^2(x) \neq 0,$$

mert φ_1 egy exponenciális függvény, ami sehol sem nulla. Tehát a két megoldás lineárisan független és ezért a homogén egyenlet általános megoldása:

$$\varphi_h^{\dot{a}}(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).$$

3. Ha a $D = \alpha^2 - 4\beta < 0$, akkor a (2.2.27) karakterisztikus egyenletnek két különböző komplex gyöke van:

$$\lambda_1 := \frac{-\alpha + i\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2} = a + ib \quad \text{és} \quad \lambda_2 := \frac{-\alpha - i\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2} = a - ib,$$

ahol

$$a = -\frac{\alpha}{2} \quad \text{és} \quad b = \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}$$

valós számok. Az Euler-összefüggések alapján a (2.2.26) differenciálegyenletnek két különböző, komplex értékű függvényekből álló megoldását írhatjuk fel:

$$\tilde{\varphi}_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{ax}(\cos(bx) + i \sin(bx)) \quad \text{és} \quad \tilde{\varphi}_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{\overline{\lambda_1} x} = e^{ax}(\cos(bx) - i \sin(bx)).$$

A valós változós komplex értékű függvények esetén érvényben maradnak az előző pontokban bebizonyított tételek a lineáris függetlenséggel és a homogén egyenlet megoldásaival kapcsolatban is. Érvényes tehát, hogy a homogén egyenlet két megoldásának bármely lineáris kombinációja is megoldás. Tekintsük a két fenti megoldás alábbi lineáris kombinációit:

$$\varphi_1(x) := \frac{\tilde{\varphi}_1(x) + \tilde{\varphi}_2(x)}{2} = e^{ax} \cos(bx) \quad \text{és} \quad \varphi_2(x) := \frac{\tilde{\varphi}_1(x) - \tilde{\varphi}_2(x)}{2i} = e^{ax} \sin(bx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Ezzel előállítottuk a homogén egyenlet két valós értékű megoldását. Mivel $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ két lineárisan független megoldás, és

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = -\frac{1}{2i} W(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2),$$

ezért φ_1, φ_2 is két lineárisan független megoldás, és így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$\varphi_h^{\dot{a}}(x) = c_1 \cdot e^{ax} \cos(bx) + c_2 \cdot e^{ax} \sin(bx) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).$$

Ezzel beláttuk az alábbi tételt:

2.2.9. Tétel. *Konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlet mindig megoldható.*

2.2.4. Példa. *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:*

$$\varphi''(x) - 3\varphi'(x) - 4\varphi(x) = x + 1. \quad (2.2.28)$$

Megoldás. A differenciálegyenlet konstans együtthatós másodrendű inhomogén lineáris.

1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A homogén egyenlet

$$\varphi''(x) - 3\varphi'(x) - 4\varphi(x) = 0$$

megoldását $\varphi(x) = e^{\lambda x}$ alakban keressük. φ -t behelyettesítve, a

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} - 3\lambda \cdot e^{\lambda x} - 4e^{\lambda x} = \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} (\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

karakterisztikus egyenlethez jutunk, melynek két különböző valós gyöke van:

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{9 + 16}}{2} = 4 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{9 + 16}}{2} = -1.$$

Tehát a homogén egyenlet két lineárisan független megoldása:

$$\varphi_1(x) = e^{4x} \quad \text{és} \quad \varphi_2(x) = e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

melyből az általános megoldásra

$$\boxed{\varphi_h^{\hat{a}}(x) = c_1 \cdot \varphi_1(x) + c_2 \cdot \varphi_2(x) = c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot e^{-x} \quad (c_1, c_2, x \in \mathbb{R})}$$

adódik.

2. lépés. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével. A partikuláris megoldást

$$\varphi_0(x) := \varphi_{ih}^p(x) = c_1(x) \cdot \varphi_1(x) + c_2(x) \cdot \varphi_2(x) = c_1(x) \cdot e^{4x} + c_2(x) \cdot e^{-x}$$

alakban keressük. c_1, c_2 -re teljesülnie kell a (2.2.24) egyenletrendszernek. Keressük tehát azon függvényeket, melyekre teljesül a

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot e^{4x} + c_2'(x) \cdot e^{-x} &= 0 \\ c_1'(x) \cdot 4e^{4x} + c_2'(x) \cdot (-e^{-x}) &= x + 1 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer. Az első egyenletet beszorozva 4-gyel, és a felső egyenletből kivonva az alsót kapjuk, hogy

$$c_2'(x) \cdot 5e^{-x} = -x - 1 \quad \Rightarrow \quad c_2'(x) = -\frac{1}{5}(x + 1)e^x,$$

majd visszahelyettesítve az elsőbe megkapjuk c_1' -t:

$$c_1'(x) \cdot e^{4x} - \frac{1}{5}(x + 1)e^x \cdot e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1'(x) = \frac{1}{5}(x + 1)e^{-4x}.$$

Ezekből az egyenletekből c_1 és c_2 parciális integrálással meghatározható:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int \frac{1}{5}(x + 1)e^{-4x} dx = \frac{1}{5} \left(-(x + 1) \frac{1}{4} e^{-4x} + \int \frac{1}{4} e^{-4x} dx \right) = \\ &\quad \begin{matrix} f(x) = x + 1 & g'(x) = e^{-4x} \\ f'(x) = 1 & g(x) = -\frac{1}{4} e^{-4x} \end{matrix} \\ &= -(x + 1) \frac{1}{20} e^{-4x} - \frac{1}{80} e^{-4x} = -\frac{4x + 5}{80} e^{-4x} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} c_2(x) &= - \int \frac{1}{5}(x+1)e^x dx = -\frac{1}{5} \left((x+1)e^x - \int e^x dx \right) = \\ &\quad \begin{matrix} f(x)=x+1 & g'(x)=e^x \\ f'(x)=1 & g(x)=e^x \end{matrix} \\ &= -(x+1)\frac{1}{5}e^x + \frac{1}{5}e^x = -\frac{x}{5}e^x. \end{aligned}$$

A c_1, c_2 -re vonatkozó differenciálegyenleteknek csak egy megoldására van szükség, ezért az integrációs konstansról eltekintünk. A partikuláris megoldás tehát

$$\varphi_{ih}^p(x) = c_1(x) \cdot e^{4x} + c_2(x) \cdot e^{-x} = -\frac{4x+5}{80}e^{-4x} \cdot e^{4x} - \frac{x}{5}e^x \cdot e^{-x} = -\frac{20x+5}{80} = -\frac{4x+1}{16} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. Az első két lépés eredményét összeadva az (2.2.28) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

$$\varphi_{ih}^{\hat{a}}(x) = \varphi_h^{\hat{a}}(x) + \varphi_{ih}^p(x) = c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot e^{-x} - \frac{4x+1}{16} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).$$

□

2.2.5. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + \varphi(x) = e^x. \quad (2.2.29)$$

Megoldás. A differenciálegyenlet konstans együtthatós másodrendű inhomogén lineáris.

1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A homogén egyenlet

$$\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + \varphi(x) = 0$$

megoldását $\varphi(x) = e^{\lambda x}$ alakban keressük. Így a

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + 2\lambda \cdot e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} (\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

karakterisztikus egyenlethez jutunk, melynek két azonos valós gyöke van: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Tehát a homogén egyenlet két lineárisan független megoldása:

$$\varphi_1(x) = e^{-x} \quad \text{és} \quad \varphi_2(x) = x \cdot e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

melyből az általános megoldásra

$$\varphi_h^{\hat{a}}(x) = c_1 \cdot \varphi_1(x) + c_2 \cdot \varphi_2(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$$

adódik.

2. lépés. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével. A partikuláris megoldást

$$\varphi_0(x) := \varphi_{ih}^p(x) = c_1(x) \cdot \varphi_1(x) + c_2(x) \cdot \varphi_2(x) = c_1(x) \cdot e^{-x} + c_2(x) \cdot x \cdot e^{-x}$$

alakban keressük. c_1, c_2 -re teljesülnie kell a (2.2.24), egyenletrendszernek. Keressük tehát azon függvényeket, melyekre teljesül a

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot e^{-x} &+ c_2'(x) \cdot x \cdot e^{-x} &= 0 \\ c_1'(x) \cdot (-e^{-x}) &+ c_2'(x) \cdot (e^{-x} - x \cdot e^{-x}) &= e^x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer. A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy

$$c_2'(x) \cdot e^{-x} = e^x \Rightarrow c_2'(x) = e^{2x},$$

ezt visszahelyettesítve az elsőbe, megkapjuk c_1' -t:

$$c_1'(x) = -x \cdot c_2'(x) \Rightarrow c_1'(x) = -x \cdot e^{2x}.$$

Ezekből az egyenletekből c_1 és c_2 parciális integrálással meghatározható:

$$c_1(x) = \int -x \cdot e^{2x} dx = -\frac{1}{2}x \cdot e^{2x} + \int \frac{1}{2}e^{2x} dx = -\frac{1}{2}x \cdot e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$\begin{matrix} f(x) = -x & g'(x) = e^{2x} \\ f'(x) = -1 & g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix}$$

$$c_2(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

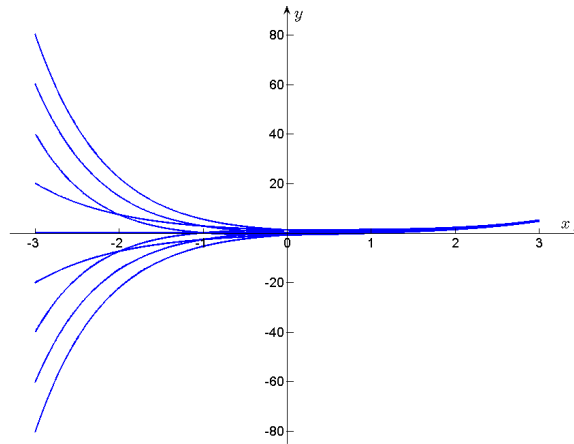
A partikuláris megoldás tehát

$$\varphi_{ih}^p(x) = c_1(x) \cdot e^{-x} + c_2(x) \cdot x \cdot e^{-x} = \left(-\frac{1}{2}x \cdot e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}\right) \cdot e^{-x} + \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) \cdot x \cdot e^{-x} = \frac{1}{4}e^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. Az első két lépés eredményét összeadva az (2.2.29) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

$$\varphi_{ih}^{\hat{a}}(x) = \varphi_h^{\hat{a}}(x) + \varphi_{ih}^p(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-x} + \frac{1}{4}e^x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).$$

A differenciálegyenlet megoldásait szemlélteti a 2.17. ábra.



2.17. ábra. A (2.2.29) differenciálegyenlet megoldásai.

□

2.2.6. Példa. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$\varphi''(x) + 4\varphi(x) = \frac{1}{\cos 2x} \quad (x \in (-\pi/4, \pi/4)). \quad (2.2.30)$$

Megoldás. A differenciálegyenlet konstans együtthatós másodrendű inhomogén lineáris.

1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A homogén egyenlet

$$\varphi''(x) + 4\varphi(x) = 0$$

megoldását $\varphi(x) = e^{\lambda x}$ alakban keressük. φ -t behelyettesítve, a

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} (\lambda^2 + 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 4 = 0$$

karakterisztikus egyenlethez jutunk, melynek két különböző komplex gyöke van:

$$\lambda_1 = 2i \quad \text{és} \quad \lambda_2 = -2i.$$

Tehát a homogén egyenlet két lineárisan független megoldása:

$$\varphi_1(x) = e^{0 \cdot x} \cdot \cos 2x = \cos 2x \quad \text{és} \quad \varphi_2(x) = e^{0 \cdot x} \cdot \sin 2x = \sin 2x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

melyből az általános megoldásra

$$\boxed{\varphi_h^A(x) = c_1 \cdot \varphi_1(x) + c_2 \cdot \varphi_2(x) = c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \sin 2x \quad (c_1, c_2, x \in \mathbb{R})}$$

adódik.

2. lépés. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével. A partikuláris megoldást

$$\varphi_0(x) := \varphi_{ih}^p(x) = c_1(x) \cdot \varphi_1(x) + c_2(x) \cdot \varphi_2(x) = c_1(x) \cdot \cos 2x + c_2(x) \cdot \sin 2x$$

alakban keressük. c_1, c_2 -re teljesülnie kell a (2.2.24) egyenletrendszernek. Keressük tehát azon függvényeket, melyekre teljesül a

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot \cos 2x &+ c_2'(x) \cdot \sin 2x &= 0 \\ c_1'(x) \cdot (-2 \sin 2x) &+ c_2'(x) \cdot 2 \cos 2x &= \frac{1}{\cos 2x} \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer. Az első egyenletet $2 \sin 2x$ -szel, a másodikat $\cos 2x$ -szel megszorozva és a két egyenletet összeadva,

$$c_2'(x) \cdot 2 \sin^2 2x + c_2'(x) \cdot 2 \cos^2 2x = 1 \quad \Rightarrow \quad c_2'(x) = \frac{1}{2}$$

adódik. Ezt visszahelyettesítve az elsőbe, megkapjuk c_1' -t:

$$c_1'(x) = -c_2'(x) \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \quad \Rightarrow \quad c_1'(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{\cos 2x}.$$

Ezekből az egyenletekből c_1 és c_2 integrálással meghatározható:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx \quad \underset{\substack{u = \cos 2x \\ du = -2 \sin 2x}}{=} \frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{4} \ln |u| = \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| \\ c_2(x) &= \frac{1}{2} \int 1 dx = \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

A partikuláris megoldás tehát ²⁷

²⁷ A logaritmus függvény argumentumában az abszolútértékjel most elhagyható lenne az adott intervallumon, de más intervallumokon is ezt az általános megoldást kapnánk, és ott már fontos lenne az abszolútértékjel.

$$\varphi_{ih}^p(x) = c_1(x) \cdot \cos 2x + c_2(x) \cdot \sin 2x = \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| \cdot \cos 2x + \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x \quad (x \in (-\pi/4, \pi/4)).$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. Az első két lépés eredményét összeadva az (2.2.30) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

$$\varphi_{ih}^a(x) = \varphi_h^a(x) + \varphi_{ih}^p(x) = c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \sin 2x + \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| \cdot \cos 2x + \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x \quad (x \in (-\pi/4, \pi/4))$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □

2.2.2.2. Euler-féle differenciálegyenletek

2.2.8. Definíció. Legyen $q: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}^+$) intervallumon értelmezett folytonos függvény, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valós számok. Az

$$x^2 \varphi''(x) + \alpha x \varphi'(x) + \beta \varphi(x) = q(x) \quad (x \in I) \quad (2.2.31)$$

alakú egyenletet **Euler-féle másodrendű lineáris differenciálegyenletnek** nevezzük. ²⁸

Euler-féle másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldása

Az

$$x^2 \varphi''(x) + \alpha x \varphi'(x) + \beta \varphi(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^+) \quad (2.2.32)$$

homogén egyenlet megoldásait $\varphi(x) = x^\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) alakban keressük. φ -t kétszer deriválva és behelyettesítve (2.2.32)-be kapjuk, hogy a

$$x^2 \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + \alpha x \lambda x^{\lambda-1} + \beta x^\lambda = 0 = 0 \Leftrightarrow x^\lambda (\lambda^2 + (\alpha-1)\lambda + \beta) = 0$$

egyenletnek kell teljesülnie minden pozitív x esetén. Mivel $x > 0$, ezért a fenti egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha λ a

$$\lambda^2 + (\alpha-1)\lambda + \beta = 0 \quad (2.2.33)$$

másodfokú, ún. **karakterisztikus egyenletnek** gyöke. A másodfokú egyenlet diszkriminánsa alapján három esetet különböztetünk meg.

1. Ha a $D = (\alpha-1)^2 - 4\beta > 0$, akkor a (2.2.33) karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke van:

$$\lambda_1 := \frac{-\alpha+1 + \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2} \quad \text{és} \quad \lambda_2 := \frac{-\alpha+1 - \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2},$$

tehát a (2.2.32) differenciálegyenletnek két különböző megoldását kapjuk:

$$\varphi_1(x) = x^{\lambda_1} \quad \text{és} \quad \varphi_2(x) = x^{\lambda_2} \quad (x \in \mathbb{R}^+).$$

A homogén egyenlet összes megoldását akkor tudjuk ezen megoldások lineáris kombinációjaként előállítani, ha lineárisan függetlenek. 2.2.6. tétel alapján ehhez elegendő a két függvény Wronski-determinánsát meghatározni:

$$W(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) := \det \begin{pmatrix} x^{\lambda_1} & x^{\lambda_2} \\ \lambda_1 x^{\lambda_1-1} & \lambda_2 x^{\lambda_2-1} \end{pmatrix} = \lambda_2 x^{\lambda_1} x^{\lambda_2-1} - \lambda_1 x^{\lambda_2} x^{\lambda_1-1} \neq 0,$$

mert a két gyök különböző és $x > 0$. Tehát a két megoldás lineárisan független, és ezért a homogén egyenlet általános megoldása:

$$\varphi_h^a(x) = c_1 \cdot x^{\lambda_1} + c_2 \cdot x^{\lambda_2} \quad (x \in \mathbb{R}^+) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

²⁸Rövidebb írásmód: $x^2 \varphi'' + \alpha x \varphi' + \alpha \varphi = q$

2. Ha a $D = (\alpha - 1)^2 - 4\beta = 0$, akkor a (2.2.33) karakterisztikus egyenletnek két megegyező valós gyöke van:

$$\lambda := \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1 - \alpha}{2},$$

tehát a (2.2.32) differenciálegyenletnek egyelőre csak egy megoldását kapjuk:

$$\varphi_1(x) = x^\lambda = x^{\frac{1-\alpha}{2}} \quad (x \in \mathbb{R}^+).$$

Szükségünk van egy ettől a megoldástól lineárisan független második megoldásra. Belátjuk, hogy a

$$\varphi_2(x) := \varphi_1(x) \ln x = x^\lambda \ln x \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

függvény φ_1 -től lineárisan független megoldás. A szorzatfüggvény differenciálási szabálya alapján

$$\begin{aligned} \varphi_2'(x) &= \varphi_1'(x) \ln x + \varphi_1(x) \frac{1}{x} \\ \varphi_2''(x) &= \varphi_1''(x) \ln x + \varphi_1'(x) \frac{1}{x} + \varphi_1'(x) \frac{1}{x} - \varphi_1(x) \frac{1}{x^2} = \varphi_1''(x) \ln x + \frac{2}{x} \varphi_1'(x) - \frac{1}{x^2} \varphi_1(x). \end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve (2.2.32)-be kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x^2 \left(\varphi_1''(x) \ln x + \frac{2}{x} \varphi_1'(x) - \frac{1}{x^2} \varphi_1(x) \right) + \alpha x \left(\varphi_1'(x) \ln x + \varphi_1(x) \frac{1}{x} \right) + \beta (\varphi_1(x) \ln x) &= \\ = 2x \varphi_1'(x) - \varphi_1(x) + \alpha \varphi_1(x) + \ln x \underbrace{(x^2 \varphi_1''(x) + \alpha x \varphi_1'(x) + \beta \varphi_1(x))}_{=0} &= \\ = -\varphi_1(x) + 2x \varphi_1'(x) + \alpha \varphi_1(x) = -x^\lambda + 2x \lambda x^{\lambda-1} + \alpha x^\lambda = -x^\lambda + 2\lambda x^\lambda + (1 - 2\lambda)x^\lambda = 0, \end{aligned}$$

tehát φ_2 valóban megoldás.

A homogén egyenlet összes megoldását akkor tudjuk ezen megoldások lineáris kombinációjaként előállítani, ha lineárisan függetlenek. A 2.2.6. tétel alapján ehhez elegendő a két függvény Wronski-determinánsát meghatározni:

$$\begin{aligned} W(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) &:= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_1(x) \ln x \\ \varphi_1'(x) & \varphi_1'(x) \ln x + \varphi_1(x) \frac{1}{x} \end{pmatrix} \\ &= \varphi_1(x) \left(\varphi_1'(x) \ln x + \varphi_1(x) \frac{1}{x} \right) - \varphi_1(x) \varphi_1'(x) \ln x = \frac{1}{x} \varphi_1^2(x) \neq 0, \end{aligned}$$

mert φ_1 egy valós kitevőjű hatványfüggvény, ami sehol sem nulla. Tehát a két megoldás lineárisan független, és ezért a homogén egyenlet általános megoldása:

$$\varphi_h^{\text{a}}(x) = c_1 x^\lambda + c_2 x^\lambda \ln x \quad (x \in \mathbb{R}^+) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

3. Ha a $D = \alpha^2 - 4\beta < 0$, akkor a konstans együtthatós esethez hasonlóan találunk két lineárisan független valós megoldást, melynek részletezésétől eltekintünk.

2.2.1. Megjegyzés. Az Euler-féle differenciálegyenlet alkalmas változó-transzformációval konstans együtthatós differenciálegyenletté alakítható.

Bevezetve ugyanis az $x = e^t$ ($t \in \mathbb{R}$) ($t = \ln x$) jelölést, az összetett függvény differenciálási szabálya alapján

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{1}{x} \\ \varphi''(x) &= \frac{d\varphi'}{dx} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{1}{x} + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

adódik, amit behelyettesítve (2.2.32) egyenletbe, φ -re, mint t függvényére a

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{d\varphi}{dt} + \alpha \frac{d\varphi}{dt} + \beta\varphi = 0$$

másodrendű, konstans együtthatós lineáris differenciálegyenletet kapjuk.

Tehát az Euler-típusú differenciálegyenletet változótranszformációval valóban visszavezethetjük konstans együtthatós lineáris differenciálegyenletre, és teljesül a következő

2.2.10. Tétel. *Az Euler-féle másodrendű lineáris differenciálegyenletnek mindig létezik megoldása.*

2.2.7. Példa. *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:*

$$x^2\varphi''(x) - x\varphi'(x) + \varphi(x) = \ln x \quad (x \in \mathbb{R}^+). \quad (2.2.34)$$

Megoldás. A differenciálegyenlet Euler-féle másodrendű inhomogén lineáris.

1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A

$$x^2\varphi''(x) - x\varphi'(x) + \varphi(x) = 0$$

homogén egyenlet megoldását $\varphi(x) = x^\lambda$ alakban keressük. φ -t visszahelyettesítve, a

$$\lambda(\lambda-1)x^\lambda - \lambda x^\lambda + x^\lambda = \underbrace{x^\lambda}_{\neq 0}(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

karakterisztikus egyenlethez jutunk, melynek két azonos valós gyöke van:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1.$$

Tehát a homogén egyenlet két lineárisan független megoldása:

$$\varphi_1(x) = x \quad \text{és} \quad \varphi_2(x) = x \ln x \quad (x \in \mathbb{R}^+),$$

melyből az általános megoldásra

$$\boxed{\varphi_h^A(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = c_1x + c_2x \ln x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+)}$$

adódik.

2. lépés. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével. A partikuláris megoldást

$$\varphi_0(x) := \varphi_{ih}^p(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x) = c_1(x)x + c_2(x)x \ln x$$

alakban keressük. c_1, c_2 -re teljesülnie kell a (2.2.24) egyenletrendszernek. Keressük tehát azon függvényeket, melyekre teljesül a

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x)x + c_2'(x)x \ln x &= 0 \\ c_1'(x) + c_2'(x)(\ln x + x\frac{1}{x}) &= \ln x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer. Az első egyenletből $c_1'(x) = -c_2'(x) \ln x$ adódik, melyet a másodikba helyettesítve kapjuk, hogy

$$-c_2'(x) \ln x + c_2'(x)(\ln x + 1) = \ln x \quad \Rightarrow \quad c_2'(x) = \ln x,$$

ezt visszahelyettesítve az elsőbe, megkapjuk c_1' -t:

$$c_1'(x) = -c_2'(x) \ln x \quad \Rightarrow \quad c_1'(x) = -\ln^2 x.$$

Ezekből az egyenletekből c_1 és c_2 parciális integrálással meghatározható:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x \\ &\quad \begin{matrix} f'(x) = 1 & g(x) = \ln x \\ f(x) = x & g'(x) = \frac{1}{x} \end{matrix} \\ c_2(x) &= - \int \ln^2 x dx = -x \ln^2 x + \int x 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &\quad \begin{matrix} f'(x) = 1 & g(x) = \ln^2 x \\ f(x) = x & g'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \end{matrix} \\ &= -x \ln^2 x + 2 \int \ln x dx = -x \ln^2 x + 2x \ln x - 2x. \end{aligned}$$

A partikuláris megoldás tehát

$$\varphi_{ih}^p(x) = (x \ln x - x)x + (-x \ln^2 x + 2x \ln x - 2x)x \ln x = x^2(-\ln^3 x + 2 \ln^2 x - \ln x - 1) \quad (x \in \mathbb{R}^+).$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. Az első két lépés eredményét összeadva az (2.2.29) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

$$\varphi_{ih}^{\hat{a}}(x) = \varphi_h^{\hat{a}}(x) + \varphi_{ih}^p(x) = c_1 x + c_2 x \ln x + x^2(-\ln^3 x + 2 \ln^2 x - \ln x - 1) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+).$$

□

2.2.2.3. Feladatok

2.2.2. Feladat. Oldjuk meg az alábbi másodrendű lineáris differenciálegyenleteket:

i) $\varphi'' - 2\varphi' = 3x + 1;$	<i>Útmutatás</i>	<i>Megoldás</i>
ii) $\varphi'' + \varphi = \operatorname{tg} x \quad (x \in (-\pi/2, \pi/2));$	<i>Útmutatás</i>	<i>Megoldás</i>
iii) $\varphi'' - 4\varphi' + 4\varphi = x;$	<i>Útmutatás</i>	<i>Megoldás</i>
iv) $x^2\varphi'' - 3x\varphi' + 3\varphi = x;$	<i>Útmutatás</i>	<i>Megoldás</i>
v) $(2x+1)^2\varphi'' - 4(2x+1)\varphi' + 8\varphi = 0.$	<i>Útmutatás</i>	<i>Megoldás</i>

3. fejezet

Útmutatások

Útmutatás a 2.1.1. feladat megoldásához.

- i) A differenciálegyenlet szétválasztható változójú.

[Vissza a feladatokhoz](#)

- ii) A differenciálegyenlet szétválasztható változójúra visszavezethető, változóban homogén.

[Vissza a feladatokhoz](#)

- iii) A differenciálegyenlet szétválasztható változójúra visszavezethető, egyszerű átrendezéssel (2.1.10) alakra hozható.

[Vissza a feladatokhoz](#)

- iv) A differenciálegyenlet szétválasztható változójúra visszavezethető, egyszerű átrendezéssel (2.1.10) alakra hozható.

[Vissza a feladatokhoz](#)

- v) A differenciálegyenlet szétválasztható változójúra visszavezethető, (2.1.9) alakú.

[Vissza a feladatokhoz](#)

- vi) A differenciálegyenlet szétválasztható változójúra visszavezethető, (2.1.15) alakra hozható.

[Vissza a feladatokhoz](#)

- vii) A differenciálegyenlet szétválasztható változójúra visszavezethető, (2.1.15) alakra hozható.

[Vissza a feladatokhoz](#)

Útmutatás a 2.1.2. feladat megoldásához.

- i) A differenciálegyenlet inhomogén lineáris.

[Vissza a feladatokhoz](#)

- ii) A differenciálegyenlet inhomogén lineáris.

[Vissza a feladatokhoz](#)

- iii) Térjünk át φ helyett az inverzére. A differenciálegyenlet φ^{-1} -re vonatkozóan inhomogén lineáris.

[Vissza a feladatokhoz](#)

iv) A differenciálegyenlet elsőrendű lineárisra visszavezethető, Bernoulli-típusú.

[Vissza a feladatokhoz](#)

v) A differenciálegyenlet elsőrendű lineárisra visszavezethető, Bernoulli-típusú.

[Vissza a feladatokhoz](#)

Útmutatás a 2.1.3. feladat megoldásához.

i) A differenciálegyenlet egzakt.

[Vissza a feladatokhoz](#)

ii) A differenciálegyenlet egzakt a $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ halmazon.

[Vissza a feladatokhoz](#)

iii) A differenciálegyenlet egzakttá tehető. Csak x -től függő multiplikátor található.

[Vissza a feladatokhoz](#)

iv) A differenciálegyenlet egzakttá tehető. $\mu(x, \varphi) = g(x)h(\varphi)$ típusú multiplikátor található.

[Vissza a feladatokhoz](#)

v) A differenciálegyenlet egzakttá tehető. $\mu(x, \varphi) = \mu(x\varphi)$ típusú multiplikátor található.

[Vissza a feladatokhoz](#)

Útmutatás a 2.2.1. feladat megoldásához.

i) A differenciálegyenlet hiányos, (2.2.2) alakú.

[Vissza a feladatokhoz](#)

ii) A differenciálegyenlet hiányos, (2.2.3) alakú.

[Vissza a feladatokhoz](#)

iii) A differenciálegyenlet hiányos, (2.2.3) alakú.

[Vissza a feladatokhoz](#)

iv) A differenciálegyenlet hiányos, (2.2.2) alakú.

[Vissza a feladatokhoz](#)

Útmutatás a 2.2.2. feladat megoldásához.

i) A differenciálegyenlet másodrendű konstans együtthatós inhomogén lineáris.

[Vissza a feladatokhoz](#)

ii) A differenciálegyenlet másodrendű konstans együtthatós inhomogén lineáris.

[Vissza a feladatokhoz](#)

iii) A differenciálegyenlet másodrendű konstans együtthatós inhomogén lineáris.

[Vissza a feladatokhoz](#)

iv) A differenciálegyenlet másodrendű inhomogén lineáris, Euler-típusú.

[Vissza a feladatokhoz](#)

v) A differenciálegyenlet másodrendű inhomogén lineáris. $\varphi = (2x+1)^\lambda$ alakban keressük a megoldást.

[Vissza a feladatokhoz](#)

4. fejezet

Megoldások

2.1.1. feladat megoldása

- i) A differenciálegyenlet szétválasztható változójú. Az $1+\varphi^2$ sehol sem nulla, továbbá feltételezve, hogy $0 \notin D_\varphi$, az egyenletet rendezve és integrálva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}x\varphi(1+x^2)\frac{d\varphi}{dx} &= 1+\varphi^2 & / \cdot dx : x(1+x^2)(1+\varphi^2) \\ \frac{\varphi}{1+\varphi^2}d\varphi &= \frac{1}{x(1+x^2)}dx & / \int \\ \int \frac{\varphi}{1+\varphi^2}d\varphi &= \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx \\ \frac{1}{2} \int \frac{2\varphi}{1+\varphi^2}d\varphi &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2(1+x^2)}dx & / u=x^2 \quad du=2xdx \\ \frac{1}{2} \ln|1+\varphi^2| &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u(u+1)}du \\ \ln(1+\varphi^2) &= \int \frac{(u+1)-u}{u(u+1)}du \\ \ln(1+\varphi^2) &= \int \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}du = \ln|u| - \ln|u+1| + c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R}) \\ \ln(1+\varphi^2) &= \ln \frac{|u|}{|u+1|} + c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R}) & / e^\sim \\ 1+\varphi^2 &= e^{c_1} \left| \frac{u}{u+1} \right| \quad (c_1 \in \mathbb{R}) & / c := e^{c_1} \\ 1+\varphi^2 &= c \frac{x^2}{x^2+1} \quad (c \in \mathbb{R}^+).\end{aligned}$$

Ezzel a feladat megoldását implicit függvényegyenlet formájában megkaptuk. Jelen esetben a differenciálegyenlet megoldását explicit alakban is könnyen megadhatjuk¹:

$$\varphi(x) = \pm \sqrt{c \frac{x^2}{x^2+1} - 1} \quad (c > 1, x \in \mathbb{R}, x > \sqrt{\frac{1}{c-1}} \text{ vagy } x < -\sqrt{\frac{1}{c-1}})$$

[Vissza a feladatokhoz](#)

¹A képletben szereplő $\pm$ jel nem függ x -től, azaz a megoldások $\varphi(x) = \sqrt{c \frac{x^2}{x^2+1} - 1}$, vagy $\varphi(x) = -\sqrt{c \frac{x^2}{x^2+1} - 1}$ ($c > 1, x \in \mathbb{R}, x > \sqrt{\frac{1}{c-1}}$ vagy $x < -\sqrt{\frac{1}{c-1}}$) alakúak.

- ii) A differenciálegyenlet az $x = 0$ pontban nem értelmezhető. Keressünk megoldást a $(0, +\infty)$ intervallumon. Az egyenlet mindkét oldalát x -szel leosztva láthatjuk, hogy változóban homogén. Végrehajtva a $\varphi(x) = \psi(x) \cdot x$ $x \in \mathcal{D}_\varphi$ helyettesítést ($\varphi'(x) = \psi'(x)x + \psi(x)$) kapjuk, hogy

$$\psi'x + \psi - \psi = \operatorname{tg} \psi,$$

melyből átrendezéssel és $\psi' = \frac{d\psi}{dx}$ jelölést használva

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{x}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenlet adódik.

- Ha $\sin \psi \equiv 0$, akkor $\psi \equiv k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) a d.e.-nek megoldása, tehát a $\varphi(x) = k\pi x$ ($k \in \mathbb{Z}, x > 0$) függvénysereg az eredeti differenciálegyenletnek megoldása.
- Olyan megoldásokat keresünk, ahol $\sin \psi \neq 0$ a $\mathcal{D}_\psi$ intervallumon. Rendezés után a

$$\frac{\cos \psi}{\sin \psi} d\psi = \frac{dx}{x}$$

egyenlethez jutunk. Integrálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos \psi}{\sin \psi} d\psi &= \int \frac{dx}{x} \quad (\sin' \psi = \cos \psi) \\ \ln |\cos \psi| &= \ln |x| + c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R}) \quad / e^\sim \\ |\cos \psi| &= |x| \cdot e^{c_1} \quad (c_1 \in \mathbb{R}) \quad / c := e^{c_1} \\ |\cos \psi| &= c|x| \quad (c \in \mathbb{R}^+). \end{aligned}$$

Mivel a $|\cos|$ függvény csak 0 és 1 közötti értékeket vehet fel, ezért x szükségképpen a $(0, \frac{1}{c})$ intervallumba esik. A $\cos$ függvény periodikus, ezért a fenti függvényegyenletnek végtelen sok megoldása van. Egy ezek közül:

$$\psi(x) = \arccos(cx) \quad (c \in \mathbb{R}^+, 0 < x < \frac{1}{c}),$$

melyből a

$$\varphi(x) = x \arccos(cx) \quad (c \in \mathbb{R}^+, 0 < x < \frac{1}{c})$$

függvény adódik.

[Vissza a feladatokhoz](#)

- iii) Az egyenlet egyszerű átrendezéssel (2.1.10) alakra hozható:

$$\varphi' = \frac{\varphi - x + 1}{\varphi - x + 2},$$

ahol $g(y) = y$ ($y \in \mathbb{R}$), feltételezve, hogy $\varphi(x) - x + 2 \neq 0$ ($x \in D_\varphi$). Az

$$\begin{aligned} y - x + 1 &= 0 \\ y - x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek nincs megoldása, a két egyenlet által meghatározott egyenesek párhuzamosak. Bevezetve az $\psi(x) = \varphi(x) - x$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$) jelölést, deriválással

$$\psi'(x) = \varphi'(x) - 1 \Leftrightarrow \varphi'(x) = \psi'(x) + 1 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik. Végrehajtva a helyettesítést 2.1.1/iii)-ben kapjuk, hogy

$$-\psi - 1 + (\psi + 2)(\psi' + 1) = 0 \Rightarrow 1 + (\psi + 2)\psi' = 0 \Leftrightarrow (\psi + 2)\psi' = -1.$$

Beírjuk az $\psi' = \frac{d\psi}{dx}$ jelölést, beszorzunk dx -szel és integrálunk. Ezzel az ψ -re vonatkozó differenciálegyenletünk megoldásához jutunk:

$$\begin{aligned} (\psi + 2) d\psi &= -dx & / \int \\ \int (\psi + 2) du &= - \int dx \\ \frac{\psi^2}{2} + 2\psi &= -x + c \quad (c \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

melyből ψ kifejezhető:

$$\psi(x) = -2 + \sqrt{4 - 2(x - c)} \quad \text{illetve} \quad \psi(x) = -2 - \sqrt{4 - 2(x - c)} \quad ((c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, x < c + 2).$$

Visszaírva az $\psi(x) = \varphi(x) - x$ helyettesítést, a 2.1.1/iii) differenciálegyenlet megoldásait kapjuk meg explicit alakban:

$$\varphi(x) = x - 2 + \sqrt{4 - 2(x - c)} \quad \text{illetve} \quad \varphi(x) = x - 2 - \sqrt{4 - 2(x - c)} \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, x < c + 2).$$

[Vissza a feladatokhoz](#)

iv) Az egyenlet egyszerű átrendezéssel (2.1.10) alakra hozható:

$$\varphi' = \frac{2x + 3\varphi - 5}{x + 4\varphi}, \tag{4.0.1}$$

ahol $g(y) = y$ ($y \in \mathbb{R}$), feltéve, hogy $x + 4\varphi(x) \neq 0$ ($x \in D_\varphi$). Keressük meg a

$$\begin{aligned} 2x + 3\varphi - 5 &= 0 \\ x + 4\varphi &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldását. A második egyenletből $x = -4y$ adódik, melyet az elsőbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$2(-4y) + 3y - 5 = 0 \Leftrightarrow -8y + 3y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \Rightarrow x = 4.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása az $(4; -1)$ számpár. Ez alapján átírjuk 2.1.1/iv)-ben a lineáris kifejezéseket:

$$((x - 4) + 4(\varphi + 1))\varphi' = 2(x - 4) + 3(\varphi + 1) = 0$$

A megoldásokat a $(-\infty, 4)$, illetve a $(4, \infty)$ intervallumokon keressük. Ebben az esetben mindkét oldalt leosztjuk $x - 4$ -gyel:

$$(1 + 4\frac{\varphi + 1}{x - 4})\varphi' = 2 + 3\frac{\varphi + 1}{x - 4} = 0$$

Bevezetve a $\psi(x) = \frac{\varphi(x)+1}{x-4}$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$) jelölést, $x-4$ -gyel beszorozva, deriválással

$$(\varphi+1)'(x) = ((x-4)\psi(x))' \Leftrightarrow \varphi'(x) = \psi(x) + (x-1)\psi'(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik. Végrehajtva a helyettesítést kapjuk, hogy

$$(1+4\psi)(\psi + (x-1)\psi') = 2+3\psi \Leftrightarrow (1+4\psi)(x-1)\psi' = -4\psi^2 + 2\psi + 2 = -4(\psi-1)(\psi + \frac{1}{2}).$$

A jobb oldal pontosan akkor nulla, ha $\psi=1$ vagy $\psi=-1/2$. Ezért $\psi \equiv 1$ és $\psi \equiv -1/2$ megoldások. Visszahelyettesítve a $\psi = \frac{\varphi+1}{x-4}$ kifejezést, φ -re két megoldást, nevezetesen

$$\varphi(x) = x-5 \quad \text{és} \quad \varphi(x) = \frac{2-x}{2} \quad (x \in (-\infty, 4) \text{ vagy } x \in (4, +\infty))$$

kapunk.²

A továbbiakban olyan megoldást keresünk, melyre $t \neq 1$ és $\psi \neq -1/2$ a $\mathcal{D}_\psi$ intervallumon és³ $\mathcal{D}_\psi \subseteq (-\infty, 1) =: I_1$ vagy $\mathcal{D}_\psi \subseteq (1, \infty) =: I_2$. Az egyenletet rendezve, integrálva a differenciál-egyenletünk megoldásához juthatunk.

$$\begin{aligned} \frac{1+4\psi}{-4(\psi-1)(\psi+\frac{1}{2})} d\psi &= \frac{1}{x-1} dx & / \int \\ \int \frac{1+4\psi}{-4(\psi-1)(\psi+\frac{1}{2})} d\psi &= \int \frac{1}{x-1} dx \end{aligned} \quad (4.0.2)$$

A bal oldalon egy racionális törtfüggvény integrálja szerepel. Ennek kiszámításához az integrandust elemi törtekre bontjuk. Keressük azokat az A, B valós számokat, melyekre

$$\frac{1+4t}{-4(t-1)(t+\frac{1}{2})} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+\frac{1}{2}} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1/2\})$$

teljesül. Mindkét oldalt beszorozva a bal oldal nevezőjével,

$$1+4t = -4A(t+\frac{1}{2}) - 4B(t-1) = t(-4A-4B) + (-2A+4B)$$

adódik. Mindkét oldalon polinom áll. Két polinom pontosan akkor egyezik meg, ha együtthatójuk megegyeznek. Együttható-egyeztetés módszerével kapjuk tehát, hogy

$$\begin{aligned} -4A-4B &= 4 \\ -2A+4B &= 1. \end{aligned}$$

A két egyenletet összeadva A és B kiszámolható:

$$-6A = 3 \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = -\frac{1}{2}.$$

²Ha behelyettesítjük az adott függvényeket (4.0.1) egyenletbe, akkor

$$(x-5)' = \frac{2x+3(x-5)-5}{x+4(x-5)} = 1 \quad (1-x/2)' = \frac{2x+3(1-x/2)-5}{x+4(1-x/2)} = -\frac{1}{2}$$

adódik, ami valóban teljesül nem csak az adott intervallumokon, hanem $\mathbb{R}$ -en is.

³Az $x=4$ pontot egyelőre megengedjük, mert a ψ -re vonatkozó d.e. így is értelmezett.

Ezek alapján az integrál már kiszámolható:

$$\begin{aligned}\int \frac{1+4\psi}{-4(\psi-1)(\psi+\frac{1}{2})} d\psi &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\psi-1} + \frac{1}{\psi+1/2} d\psi = -\frac{1}{2} (\ln |\psi-1| + \ln |\psi+1/2|) = \\ &= \ln \frac{1}{\sqrt{|(\psi-1)(\psi+1/2)|}}.\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve (4.0.2)-be a ψ -re vonatkozó differenciálegyenlet megoldását implicit alakban kapjuk.

$$\ln \sqrt{\frac{1}{|(\psi-1)(\psi+1/2)|}} = \ln |x-1| + c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R})$$

Mindkét oldalt e -ad alapra emelve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1}{|(\psi-1)(\psi+1/2)|}} &= |x-1|e^{c_1} \quad (c_1 \in \mathbb{R}) \quad /^2 \\ \frac{1}{|(\psi-1)(\psi+1/2)|} &= (x-1)^2 e^{2c_1} \\ |(\psi-1)(\psi+1/2)| &= e^{-2c_1} \frac{1}{(x-1)^2} \quad /c := e^{-2c_1} \\ |\psi^2 - \frac{1}{2}\psi - \frac{1}{2}| &= \frac{c}{(x-1)^2} \quad (c \in \mathbb{R}^+),\end{aligned}$$

melyből $\psi > 1$ esetben

$$\psi(x) = \frac{1 + \sqrt{9 + \frac{16c}{(x-1)^2}}}{4} \quad (c \in \mathbb{R}^+, x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2),$$

$1/4 < \psi < 1$ esetben

$$\psi(x) = \frac{1 + \sqrt{9 - \frac{16c}{(x-1)^2}}}{4} \quad (c \in \mathbb{R}^+, x \in (-\infty, 1-4\sqrt{c}) \text{ vagy } x \in (1+4\sqrt{c}, +\infty),$$

$-1/2 < \psi < 1/4$ esetben

$$\psi(x) = \frac{1 - \sqrt{9 - \frac{16c}{(x-1)^2}}}{4} \quad (c \in \mathbb{R}^+, x \in (-\infty, 1-4\sqrt{c}) \text{ vagy } x \in (1+4\sqrt{c}, +\infty),$$

míg $\psi > 1$ esetben

$$\psi(x) = \frac{1 - \sqrt{9 + \frac{16c}{(x-1)^2}}}{4} \quad (c \in \mathbb{R}^+, x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2)$$

függvények adódnak.

A $\psi(x) = \frac{\varphi(x)+1}{x-4}$ helyettesítést visszaírva 2.1.1/iv) megoldásait kapjuk, melynek felírásától most eltekintünk.⁴

[Vissza a feladatokhoz](#)

⁴Ellenőrizhető, hogy a φ függvény értelmezési tartománya kiterjeszthető a ψ függvény értelmezési tartományára.

v) Az egyenlet (2.1.9) alakú. Bevezetve a $\psi(x) = 2x + 3\varphi(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$) jelölést, deriválással

$$\psi'(x) = 2 + 3\varphi'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi'(x) = \frac{\psi'(x) - 2}{3} \quad (x \in \mathcal{D}_\psi = \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik. Végrehajtva a helyettesítést, kapjuk, hogy

$$\frac{\psi' - 2}{3} = -2\psi^2 \quad \Leftrightarrow \quad \psi' = 2 - 6\psi^2.$$

A $\psi \equiv \pm 1/\sqrt{3}$ függvények nyilván megoldásai a differenciálegyenletnek, melyből a 2.1.1/v) differenciálegyenlet két partikuláris megoldása:

$$2x + 3\varphi(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) = \frac{1}{3} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}} - 2x \right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A továbbiakban olyan megoldásokat keresünk, melyekre $\psi \neq \pm 1/\sqrt{3}$ ($x \in \mathcal{D}_\psi$). Ekkor a „változókat” szétválasztjuk és integrálunk:

$$\frac{d\psi}{2 - 6\psi^2} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d\psi}{2 - 6\psi^2} = \int dx$$

A bal oldalon egy racionális törtfüggvény szerepel. Ennek kiszámításához az integrandust elemi törtekre bontjuk. Keressük azokat az A, B valós számokat, melyekre

$$\frac{1}{2(u - 1/\sqrt{3})(u + 1/\sqrt{3})} = \frac{A}{u - 1/\sqrt{3}} + \frac{B}{u + 1/\sqrt{3}} \quad (u \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1/\sqrt{3}\})$$

teljesül. Mindkét oldalt beszorozva a bal oldal nevezőjével,

$$1 = 2A(u + 1/\sqrt{3}) + 2B(u - 1/\sqrt{3}) = u(2A + 2B) + \frac{2A - 2B}{\sqrt{3}}$$

adódik. Mindkét oldalon polinom áll. Két polinom pontosan akkor egyezik meg, ha együtthatójuk megegyeznek. Együttható-egyeztetés módszerével kapjuk tehát, hogy

$$\begin{aligned} 2A + 2B &= 0 \\ 2A - 2B &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

A két egyenletet összeadva A és B kiszámolható:

$$4A = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ezek alapján az integrál már kiszámolható:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\psi}{2 - 6\psi^2} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int \frac{1}{\psi - 1/\sqrt{3}} d\psi - \frac{\sqrt{3}}{4} \int \frac{1}{\psi + 1/\sqrt{3}} d\psi = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (\ln |\psi - 1/\sqrt{3}| - \ln |\psi + 1/\sqrt{3}|) = \frac{\sqrt{3}}{4} \ln \frac{|\psi - 1/\sqrt{3}|}{|\psi + 1/\sqrt{3}|} \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{4} \ln \frac{|\psi - 1/\sqrt{3}|}{|\psi + 1/\sqrt{3}|} &= x + c \quad (c \in \mathbb{R}) \\ \ln \frac{|\psi - 1/\sqrt{3}|}{|\psi + 1/\sqrt{3}|} &= \frac{4}{\sqrt{3}}(x + c) \quad /e^\sim \\ \frac{|\psi - 1/\sqrt{3}|}{|\psi + 1/\sqrt{3}|} &= e^{\frac{4}{\sqrt{3}}(x+c)} \quad (c \in \mathbb{R}),\end{aligned}$$

melyből $\psi > 1/\sqrt{3}$ esetben

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{e^{\frac{4}{\sqrt{3}}(x+c)} + 1}{e^{\frac{4}{\sqrt{3}}(x+c)} - 1} \quad (c \in \mathbb{R}, x \in (-c, +\infty)),$$

$-1/\sqrt{3} < \psi < 1/\sqrt{3}$ esetben

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1 - e^{\frac{4}{\sqrt{3}}(x+c)}}{e^{\frac{4}{\sqrt{3}}(x+c)} + 1} \quad (c \in \mathbb{R}, x \in (-\infty, +\infty)),$$

míg $\psi < -1/\sqrt{3}$ esetben

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{e^{\frac{4}{\sqrt{3}}(x+c)} + 1}{e^{\frac{4}{\sqrt{3}}(x+c)} - 1} \quad (c \in \mathbb{R}, x \in (-\infty, -c))$$

függvények adódnak. Visszahelyettesítve a $\psi(x) = 2x + 3\varphi(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\psi$) kifejezést, a 2.1.1/v) differenciálegyenlet megoldását kapjuk, melynek elvégzését az olvasóra bízunk.

Vissza a feladatokhoz

- vi) A differenciálegyenlet értelmezési tartományának a pozitív vagy a negatív valós számok halmaza választható. Egyszerű átalakítások után a differenciálegyenlet (2.1.15) alakra hozzuk:

$$\varphi' = \varphi^2 - \frac{2}{x^2} \quad / \cdot x^2 \varphi \quad x(x\varphi)\varphi' = \varphi((x\varphi)^2 - 2). \quad (4.0.3)$$

Bevezetjük az $\psi(x) = x\varphi(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$) jelölést, deriválással

$$\psi'(x) = \varphi(x) + x\varphi'(x) = \frac{\psi(x)}{x} + x\varphi'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi'(x) = \frac{x\psi'(x) - \psi(x)}{x^2} \quad (x \in \mathcal{D}_\psi = \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik. Végrehajtva az $\psi(x) = x\varphi(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$) helyettesítést (4.0.3) egyenletben kapjuk, hogy

$$x\psi \frac{x\psi' - \psi}{x^2} = \frac{\psi}{x}(\psi^2 - 2) \quad \Leftrightarrow \quad x\psi\psi' = \psi(\psi - 1)(\psi + 2).$$

A jobb oldal pontosan akkor nulla, ha $\psi = 0$ vagy $\psi = 1$ vagy $\psi = -2$. Ebből következik, hogy $\psi \equiv 0$, $\psi \equiv 1$ és $\psi \equiv -2$ megoldása a ψ -re vonatkozó differenciálegyenletnek mindkét intervallumon. Ebből $\varphi \equiv 0$, $\varphi = 1/x$ és $\varphi = -2/x$ ($x \in \mathbb{R}^+$ vagy $x \in \mathbb{R}^-$) függvények adódnak 2.1.1/vi) feladat partikuláris megoldásaként. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy $\varphi \equiv 0$ nem, míg $\varphi = 1/x$ és $\varphi = -2/x$ megoldás.⁵

⁵Ez a „hamis” gyök azért keletkezett, mert a differenciálegyenlet átalakítása során φ -vel beszoroztunk.

A továbbiakban olyan megoldásokat keresünk, melyekre $\psi \neq 0$, $\psi \neq 1$, $\psi \neq -2$ teljesül a $\mathcal{D}_\psi$ intervallumon. Ekkor rendezzük az egyenletet és integrálással a ψ -re vonatkozó d.e. megoldásához jutunk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\psi-1)(\psi+2)} d\psi &= \frac{1}{x} dx \quad / \int \\ \int \frac{1}{(\psi-1)(\psi+2)} d\psi &= \int \frac{1}{x} dx \\ \frac{1}{3} \int \frac{(\psi+2) - (\psi-1)}{(\psi-1)(\psi+2)} d\psi &= \int \frac{1}{x} dx \\ \frac{1}{3} \int \frac{1}{\psi-1} - \frac{1}{\psi+2} d\psi &= \int \frac{1}{x} dx \\ \frac{1}{3} (\ln |\psi-1| - \ln |\psi+2|) &= \ln |x| + c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R}) \\ \ln \frac{|\psi-1|}{|\psi+2|} &= 3 \ln |x| + 3c_1 \quad / e^\sim \quad c := e^{3c_1} \\ \frac{|\psi-1|}{|\psi+2|} &= e^{3c_1} |x|^3 \quad (c \in \mathbb{R}^+), \end{aligned}$$

ahonnan $\psi > 1$ esetben

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{2cx^3+1}{1-cx^3} \quad (c \in \mathbb{R}^+, x \in (0, \frac{1}{\sqrt[3]{c}})), \\ \psi(x) &= \frac{-2cx^3+1}{1+cx^3} \quad (c \in \mathbb{R}^+, x \in (-\frac{1}{\sqrt[3]{c}}, 0)), \end{aligned}$$

$-2 < \psi < 1$ esetben

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1-2cx^3}{1+cx^3} \quad (c \in \mathbb{R}^+, x \in (0, \infty)), \\ \psi(x) &= \frac{1+2cx^3}{1-cx^3} \quad (c \in \mathbb{R}^+, x \in (-\infty, 0)), \end{aligned}$$

míg $\psi < -2$ esetben

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{2cx^3+1}{1-cx^3} \quad (c \in \mathbb{R}^+, x \in (\frac{1}{\sqrt[3]{c}}, +\infty)), \\ \psi(x) &= \frac{-2cx^3+1}{1+cx^3} \quad (c \in \mathbb{R}^+, x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{c}})) \end{aligned}$$

függvények adódnak.

A ψ függvényeket x -szel elosztva, a 2.1.1/vi) differenciálegyenlet megoldásait kapjuk, melynek elvégzését és a d.e. teljesülésének ellenőrzését az olvasóra bízunk.

[Vissza a feladatokhoz](#)

- vii) A differenciálegyenlet értelmezési tartományának a pozitív vagy a negatív valós számok halmaza választható. Egyszerű átalakítások után a differenciálegyenlet (2.1.15) alakra hozzuk:

$$\varphi' = \frac{\varphi}{x} - \frac{2}{x^2} \quad / \cdot x^2 \varphi \quad \Rightarrow \quad x(x\varphi)\varphi' = \varphi(x\varphi - 2). \quad (4.0.4)$$

Bevezetjük az $\psi(x) = x\varphi(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$) jelölést, deriválással

$$\psi'(x) = \varphi(x) + x\varphi'(x) = \frac{\psi(x)}{x} + x\varphi'(x) \Leftrightarrow \varphi'(x) = \frac{x\psi'(x) - \psi(x)}{x^2} \quad (x \in \mathcal{D}_\psi = \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik. Végrehajtva az $\psi(x) = x\varphi(x)$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$) helyettesítést (4.0.4) egyenletben kapjuk, hogy

$$x\psi \frac{x\psi' - \psi}{x^2} = \frac{\psi}{x}(\psi - 2) \Leftrightarrow \psi\psi' = \frac{2}{x}\psi(\psi - 1).$$

A jobb oldal pontosan akkor nulla, ha $\psi = 0$ vagy $\psi = 1$. Ebből következik, hogy $\psi \equiv 0$ és $\psi \equiv 1$ megoldása a ψ -re vonatkozó differenciálegyenletnek a pozitív és a negatív valós számok halmazán is. Ebből $\varphi \equiv 0$ és $\varphi = 1/x$ függvények adódnak 2.1.1/vii) feladat partikuláris megoldásaként. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy $\varphi \equiv 0$ nem, míg $\varphi = 1/x$ ($x \in \mathbb{R}^+$ vagy $x \in \mathbb{R}^-$) megoldás.⁶

A továbbiakban olyan megoldásokat keresünk, melyekre $\psi \not\equiv 0$, $\psi \not\equiv 1$ teljesül a $\mathcal{D}_\psi$ intervallumon. Ekkor rendezzük az egyenletet és integrálással a ψ -re vonatkozó d.e. megoldásához jutunk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi-1} d\psi &= \frac{2}{x} dx & / \int \\ \int \frac{1}{\psi-1} d\psi &= \int \frac{2}{x} dx \\ \ln|\psi-1| &= 2\ln|x| + c_1 & / e^\sim \quad (c_1 \in \mathbb{R}) \\ |\psi-1| &= e^{c_1} \cdot x^2 & / c := e^{c_1} \\ |\psi-1| &= cx^2 \quad (c \in \mathbb{R}^+), \end{aligned}$$

ahonnan $\psi > 1$ esetben

$$\psi(x) = 1 + cx^2 \quad (c \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^+ \text{ vagy } x \in \mathbb{R}^-),$$

míg $\psi < 1$ esetben

$$\psi(x) = 1 - cx^2 \quad (c \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^+ \text{ vagy } x \in \mathbb{R}^-)$$

függvények adódnak. A ψ függvényeket x -szel elosztva, a 2.1.1/vii) differenciálegyenlet megoldásait kapjuk, melynek elvégzését és a d.e. teljesülésének ellenőrzését az olvasóra bízunk.

[Vissza a feladatokhoz](#)

2.1.2. feladat megoldása

- i) A differenciálegyenlet inhomogén lineáris. A megoldásokat az $I_1 := (-\infty, -1)$ és $I_2 := (-1, +\infty)$ intervallumokon keressük. Az általános alakhoz $(x+1)^2$ -nel való leosztással jutunk:

$$\varphi'(x) + \frac{3}{x+1}\varphi(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2).$$

A definícióban használt jelölésekkel:

$$p(x) = \frac{3}{x+1}, \quad q(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2).$$

⁶Ez a „hamis” gyök azért keletkezett, mert a differenciálegyenlet átalakítása során φ -vel beszoroztunk.

1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A

$$\varphi'(x) + \frac{3}{x+1}\varphi(x) = 0 \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2)$$

homogén egyenlet általános megoldása 2.1.2. tétel alapján $c \cdot e^{-P(x)}$ ($c \in \mathbb{R}, x \in I_j, j=1,2$) alakú, ahol P a p függvény primitív függvénye. Mivel p függvény egy primitív függvénye

$$P(x) = \int \frac{3}{x+1} dx = 3 \ln |x+1| = \ln |x+1|^3 \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2),$$

ezért a homogén egyenlet megoldására

$$\boxed{\varphi_h^{\hat{a}}(x) = \frac{c}{(x+1)^3} \quad (c \in \mathbb{R}, x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2)}$$

adódik.

2. lépés. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével. A partikuláris megoldást

$$\varphi_0(x) := \varphi_{ih}^p(x) = \frac{c(x)}{(x+1)^3} \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2)$$

alakban keressük. Mivel φ_0 az inhomogén egyenlet megoldása, ezért

$$\varphi_0'(x) + \frac{3}{x+1}\varphi_0(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2).$$

egyenlet teljesül. Felhasználva a

$$\varphi_0'(x) = \frac{c'(x)(x+1)^3 - c(x)3(x+1)^2}{(x+1)^6} \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2)$$

azonosságot kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{c'(x)(x+1)^3 - c(x)3(x+1)^2}{(x+1)^6} + \frac{3}{x+1} \cdot \frac{c(x)}{(x+1)^3} &= \frac{2}{(x+1)^2} \\ \frac{c'(x)}{(x+1)^3} &= \frac{2}{(x+1)^2} \quad / \cdot (x+1)^3 \\ c'(x) &= 2x+2 \\ c(x) &= \int 2x+2 dx = x^2+2x \end{aligned}$$

A partikuláris megoldás tehát

$$\boxed{\varphi_{ih}^p(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^3} \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2).}$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. Az első két lépés eredményét összeadva az 2.1.2/i) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

$$\boxed{\varphi_{ih}^{\hat{a}}(x) = \varphi_h^{\hat{a}}(x) + \varphi_{ih}^p(x) = \frac{c+x^2+2x}{(x+1)^3} \quad (c \in \mathbb{R}, x \in (-\infty, -1) \text{ vagy } x \in (1, +\infty)).}$$

ii) A differenciálegyenlet inhomogén lineáris. A definícióban használt jelölésekkel:

$$p(x) = \cos x, \quad q(x) = \sin x \cos x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A

$$\varphi'(x) + \cos x \varphi(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

homogén egyenlet általános megoldása 2.1.2. tétel alapján $c \cdot e^{-P(x)}$ ($c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$) alakú, ahol P a p függvény primitív függvénye. Mivel p függvény egy primitív függvénye

$$P(x) = \int \cos x dx = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért a homogén egyenlet megoldására

$$\boxed{\varphi_h^{\hat{a}}(x) = ce^{\sin x} \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})}$$

adódik.

2. lépés. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével. A partikuláris megoldást

$$\varphi_0(x) := \varphi_{ih}^p(x) = c(x)e^{-\sin x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük. Mivel φ_0 az inhomogén egyenlet megoldása, ezért

$$\varphi_0'(x) + \varphi_0(x) \cos x = \sin x \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlet teljesül. Felhasználva az

$$\varphi_0'(x) = c'(x)e^{-\sin x} - c(x)e^{-\sin x} \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$$

azonosságot, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c'(x)e^{-\sin x} - c(x)e^{-\sin x} \cos x + c(x)e^{-\sin x} \cos x &= \sin x \cos x \\ c'(x)e^{-\sin x} &= \sin x \cos x \\ c'(x) &= e^{\sin x} \sin x \cos x \end{aligned}$$

melyből c integrálással számolható:

$$c(x) = \int_{u=\sin x} e^{\sin x} \sin x \cos x dx = \int_{f(u)=e^u} e^u u du \quad \begin{matrix} f'(u)=e^u & g(u)=u \\ f(u)=e^u & g'(u)=1 \end{matrix} = e^u u - \int e^u du = e^u u - e^u = e^{\sin x} (\sin x - 1)$$

A partikuláris megoldás tehát

$$\boxed{\varphi_{ih}^p(x) = e^{\sin x} (\sin x - 1) e^{-\sin x} = \sin x - 1 \quad (x \in \mathbb{R}).}$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. Az első két lépés eredményét összeadva az 2.1.2/ii inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

$$\varphi_{ih}^{\dot{a}}(x) = \varphi_h^{\dot{a}}(x) + \varphi_{ih}^p(x) = ce^{-\sin x} + \sin x - 1 \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).$$

Vissza a feladatokhoz

- iii) A differenciálegyenlet nem lineáris. Tegyük fel, hogy a 2.1.2/iii differenciálegyenletnek létezik olyan φ megoldása, melynek van differenciálható inverze. Ekkor az inverzfüggvény differenciálási szabálya alapján az inverzfüggvény deriváltja $\frac{1}{\varphi'}$.

A 2.1.2/ii d.e.-et átfogalmazzuk az $\psi(x) := \varphi^{-1}(x)$ ($x \in \mathcal{R}_\varphi$) függvényre. Keresünk olyan $\psi \in J \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre teljesül a

$$2e^x - \psi(x) = \psi'(x) \Rightarrow \psi'(x) + \psi(x) = 2e^x \quad (x \in \tilde{J} \subseteq J)$$

differenciálegyenlet. Ez a d.e. ψ -re vonatkozóan inhomogén lineáris. Keressünk megoldást a valós számok halmazán.

1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A

$$\psi'(x) + \psi(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

homogén egyenlet általános megoldása 2.1.2. tétel alapján $c \cdot e^{-P(x)}$ ($x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$) alakú, ahol P a $p(x) = 1$ függvény primitív függvénye. Mivel p függvény egy primitív függvénye

$$P(x) = \int 1 dx = x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

a homogén egyenlet megoldására

$$\psi_h^{\dot{a}}(x) = ce^{-x} \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$$

adódik.

2. lépés. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével. A partikuláris megoldást

$$\psi_0(x) := \psi_{ih}^p(x) = c(x)e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakban keressük. Mivel ψ_0 az inhomogén egyenlet megoldása, ezért

$$\psi_0'(x) + \psi_0(x) = 2e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlet teljesül. Felhasználva a

$$\psi_0'(x) = c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

azonosságot, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} &= 2e^x \\ c'(x)e^{-x} &= 2e^x \\ c'(x) &= 2e^{2x} \\ c(x) &= e^{2x}. \end{aligned}$$

A partikuláris megoldás tehát

$$\boxed{\psi_{ih}^p(x) = e^{2x} \cdot e^{-x} = e^x \quad (x \in \mathbb{R}).}$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. Az első két lépés eredményét összeadva a (2.1.28) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

$$\boxed{\psi_{ih}^{\hat{a}}(x) = \psi_h^{\hat{a}}(x) + \psi_{ih}^p(x) = ce^{-x} + e^x \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).}$$

A ψ függvény megfelelő leszűkítéseinek inverzének kiszámításával a φ -re a

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - 4c}}{2} & (c \in \mathbb{R}_0^-, x \in \mathbb{R}), \\ \varphi(x) &= \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - 4c}}{2} & (c \in \mathbb{R}^+, x \in (-\infty, -2\sqrt{c}) \text{ vagy } x \in (2\sqrt{c}, +\infty)), \\ \varphi(x) &= \ln \frac{x - \sqrt{x^2 - 4c}}{2} & (c \in \mathbb{R}^+, x \in (-\infty, -2\sqrt{c}) \text{ vagy } x \in (2\sqrt{c}, +\infty)) \end{aligned}$$

függvények adódnak. Behelyettesítve a függvényeket (2.1.29) egyenletbe ellenőrizhetjük, hogy a kapott függvények valóban megoldások, melynek elvégzését az olvasóra bízunk.

[Vissza a feladatokhoz](#)

- iv) A differenciálegyenlet Bernoulli-típusú, $\alpha = 3 > 0$. Olyan megoldásokat keresünk, melyekre $\mathcal{R}_\varphi \subseteq (0, +\infty)$ teljesül.

1. lépés. Differenciálegyenlet átalakítása lineáris egyenletté változócserevel.

Osszuk le 2.1.2/iv mindkét oldalát φ^3 -nal:

$$\varphi' \varphi^{-3} \cos x + \varphi^{-2} \sin x = -1 \quad (4.0.5)$$

Bevezetjük a

$$\psi := \varphi^{-2} \quad (4.0.6)$$

jelölést. Deriválással kapjuk, hogy

$$\psi' = -2\varphi^{-3}\varphi' \Leftrightarrow -\frac{\psi'}{2} = \varphi^{-3}\varphi'.$$

Végrehajtva a (4.0.6) helyettesítést a (4.0.5) egyenletben,

$$-\frac{\psi'(x)}{2} \cos x + \psi(x) \sin x = -1 \Leftrightarrow \psi'(x) - 2 \frac{\sin x}{\cos x} \psi(x) = \frac{2}{\cos x} \quad (x \in I_k := (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)), \quad (4.0.7)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlethez jutunk, ahol $k \in \mathbb{Z}$ tetszőleges.

2. lépés. Lineáris differenciálegyenlet megoldása.

Megkeressük a (4.0.7) lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

2.1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása.

A

$$\psi'(x) - 2 \frac{\sin x}{\cos x} \psi(x) = 0 \quad (x \in I_k, k \in \mathbb{Z})$$

homogén egyenlet általános megoldása 2.1.2. tétel alapján $c \cdot e^{-P(x)}$ ($c \in \mathbb{R}, x \in I_k, k \in \mathbb{Z}$) alakú, ahol P a $p(x) = -2 \frac{\sin x}{\cos x}$ ($x \in I_k, k \in \mathbb{Z}$) függvény primitív függvénye. Mivel p függvény egy primitív függvénye

$$P(x) = \int_{u=\cos x, \quad du=-\sin x dx} -2 \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{2}{u} du = 2 \ln |u| = \ln(\cos x)^2 \quad (x \in I_k, k \in \mathbb{Z}),$$

a homogén egyenlet megoldására

$$\boxed{\psi_h^{\hat{a}}(x) = c e^{-\ln(\cos x)^2} = \frac{c}{(\cos x)^2} \quad (c \in \mathbb{R}, x \in I_k, k \in \mathbb{Z})}$$

adódik.

2.2. lépés. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével.

A partikuláris megoldást

$$\psi_0(x) := \psi_{ih}^p(x) = c(x) \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \in I_k, k \in \mathbb{Z})$$

alakban keressük. Mivel ψ_0 a (4.0.7) inhomogén egyenlet megoldása, ezért

$$\psi_0'(x) - 2 \frac{\sin x}{\cos x} \psi_0(x) = \frac{2}{\cos x} \quad (x \in I_k, k \in \mathbb{Z})$$

egyenlet teljesül. Felhasználva a

$$\psi_0'(x) = c'(x) \frac{1}{\cos^2 x} + 2 \frac{c(x) \sin x}{\cos^3 x} \quad (x \in I_k, k \in \mathbb{Z})$$

azonosságot, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c'(x) \frac{1}{\cos^2 x} + 2c(x) \frac{\sin x}{\cos^3 x} - 2 \frac{\sin x}{\cos x} c(x) \frac{1}{\cos^2 x} &= \frac{2}{\cos x} \\ c'(x) \frac{1}{\cos^2 x} &= \frac{2}{\cos x} \\ c'(x) &= 2 \cos x \\ c(x) &= 2 \sin x. \end{aligned}$$

A partikuláris megoldás tehát

$$\boxed{\psi_{ih}^p(x) = 2 \sin x \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \in I_k, k \in \mathbb{Z}).}$$

2.3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása.

Az előző két lépés eredményét összeadva az (4.0.7) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

$$\boxed{\psi_{ih}^{\hat{a}}(x) = \psi_h^{\hat{a}}(x) + \psi_{ih}^p(x) = c \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} \quad (c \in \mathbb{R}, x \in I_k, k \in \mathbb{Z}).}$$

3. lépés. 2.1.2/iv differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározása.

(4.0.6) alapján az eredeti, 2.1.2/iv differenciálegyenlet pozitív értékeket felvevő megoldásai:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\psi(x)}} = \sqrt{\frac{\cos^2 x}{c + 2 \sin x}} \quad (c \in \mathbb{R}, c > \frac{1}{2}, \mathcal{D}_\varphi = I_k, k \in \mathbb{Z}),$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\psi(x)}} = \sqrt{\frac{\cos^2 x}{c + 2 \sin x}} \quad (c \in \mathbb{R}, -\frac{1}{2} < c < \frac{1}{2}, \mathcal{D}_\varphi = \{x \in I_k \mid \sin x > -2c\}, k \in \mathbb{Z}).$$

□

[Vissza a feladatokhoz](#)

v) A differenciálegyenlet Bernoulli-típusú, $\alpha = 1/2 > 0$. Olyan megoldásokat keresünk, melyekre $\mathcal{R}_\varphi \subseteq (0, +\infty)$ teljesül.

1. lépés. Differenciálegyenlet átalakítása lineáris egyenletté változócserével.

Osszuk le 2.1.2/v mindkét oldalát $\varphi^{\frac{1}{2}}$ -nel:

$$\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi}} x - 4\sqrt{\varphi} = -1 \quad (4.0.8)$$

Bevezetjük a

$$\psi := \sqrt{\varphi} \quad (4.0.9)$$

jelölést. Deriválással kapjuk, hogy

$$\psi' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \varphi' \Leftrightarrow 2\psi' = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi}}.$$

Végrehajtva a (4.0.9) helyettesítést a (4.0.8) egyenletben,

$$2\psi'(x)x - 4\psi(x) = -1 \Leftrightarrow \psi'(x) - \frac{2}{x}\psi(x) = -\frac{1}{2x} \quad (x \in (-\infty, 0) \text{ vagy } x \in (0, +\infty)) \quad (4.0.10)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlethez jutunk.

2. lépés. Lineáris differenciálegyenlet megoldása.

Megkeressük a (4.0.10) lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

2.1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása.

A

$$\psi'(x) - \frac{2}{x}\psi(x) = 0 \quad (x \in (-\infty, 0) \text{ vagy } x \in (0, +\infty))$$

homogén egyenlet általános megoldása 2.1.2. tétel alapján $c \cdot e^{-P(x)}$ ($c \in \mathbb{R}, x \in (-\infty, 0)$ vagy $x \in (0, +\infty)$) alakú, ahol P a $p(x) = -\frac{2}{x}$ ($x \neq 0$) függvény primitív függvénye. Mivel p függvény egy primitív függvénye

$$P(x) = -\int \frac{2}{x} dx = -2 \ln |x| = -\ln x^2 \quad (x \in (-\infty, 0) \text{ vagy } x \in (0, +\infty)),$$

a homogén egyenlet megoldására

$$\boxed{\psi_h^A(x) = ce^{\ln x^2} = cx^2 \quad (c \in \mathbb{R}, x \in (-\infty, 0) \text{ vagy } x \in (0, +\infty))}$$

adódik.

2.2. lépés. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével.

A partikuláris megoldást

$$\psi_0(x) := \psi_{ih}^p(x) = c(x)x^2$$

alakban keressük. Mivel ψ_0 a (4.0.10) inhomogén egyenlet megoldása, ezért

$$\psi_0'(x) - \frac{2}{x}\psi_0(x) = -\frac{1}{2x} \quad (x \in (-\infty, 0) \text{ vagy } x \in (0, +\infty))$$

egyenlet teljesül. Felhasználva a

$$\psi_0'(x) = c'(x)x^2 + c(x)2x \quad (x \in (-\infty, 0) \text{ vagy } x \in (0, +\infty))$$

azonosságot, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c'(x)x^2 + c(x)2x - \frac{2}{x}c(x)x^2 &= -\frac{1}{2x} \\ c'(x)x^2 &= -\frac{1}{2x} \\ c'(x) &= -\frac{1}{2x^3} \\ c(x) &= \frac{1}{4x^2} \end{aligned}$$

A partikuláris megoldás tehát

$$\boxed{\psi_{ih}^p(x) = \frac{1}{4x^2} \cdot x^2 = \frac{1}{4} \quad (x \in (-\infty, 0) \text{ vagy } x \in (0, +\infty)).}$$

2.3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása.

Az előző két lépés eredményét összeadva az (4.0.10) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

$$\boxed{\psi_{ih}^{\hat{a}}(x) = \psi_h^{\hat{a}}(x) + \psi_{ih}^p(x) = cx^2 + \frac{1}{4} \quad (c \in \mathbb{R}, x \in (-\infty, 0) \text{ vagy } x \in (0, +\infty)).}$$

3. lépés. 2.1.2/v differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározása.

(4.0.9) alapján az eredeti, 2.1.2/v differenciálegyenlet általános megoldásánál csak a $\psi > 0$ függvényeket vehetjük alapul. Így az általános megoldásra

$$\varphi(x) = \psi^2(x) = \left(cx^2 + \frac{1}{4}\right)^2 \quad (c \in \mathbb{R})$$

adódik, ahol $\mathcal{D}_\varphi = \{x \in (-\infty, 0) \mid cx^2 + 1 > 0\}$ vagy $\mathcal{D}_\varphi = \{x \in (0, +\infty) \mid cx^2 + 1 > 0\}$. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az értelmezési tartomány kiterjeszthető a nullával, és a kapott függvények „összeragaszthatók”, azaz a differenciálegyenlet megoldásai

$$\varphi(x) = \left(cx^2 + \frac{1}{4}\right)^2 \quad (c \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_\varphi = \{x \in \mathbb{R} \mid cx^2 + 1 > 0\})$$

képlettel megadhatók. □

[Vissza a feladatokhoz](#)

2.1.3. feladat megoldása

i) A differenciálegyenlet (2.1.45) alakú, melyben

$$P(x, y) = e^y \quad \text{és} \quad Q(x, y) = x \cdot e^y - 2y.$$

1. lépés. Egzaktság ellenőrzése. A P, Q függvények értelmezési tartománya $U = \mathbb{R}^2$.

Mindkét függvény folytonosan differenciálható, a P, Q függvények megfelelő parciális deriváltakjai:

$$\begin{aligned} P'_y(x, y) &= e^y \\ Q'_x(x, y) &= e^y, \end{aligned}$$

azaz teljesül a $P'_y(x, y) = Q'_x(x, y)$ feltétel is, ezért a 2.1.3/i differenciálegyenlet egzakt.

2. lépés. Primitív függvény keresése. Mindkét módszer segítségével megmutatjuk a primitív függvény keresését.

Vonalintegrál segítségével. A g függvény primitív függvényét a (2.1.48) képlet alapján fogjuk meghatározni $\mathbb{R}^2$ tartomány bármelyik pontjából nézve. Legyen például $a := (0, 0)$ a kezdőpont. Ekkor (2.1.48) alapján $g = (P, Q)$ primitív függvényére

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int_{a_1}^x P(t, a_2) dt + \int_{a_2}^y Q(x, t) dt = \int_0^x e^0 dt + \int_0^y x \cdot e^t - 2t dt = \\ &= x + x \cdot [e^t]_{t=0}^{t=y} - [t^2]_{t=0}^{t=y} = x + x \cdot (e^y - 1) - y^2 = x \cdot e^y - y^2 \end{aligned} \quad (4.0.11)$$

adódik.

Két egymás utáni primitív függvény számításával. Keressük azt a G függvényt, melyre

$$G'_x(x, y) = P(x, y) = e^y \quad \text{és} \quad G'_y(x, y) = Q(x, y) = x \cdot e^y.$$

Az első feltételt integráljuk:

$$G(x, y) = \int e^y dx + h(y) = e^y \cdot x + h(y), \quad (4.0.12)$$

ahol h csak y -től függő függvény. Célunk h meghatározása. A második feltétel alapján

$$G'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (e^y \cdot x + h(y)) = e^y \cdot x + h'(y) = x \cdot e^y - 2y,$$

melyet rendezve kapjuk, hogy

$$h'(y) = -2y,$$

melynek $h(y) = -y^2$ egy primitív függvénye. h -t behelyettesítve (4.0.12) képletbe, $g = (P, Q)$ primitív függvényét kapjuk:

$$G(x, y) = x \cdot e^y - y^2.$$

Ugyanazt az eredményt kaptuk, mint (4.0.11)-ben.

3. lépés. Differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározása. A 2.1.4. tétel alapján a 2.1.3/i differenciálegyenlet megoldásai az

$$x \cdot e^y - y^2 = c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

implicit függvényegyenlet megoldásaival egyeznek meg.

[Vissza a feladatokhoz](#)

ii) A differenciálegyenlet (2.1.45) alakú, melyben

$$P(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \cos x \cdot \sin y \quad \text{és} \quad Q(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sin x \cdot \cos y.$$

1. lépés. Egzaktság ellenőrzése. A P, Q függvények értelmezési tartománya $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ami nem téglalap. Leszűkítjük az értelmezési tartományt az $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ nyílt téglalapra.

A P, Q függvények folytonosan differenciálhatók, a megfelelő parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} P'_y(x, y) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \cdot 2y + \cos x \cdot \cos y \\ Q'_x(x, y) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \cdot 2x + \cos x \cdot \cos y, \end{aligned}$$

azaz teljesül a $P'_y(x, y) = Q'_x(x, y)$ feltétel is, ezért a 2.1.3/ii differenciálegyenlet egzakt.

2. lépés. Primitív függvény keresése. Mindkét módszer segítségével megmutatjuk a primitív függvény keresését.

Vonalintegrál segítségével. A g függvény primitív függvényét a (2.1.48) képlet alapján fogjuk meghatározni

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

tartomány bármelyik pontjából nézve. Legyen $a := (1, 0)$ a kezdőpont. Ekkor (2.1.48) alapján $g = (P, Q)$ primitív függvényére

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int_{a_1}^x P(t, a_2) dt + \int_{a_2}^y Q(x, t) dt = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2 + 0}} + \cos t \sin 0 dt + \int_0^y \frac{t}{\sqrt{x^2 + t^2}} + \sin x \cos t dt = \\ &= x - 1 + \left[\sqrt{x^2 + t^2} \right]_{t=0}^{t=y} + [\sin x \cdot \sin t]_{t=0}^{t=y} = x - 1 + \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2} + \sin x \cdot \sin y = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} + \sin x \cdot \sin y - 1 \end{aligned} \tag{4.0.13}$$

adódik.

Két egymás utáni primitív függvény számításával. Keressük azt a G függvényt, melyre

$$G'_x(x, y) = P(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \cos x \cdot \sin y \quad \text{és} \quad G'_y(x, y) = Q(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sin x \cdot \cos y.$$

Az első feltételből integrálással kapjuk, hogy

$$G(x, y) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \cos x \cdot \sin y dx + h(y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sin x \cdot \sin y + h(y), \tag{4.0.14}$$

ahol h csak y -től függő függvény. Célunk h meghatározása. A második feltétel alapján

$$\begin{aligned} F'_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{x^2 + y^2} + \sin x \cdot \sin y + h(y) \right) = \\ &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sin x \cdot \cos y + h'(y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sin x \cdot \cos y, \end{aligned}$$

melyet rendezve kapjuk, hogy

$$h'(y) = 0 \quad (y \in \mathbb{R}).$$

A $h \equiv 0$ egy alkalmas függvény. h -t behelyettesítve (4.0.14) képletbe, $g = (P, Q)$ primitív függvényét kapjuk:

$$G(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sin x \cdot \sin y.$$

Additív konstanstól eltekintve ugyanazt az eredményt kaptuk, mint (4.0.13)-ban.

3. lépés. Differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározása. A 2.1.4. tétel alapján a 2.1.3/ii differenciálegyenlet általános megoldása megegyezik a

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sin x \cdot \sin y = c \quad (c \in \mathcal{R}_G, (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}).$$

implicit függvényegyenlet megoldásával. A megoldást explicit alakban nem tudjuk megadni.

[Vissza a feladatokhoz](#)

iii) A differenciálegyenlet (2.1.45) alakú. Egyszerűen leolvasható, hogy

$$P(x, y) = x^2 + y \quad \text{és} \quad Q(x, y) = -x.$$

1. lépés. Egzaktság ellenőrzése. P, Q értelmezési tartománya $U = \mathbb{R}^2$.

A P, Q függvények megfelelő parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} P'_y(x, y) &= 1 \\ Q'_x(x, y) &= -1, \end{aligned}$$

így a $P'_y(x, y) = Q'_x(x, y)$ feltétel nem teljesül, ezért alkalmas multiplikátort keresünk. Mivel

$$\frac{P'_y(x, y) - Q'_x(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{2}{-x} = -\frac{2}{x}$$

nem függ y -től, ezért létezik csak x -től függő multiplikátor. Nevezetesen a

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln |x|} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$$

egy alkalmas multiplikátor. μ -val beszorozva a 2.1.3/iii differenciálegyenletet, a

$$\left(1 + \frac{y}{x^2}\right) dx - \frac{1}{x} dy = 0 \tag{4.0.15}$$

egzakt differenciálegyenlethez jutunk, ahol

$$P_1(x, y) = 1 + \frac{y}{x^2} \quad \text{és} \quad Q_1(x, y) = -\frac{1}{x}.$$

Vegyük észre, hogy P_1 és Q_1 értelmezési tartománya már nem téglalap, mert nem tartalmazza az y tengely pontjait. Primitív függvényt ezért csak értelmezési tartományának egy leszűkítésén, a $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ halmazon keresünk.

2. lépés. Primitív függvény keresése. Vonalintegrál segítségével keresünk primitív függvényt. Az g függvény primitív függvényét a (2.1.48) képlet alapján fogjuk meghatározni a H

tartomány bármelyik pontjából nézve. Legyen $a := (1, 0)$ a kezdőpont. Ekkor (2.1.48) alapján az $f = (P_1, Q_1)$ primitív függvényére

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int_{a_1}^x P_1(t, a_2) dt + \int_{a_2}^y Q_1(x, t) dt = \int_1^x 1 + \frac{0}{t^2} dt + \int_0^y -\frac{1}{x} dt = \\ &= [t]_{t=1}^{t=x} - \left[\frac{1}{x} t \right]_{t=0}^{t=y} = x - 1 - \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (4.0.16)$$

adódik.

3. lépés. Differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározása. A 2.1.4. tétel alapján a (4.0.15) differenciálegyenlet megoldásai megegyeznek az

$$x - 1 - \frac{y}{x} = c \quad (c \in \mathbb{R})$$

implicit függvényegyenlet megoldásaival. A megoldás jelen esetben explicit alakban is megadható:

$$\varphi(x) = x^2 - x(c + 1) \quad (c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+).$$

Ellenőrizhető, hogy az értelmezési tartomány kiterjeszthető a valós számok halmazára.⁷

[Vissza a feladatokhoz](#)

iv) A differenciálegyenletet (2.1.45) alakra hozzuk ekvivalens átalakításokkal:

$$(e^y \cdot y + e^x) dx + (-e^x \cdot x - e^y) dy = 0,$$

majd leolvassuk, hogy

$$P(x, y) = e^y \cdot y + e^x \quad \text{és} \quad Q(x, y) = -e^x \cdot x - e^y.$$

1. lépés. Egzaktság ellenőrzése. P, Q értelmezési tartománya $U = \mathbb{R}^2$.

A P, Q függvények megfelelő parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} P'_y(x, y) &= e^y \cdot y + e^y \\ Q'_x(x, y) &= -e^x \cdot x - e^x, \end{aligned}$$

azaz a $P'_y(x, y) = Q'_x(x, y)$ feltétel nem teljesül, ezért multiplikátort keresünk. Mivel

$$P'_y(x, y) - Q'_x(x, y) = e^y \cdot y + e^y + e^x \cdot x + e^x = P(x, y) - Q(x, y) = (-1)Q(x, y) - (-1)P(x, y)$$

alakra hozható (lásd (2.1.58)), ezért létezik $\mu(x, y) = g(x)h(y)$ ($\mu > 0$) típusú multiplikátor. Nevezetesen a

$$\mu(x, y) = e^{\int -1 dx} \cdot e^{\int -1 y dy} = e^{-x} \cdot e^y$$

egy alkalmas multiplikátor. Ezért a 2.1.3/iv differenciálegyenletből a

$$(y \cdot e^{-x} + e^{-y}) dx + (-x \cdot e^{-y} - e^{-x}) dy = 0 \quad (4.0.17)$$

⁷A differenciálegyenlet nem csak egzaktta tehető, hanem elsőrendű inhomogén lineáris is, tehát az elsőrendű differenciálegyenletnél tanult módszerrel is megoldható.

egzakt differenciálegyenlethez jutunk, ahol

$$P_1(x, y) = y \cdot e^{-x} + e^{-y} \quad \text{és} \quad Q_1(x, y) = -x \cdot e^{-y} - e^{-x}.$$

P_1, Q_1 értelmezési tartománya szintén a $\mathbb{R}^2$ tartomány.

2. lépés. Primitív függvény keresése. *Vonalintegrál segítségével* keresünk primitív függvényt. A g függvény primitív függvényét a (2.1.48) képlet alapján fogjuk meghatározni $\mathbb{R}^2$ tartomány bármelyik pontjából nézve. Legyen $a := (0, 0)$ a kezdőpont. Ekkor (2.1.48) alapján $f = (P_1, Q_1)$ primitív függvényére

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int_{a_1}^x P_1(t, a_2) dt + \int_{a_2}^y Q_1(x, t) dt = \int_0^x 0 \cdot e^{-t} + e^{-0} dt + \int_0^y -x \cdot e^{-t} - e^{-x} dt = \\ &= [t]_{t=0}^{t=x} + x [e^{-t}]_{t=0}^{t=y} - e^{-x} [t]_{t=0}^{t=y} = x + x \cdot (e^{-y} - 1) + e^{-x} \cdot y = x \cdot e^{-y} + y \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

adódik.

3. lépés. Differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározása. A 2.1.4. tétel alapján a (4.0.17) differenciálegyenlet megoldásai megegyeznek a

$$x \cdot e^{-y} + y \cdot e^{-x} = c \quad (c \in \mathbb{R})$$

implicit függvényegyenlet megoldásaival. Ezek a függvények a 2.1.3/iv) differenciálegyenletnek is megoldásai.

[Vissza a feladatokhoz](#)

v) A differenciálegyenlet (2.1.45) alakú. Egyszerűen leolvasható, hogy

$$P(x, y) = 3xy + 2y^2 = y(3x + 2y) \quad \text{és} \quad Q(x, y) = 3xy + 2x^2 = x(3y + 2x).$$

1. lépés. Egzaktság ellenőrzése. P, Q értelmezési tartománya $U = \mathbb{R}^2$.

A P, Q függvények megfelelő parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} P'_y(x, y) &= 3x + 4y \\ Q'_x(x, y) &= 3y + 4x, \end{aligned}$$

azaz a $P'_y(x, y) = Q'_x(x, y)$ feltétel nem teljesül, ezért multiplikátort keresünk. Mivel

$$\frac{P'_y(x, y) - Q'_x(x, y)}{yQ(x, y) - xP(x, y)} = \frac{y - x}{xy \cdot (y - x)} = \frac{1}{xy}$$

xy függvénye, ezért létezik xy -től függő multiplikátor. Nevezetesen a

$$h(t) = e^{\int \frac{1}{t} dt} = e^{\ln |t|} = |t|$$

függvény ⁸ segítségével definiált

$$\mu(xy) = xy$$

egy alkalmas multiplikátor. Ezért a 2.1.3/v) differenciálegyenletből a

$$(3x^2y^2 + 2y^3) dx + (3x^2y^2 + 2x^3y) dy = 0 \quad (4.0.18)$$

⁸A multiplikátor esetében az abszolútérték jel elhagyható.

egzakt differenciálegyenlethez jutunk, ahol

$$P_1(x, y) = 3x^2y^2 + 2y^3 \quad \text{és} \quad Q_1(x, y) = 3x^2y^2 + 2x^3y.$$

P_1, Q_1 értelmezési tartománya szintén az $\mathbb{R}^2$ tartomány.

2. lépés. Primitív függvény keresése. *Vonalintegrál segítségével* keresünk primitív függvényt. A g függvény primitív függvényét a (2.1.48) képlet alapján fogjuk meghatározni a H tartomány bármelyik pontjából nézve. Legyen a kezdőpont $a := (0, 0)$. Ekkor (2.1.48) alapján $f = (P_1, Q_1)$ primitív függvényére

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int_{a_1}^x P_1(t, a_2) dt + \int_{a_2}^y Q_1(x, t) dt = \int_0^x 3t^2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0^3 dt + \int_0^y 3x^2 t^2 + 2x^3 t dt = \\ &= 3x^2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^{t=y} + 2x^3 \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=y} = x^2 \cdot y^3 + x^3 \cdot y^2 \end{aligned} \quad (4.0.19)$$

adódik.

3. lépés. Differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározása. A 2.1.4. tétel alapján a (4.0.18) differenciálegyenlet általános megoldásai az

$$x^2 \cdot y^3 + x^3 \cdot y^2 = c \quad (c \in \mathbb{R})$$

implicit függvényegyenlet megoldásaival egyeznek meg. Ezek a függvények a 2.1.3/v) differenciálegyenletnek is megoldásai. ⁹

[Vissza a feladatokhoz](#)

2.2.1. feladat megoldása

- i) A differenciálegyenlet hiányos (2.2.2) típusú, de mivel φ' sem szerepel az egyenletben, ezért megoldását két egymás utáni integrálással kapjuk.

$$\varphi'(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R}, x \in (-1, 1)),$$

melyből parciális, majd helyettesítési módszerrel

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int \arcsin x + c_1 dx = \int \arcsin x dx + c_1 x + c_2 = \int 1 \cdot \arcsin x dx + c_1 x + c_2 \\ &\quad \begin{matrix} f'(x) = 1 & g(x) = \arcsin x \\ f(x) = x & g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{matrix} \\ &= x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + c_1 x + c_2 = x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du + c_1 x + c_2 = \\ &\quad \begin{matrix} u = 1-x^2 & du = -2x dx \\ (x \in (-1, 1)) \end{matrix} \\ &= x \cdot \arcsin x + \sqrt{u} + c_1 x + c_2 = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c_1 x + c_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in (-1, 1)) \end{aligned}$$

[Vissza a feladatokhoz](#)

⁹A differenciálegyenletet x^2 -tel leosztva láthatjuk, hogy változóban homogén, tehát 2.1.1.2.1. fejezetben leírt módszerrel is megoldható.

- ii) A differenciálegyenlet hiányos, (2.2.3) típusú. Tegyük fel, hogy $\varphi'(x) \neq 0$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$). Ekkor φ' folytonossága miatt φ' állandó előjelű, így φ szigorúan monoton, és ezért φ invertálható, továbbá $\varphi^{-1} \in D$. Legyen $\psi := \varphi' \circ \varphi^{-1}$, és hajtsuk végre az $x := \varphi^{-1}(t)$ ($t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}$) helyettesítést. Ekkor (2.2.4) alapján 2.2.1/ii d.e.

$$2t\psi'\psi + \psi^2 + \psi^4 = 0 \quad (4.0.20)$$

alakba írható, ahol $\psi > 0$, vagy $\psi < 0$. A megoldást $t > 0$, illetve $t < 0$ esetben keressük. A (4.0.20) egyenlet szeparábilis. Beírva a $\psi' = \frac{d\psi}{dt}$ jelölést, rendezve és integrálva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{2\psi}{\psi^2(1+\psi^2)} d\psi &= -\frac{1}{t} dt \quad / \int \\ \int \frac{2\psi}{\psi^2(1+\psi^2)} d\psi &= -\int \frac{1}{t} dt \\ \int \frac{2\psi}{\psi^2(1+\psi^2)} d\psi &= \ln|t| + c_1 \quad (\tilde{c}_1 \in \mathbb{R}) \\ \psi^2 &= u \quad 2\psi d\psi = du \\ \int \frac{du}{u(u+1)} &= \int \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} du = \ln|t| + \tilde{c}_1 \\ \ln|u| - \ln|u+1| &= \ln|t| + \tilde{c}_1 \quad / e^\sim \quad u = \psi^2, c_1 := e^{\tilde{c}_1} \\ \frac{\psi^2}{\psi^2+1} &= c_1|t| \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+), \end{aligned}$$

melyből $\psi > 0$, $t > 0$ esetben

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{c_1 t}{1 - c_1 t}} \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+, t \in (0, \frac{1}{c_1})),$$

$\psi > 0$, $t < 0$ esetben

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{-c_1 t}{1 + c_1 t}} \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+, t \in (-\frac{1}{c_1}, 0)),$$

$\psi < 0$, $t > 0$ esetben

$$\psi(t) = -\sqrt{\frac{c_1 t}{1 - c_1 t}} \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+, t \in (0, \frac{1}{c_1})),$$

míg $\psi < 0$, $t < 0$ esetben

$$\psi(t) = -\sqrt{\frac{-c_1 t}{1 + c_1 t}} \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+, t \in (-\frac{1}{c_1}, 0))$$

függvények adódnak.

A továbbiakban csak a $\psi > 0$, $t > 0$ esettel foglalkozunk. A többi három eset analóg módon tárgyalható, melyet az olvasóra bízunk.

Visszaírva a $\psi := \varphi' \circ \varphi^{-1}$, $t = \varphi(x)$ helyettesítést kapjuk, hogy

$$\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(x))) = \sqrt{\frac{c_1 \varphi(x)}{1 - c_1 \varphi(x)}} \Rightarrow \varphi'(x) = \sqrt{\frac{c_1 \varphi(x)}{1 - c_1 \varphi(x)}} \quad (4.0.21)$$

azon $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon, melyre

$$\varphi(x) \in (0, \infty) \quad (x \in I).$$

A (4.0.21) differenciálegyenlet szintén szétválasztható változójú. Beírva a $\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}$ jelölést φ -nek x -től való függését nem jelölve, formálisan rendezve kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{1-c_1\varphi}{c_1\varphi}} d\varphi = dx \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+).$$

Mindkét oldalt integrálva a d.e. megoldását kapjuk:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1-c_1\varphi}{c_1\varphi}} d\varphi &= \int dx \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+ \\ \int \sqrt{\frac{1-c_1\varphi}{c_2\varphi}} d\varphi &= x + c_2 \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+, c_2 \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

A fennmaradó integrálást helyettesítéssel tudjuk meghatározni. Alkalmazva a

$$t = \sqrt{\frac{1-c_1\varphi}{c_1\varphi}} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{c_1} \cdot \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow d\varphi = -\frac{1}{c_1} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^2} 2t dt$$

helyettesítést kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1-c_1\varphi}{c_1\varphi}} d\varphi &= -\frac{1}{c_1} \int t \cdot \frac{1}{(1+t^2)^2} 2t dt = -\frac{2}{c_1} \int \frac{t^2 + 1 - 1}{(1+t^2)^2} dt = \\ &= -\frac{2}{c_1} \int \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = -\frac{2}{c_1} \left(\arctg t - \underbrace{\int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt}_{t=\operatorname{tg} u \quad dt = \frac{1}{\cos^2 u} du \quad (u \in (-\pi/2, \pi/2))} \right) \stackrel{1+\operatorname{tg}^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}}{=} \\ &= -\frac{2}{c_1} \arctg t + \frac{2}{c_1} \int \cos^2 u du = -\frac{2}{c_1} \arctg t + \frac{2}{c_1} \int \frac{1 + \cos(2u)}{2} du \\ &= -\frac{2}{c_1} \arctg t + \frac{2}{c_1} \left(\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4} \right) = -\frac{1}{c_1} \arctg t + \frac{\sin(2 \arctg t)}{2c_1} = \\ &= -\frac{1}{c_1} \arctg \sqrt{\frac{1-c_1\varphi}{c_1\varphi}} + \frac{\sin \left(2 \arctg \sqrt{\frac{1-c_1\varphi}{c_1\varphi}} \right)}{2c_1}. \end{aligned}$$

Az integrált visszaírva, az általános megoldást implicit alakban kapjuk:

$$-\frac{1}{c_1} \arctg \sqrt{\frac{1-c_1\varphi}{c_1\varphi}} + \frac{\sin \left(2 \arctg \sqrt{\frac{1-c_1\varphi}{c_1\varphi}} \right)}{2c_1} = x + c_2 \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+, c_2 \in \mathbb{R})$$

Vissza a feladatokhoz

- iii) A differenciálegyenlet hiányos, (2.2.3) típusú.¹⁰ Tegyük fel, hogy $\varphi'(x) \neq 0$ ($x \in \mathcal{D}_\varphi$). Ekkor φ' folytonossága miatt φ' állandó előjelű, így φ szigorúan monoton, és ezért φ invertálható, továbbá $\varphi^{-1} \in D$. Legyen $\psi := \varphi' \circ \varphi^{-1}$, és hajtsuk végre az $x := \varphi^{-1}(t)$ ($t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}$) helyettesítést. Ekkor (2.2.4) alapján 2.2.1/iii d.e.

$$\psi' \psi + t = 0 \tag{4.0.22}$$

¹⁰A differenciálegyenlet konstans együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletként is megoldható lenne.

alakba írható, ahol $\psi > 0$, vagy $\psi < 0$. A 2.2.1/iii egyenlet szeparábilis. Beírva a $\psi' = \frac{d\psi}{dt}$ jelölést, rendezve és integrálva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\psi d\psi &= -t dt & / \int \\ \int \psi d\psi &= \int -t dt \\ \frac{\psi^2}{2} &= -\frac{t^2}{2} + c_1 & (c_1 \in \mathbb{R}) \quad / \cdot 2, \sqrt{\cdot} \\ |\psi(t)| &= \sqrt{2c_1 - t^2} & (c_1 \in \mathbb{R}^+, t \in (-\sqrt{2c_1}, \sqrt{2c_1})).\end{aligned}$$

Visszaírva a $\psi := \varphi' \circ \varphi^{-1}$, $t = \varphi(x)$ helyettesítést kapjuk, hogy

$$|\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(x)))| = \sqrt{2c_1 - \varphi^2(x)} \Rightarrow |\varphi'(x)| = \sqrt{2c_1 - \varphi^2(x)} \quad (4.0.23)$$

azon I intervallumon, melyre

$$\varphi(x) \in (-\sqrt{2c_1}, \sqrt{2c_1}) \quad (x \in I)$$

A (2.2.7) differenciálegyenlet szintén szétválasztható változójú. Beírva a $\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}$ jelölést, rendezve kapjuk $\varphi' > 0$ esetben, hogy

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2c_1\varphi^2 - 1}} = dx \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+).$$

Mindkét oldalt integrálva a d.e. megoldását kapjuk:

$$\begin{aligned}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2c_1\varphi^2 - 1}} &= \int dx & / t = 2c_1 - \varphi^2 \\ \int \frac{1}{\sqrt{2c_1}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{2c_1}}} d\varphi &= \int dx & / t = \frac{\varphi}{\sqrt{2c_1}}, \quad dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{2c_1}} \\ \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt &= x + c_2 & (c_2 \in \mathbb{R}) \\ \arcsin t &= x + c_2 & / \sin \\ t &= \sin(x + c_2) & / t = \frac{\varphi}{\sqrt{2c_1}} \\ \frac{\varphi}{\sqrt{2c_1}} &= \sin(x + c_2) & (c_1 \in \mathbb{R}^+, c_2 \in \mathbb{R}),\end{aligned}$$

ahonnan rendezéssel φ meghatározható:

$$\varphi(x) = \sqrt{2c_1} \sin(x + c_2) \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+, c_2 \in \mathbb{R}, x \in (-\frac{\pi}{2} - c_2 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} - c_2 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}).$$

A $\varphi' < 0$ esetben φ -re a

$$\varphi(x) = \sqrt{2c_1} \sin(-x + c_2) \quad (c_1 \in \mathbb{R}^+, c_2 \in \mathbb{R}, x \in (c_2 - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, c_2 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}).$$

függvény adódik.

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a megoldások „összeragaszthatók”, az értelmezési tartományok kiterjeszthetők a valós számok halmazára. Az addíciós képletet alkalmazva az általános alak átírható

$$\varphi(x) = d_1 \sin x + d_2 \cos x \quad (d_1, d_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$$

alakba.¹¹

[Vissza a feladatokhoz](#)

- iv) A differenciálegyenlet hiányos, (2.2.2) típusú. Először az $I_1 = (0,1)$ és $I_2 = (1, +\infty)$ intervallumon keresünk megoldást. Végrehajtjuk a $\varphi' = \phi$ helyettesítést:

$$\phi'(x)x \ln x - \phi(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi'(x) - \frac{1}{(x \ln x)} \phi(x) = 0 \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2).$$

Ez a differenciálegyenlet elsőrendű homogén, lineáris. Mivel

$$-\int_{u=\ln x} \frac{1}{(x \ln x)} dx = -\int \frac{1}{u} du = -\ln |u| = -|\ln x| \quad (x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2),$$

$du = \frac{1}{x} dx$

ezért a 2.1.2. tétel alapján általános megoldása

$$\phi(x) = c_1 \ln x \quad (c_1 \in \mathbb{R}, x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2).$$

Visszaírva a $\varphi' = \phi$ helyettesítést, a

$$\varphi'(x) = c_1 \ln x \quad (c_1 \in \mathbb{R}, x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2)$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapjuk. Integrálással a differenciálegyenletünk általános megoldása adódik:

$$\varphi(x) = c_1 \int \ln x dx = c_1 x \ln x - c_1 \int 1 dx = c_1 x \ln x - c_1 x + c_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in I_1 \text{ vagy } x \in I_2).$$

$\begin{matrix} f'(x) = 1 & g(x) = \ln x \\ f(x) = x & g'(x) = \frac{1}{x} \end{matrix}$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a megoldások „összeilleszthetők”, tehát a

$$\varphi(x) = c_1 x \ln x - c_1 x + c_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$$

függvények a 2.2.1/iv d.e. megoldásai.

[Vissza a feladatokhoz](#)

2.2.2. feladat megoldása

- i) A differenciálegyenlet konstans együtthatós másodrendű inhomogén lineáris.

1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A homogén egyenlet

$$\varphi''(x) - 2\varphi'(x) = 0$$

megoldását $\varphi(x) = e^{\lambda x}$ alakban keressük. φ -t behelyettesítve, a

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} = \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} (\lambda^2 - 2\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

karakterisztikus egyenlethez jutunk, melynek két különböző valós gyöke van:

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = 2.$$

Tehát a homogén egyenlet két lineárisan független megoldása:

$$\varphi_1(x) = e^{0 \cdot x} = 1 \quad \text{és} \quad \varphi_2(x) = e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

melyből az általános megoldásra

¹¹ Ilyen alakban kapjuk meg a megoldást, ha lineáris differenciálegyenletként oldjuk meg.

$$\varphi_h^{\hat{a}}(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = c_1 + c_2e^{2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$$

adódik.

2. lépés. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével. A partikuláris megoldást

$$\varphi_0(x) := \varphi_{ih}^p(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x) = c_1(x) + c_2(x)e^{2x}$$

alakban keressük. c_1, c_2 -re teljesülnie kell a (2.2.24) egyenletrendszernek. Keressük tehát azon függvényeket, melyekre teljesül a

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) + c_2'(x)e^{2x} &= 0 \\ c_1'(x)0 + c_2'(x)(2e^{2x}) &= 3x+1 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer, melynek megoldása

$$c_2'(x) = \frac{1}{2}(3x+1)e^{-2x} \Rightarrow c_1'(x) = -\frac{1}{2}(3x+1).$$

Ezekből az egyenletekből c_1 és c_2 integrálással meghatározható:

$$c_1(x) = -\frac{1}{2} \int (3x+1)dx = -\frac{1}{2}\left(3\frac{x^2}{2} + x\right) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{x}{2}$$

és

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \int \frac{1}{2}(3x+1)e^{-2x}dx = \frac{1}{2}(3x+1) \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \frac{3}{4} \int e^{-2x}dx = \\ &\quad \begin{matrix} f(x) = \frac{1}{2}(3x+1) & g'(x) = e^{-2x} \\ f'(x) = \frac{3}{2} & g(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \\ &= -\frac{1}{4}(3x+1)e^{-2x} + \frac{3}{8}e^{-2x} = -\frac{6x-1}{8}e^{-2x}. \end{aligned}$$

A partikuláris megoldás tehát

$$\varphi_{ih}^p(x) = c_1(x) + c_2(x)e^{2x} = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{x}{2} - \frac{6x-1}{8}e^{-2x}e^{2x} = -\frac{6x^2+10x-1}{8} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. Az első két lépés eredményét összeadva az 2.2.2/?? inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

$$\varphi_{ih}^{\hat{a}}(x) = \varphi_h^{\hat{a}}(x) + \varphi_{ih}^p(x) = c_1 + c_2e^{2x} - \frac{6x^2+10x-1}{8} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).$$

[Vissza a feladatokhoz](#)

ii) A differenciálegyenlet konstans együtthatós másodrendű inhomogén lineáris.

1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A homogén egyenlet

$$\varphi''(x) + \varphi(x) = 0$$

megoldását $\varphi(x) = e^{\lambda x}$ alakban keressük. φ -t behelyettesítve, a

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} (\lambda^2 + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0$$

karakterisztikus egyenlethez jutunk, melynek két különböző komplex gyöke van:

$$\lambda_1 = i \quad \text{és} \quad \lambda_2 = -i.$$

Tehát a homogén egyenlet két lineárisan független megoldása:

$$\varphi_1(x) = e^{0 \cdot x} \cos x = \cos x \quad \text{és} \quad \varphi_2(x) = e^{0 \cdot x} \sin x = \sin x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

melyből az általános megoldásra

$$\boxed{\varphi_h^{\text{a}}(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})}$$

adódik.

2. lépés. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével. Az inhomogenitásért felelős q függvény értelmezési tartománya nem intervallum. Megoldásokat tehát a $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) intervallumokon keressük.

A partikuláris megoldást

$$\varphi_0(x) := \varphi_{ih}^p(x) = c_1(x) \varphi_1(x) + c_2(x) \varphi_2(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$$

alakban keressük. c_1, c_2 -re teljesülnie kell a (2.2.24) egyenletrendszernek. Keressük tehát azon függvényeket, melyekre teljesül a

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x &= 0 \\ c_1'(x)(-\sin x) + c_2'(x) \cos x &= \operatorname{tg} x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer. Az első egyenletet $\sin x$ -szel, a másodikat $\cos x$ -szel megszorozva és a két egyenletet összeadva,

$$c_2'(x) \sin^2 x + c_2'(x) \cos^2 x = \sin x \quad \Rightarrow \quad c_2'(x) = \sin x$$

adódik. Ezt visszahelyettesítve az elsőbe, megkapjuk c_1' -t:

$$c_1'(x) = -c_2'(x) \frac{\sin x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad c_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Ezekből az egyenletekből c_1 és c_2 integrálással meghatározható:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int_{u=\sin x} -\frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = - \int \frac{u^2}{1-u^2} du = \int 1 + \frac{1}{(u-1)(u+1)} du = \\ &= \int 1 + \frac{1}{2} \frac{(u+1) - (u-1)}{(u-1)(u+1)} du = u + \frac{1}{2} \int \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} du = u + \frac{1}{2} (\ln |u-1| - \ln |u+1|) = \\ &= u + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| = \sin x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| \\ c_2(x) &= \int \sin x dx = -\cos x. \end{aligned}$$

A partikuláris megoldás tehát

$$\varphi_{ih}^p(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x = \sin x \cos x + \frac{\cos x}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| - \sin x \cos x = \frac{\cos x}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right|,$$

ahol $x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. Az első két lépés eredményét összeadva az 2.2.2/ii inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

$$\varphi_{ih}^{\hat{a}}(x) = \varphi_h^{\hat{a}}(x) + \varphi_{ih}^p(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \frac{\cos x}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right|,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, és $x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

[Vissza a feladatokhoz](#)

iii) A differenciálegyenlet konstans együtthatós másodrendű inhomogén lineáris.

1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A homogén egyenlet

$$\varphi''(x) - 4\varphi'(x) + 4\varphi(x) = 0$$

megoldását $\varphi(x) = e^{\lambda x}$ alakban keressük. Így a

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 4\lambda e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} (\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

karakterisztikus egyenlethez jutunk, melynek két azonos valós gyöke van: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Tehát a homogén egyenlet két lineárisan független megoldása:

$$\varphi_1(x) = e^{2x} \quad \text{és} \quad \varphi_2(x) = x e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

melyből az általános megoldásra

$$\varphi_h^{\hat{a}}(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$$

adódik.

2. lépés. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével. A partikuláris megoldást

$$\varphi_0(x) := \varphi_{ih}^p(x) = c_1(x) \varphi_1(x) + c_2(x) \varphi_2(x) = c_1(x) e^{2x} + c_2(x) x e^{2x}$$

alakban keressük. c_1, c_2 -re teljesülnie kell a (2.2.24), egyenletrendszernek. Keressük tehát azon függvényeket, melyekre teljesül a

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) e^{2x} + c_2'(x) x e^{2x} &= 0 \\ c_1'(x) (2e^{2x}) + c_2'(x) (e^{2x} + 2x e^{2x}) &= x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer. Az első egyenletet 2-vel megszorozva és a másodikból az első kivonva kapjuk, hogy

$$c_2'(x) e^{2x} = x \quad \Rightarrow \quad c_2'(x) = x e^{-2x},$$

ezt visszahelyettesítve az elsőbe, megkapjuk c_1' -t:

$$c_1'(x) = -x c_2'(x) \quad \Rightarrow \quad c_1'(x) = -x^2 e^{-2x}.$$

Ezekből az egyenletekből c_1 és c_2 parciális integrálással meghatározható:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int -x^2 e^{-2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \int x e^{-2x} dx = \\ &\quad \begin{matrix} f(x) = -x^2 & g'(x) = e^{-2x} \\ f'(x) = -2x & g(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{matrix} \quad \begin{matrix} f(x) = x & g'(x) = e^{-2x} \\ f'(x) = 1 & g(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{matrix} = \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \left(-\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \right) = \frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \left(-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right) \\ c_2(x) &= \int x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x}. \end{aligned}$$

A partikuláris megoldás tehát

$$\varphi_{ih}^p(x) = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)xe^{2x} = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)x = \frac{x+1}{4} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. Az első két lépés eredményét összeadva az 2.2.2/iii inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:

$$\varphi_{ih}^a(x) = \varphi_h^a(x) + \varphi_{ih}^p(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{x+1}{4} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).$$

[Vissza a feladatokhoz](#)

iv) A differenciálegyenlet Euler-féle másodrendű inhomogén lineáris.

1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A

$$x^2 \varphi''(x) - 3x \varphi'(x) + 3\varphi(x) = 0$$

homogén egyenlet megoldását $\varphi(x) = x^\lambda$ alakban keressük. φ -t visszahelyettesítve, a

$$\lambda(\lambda-1)x^\lambda - 3\lambda x^\lambda + 3x^\lambda = \underbrace{x^\lambda}_{\neq 0} (\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

karakterisztikus egyenlethez jutunk, melynek két különböző valós gyöke van:

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3.$$

Tehát a homogén egyenlet két lineárisan független megoldása:

$$\varphi_1(x) = x \quad \text{és} \quad \varphi_2(x) = x^3 \quad (x \in \mathbb{R}^+),$$

melyből az általános megoldásra

$$\varphi_h^a(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) = c_1 x + c_2 x^3 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+)$$

adódik.

2. lépés. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megkeresése konstans variálás módszerével. A partikuláris megoldást

$$\varphi_0(x) := \varphi_{ih}^p(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x) = c_1(x)x + c_2(x)x^3$$

alakban keressük. c_1, c_2 -re teljesülnie kell a (2.2.24) egyenletrendszernek. Keressük tehát azon függvényeket, melyekre teljesül a

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x)x + c_2'(x)x^3 &= 0 \\ c_1'(x) + c_2'(x)(3x^2) &= x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer. Az első egyenletből $c_1'(x) = -x^2 c_2'(x)$ adódik, melyet a másodikba helyettesítve kapjuk, hogy

$$-x^2 c_2'(x) + 3x^2 c_2'(x) = x \Rightarrow c_2'(x) = \frac{x}{2},$$

ezt visszahelyettesítve az elsőbe, megkapjuk c_1' -t:

$$c_1'(x) = -x^2 c_2'(x) \Rightarrow c_1'(x) = -\frac{x^3}{2}$$

Ezekből az egyenletekből c_1 és c_2 integrálással meghatározható:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int -\frac{x^3}{2} dx = -\frac{x^4}{8} \\ c_2(x) &= \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

A partikuláris megoldás tehát

$$\varphi_{ih}^p(x) = \left(-\frac{x^4}{8}\right)x + \left(\frac{x^2}{4}\right)x^3 = \frac{x^5}{8} \quad (x \in \mathbb{R}^+).$$

3. lépés. Az inhomogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. Az első két lépés eredményét összeadva a 2.2.2/iv inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk:¹²

$$\varphi_{ih}^{\hat{a}}(x) = \varphi_h^{\hat{a}}(x) + \varphi_{ih}^p(x) = c_1 x + c_2 x^3 + \frac{x^5}{8} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+).$$

[Vissza a feladatokhoz](#)

v) A differenciálegyenlet másodrendű homogén lineáris.

1. lépés. A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A

$$(2x+1)^2 \varphi''(x) - 4(2x+1) \varphi'(x) + 8\varphi(x) = 0$$

homogén egyenlet megoldását $\varphi(x) = (2x+1)^\lambda$ alakban keressük. φ -t visszahelyettesítve, a

$$4\lambda(\lambda-1)(2x+1)^\lambda - 8\lambda(2x+1)^\lambda + 8(2x+1)^\lambda = \underbrace{(2x+1)^\lambda}_{\neq 0} (4\lambda^2 - 12\lambda + 8) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

karakterisztikus egyenlethez jutunk, melynek két különböző valós gyöke van:

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2.$$

Tehát a homogén egyenlet két lineárisan független megoldása:

$$\varphi_1(x) = 2x+1 \quad \text{és} \quad \varphi_2(x) = (2x+1)^2 \quad (x \in \mathbb{R}^+),$$

melyből az általános megoldásra

¹²Jelen esetben a differenciálegyenletnek az itt kapott függvények a teljes valós számok halmazán megoldásai.

$$\varphi_h^{\mathfrak{A}}(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = c_1(2x+1) + c_2(2x+1)^2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$$

adódik.

[Vissza a feladatokhoz](#)

Irodalomjegyzék

- [1] Bajcsay Pál - Fazekas Ferenc: *Műszaki matematikai gyakorlatok/Közönséges differenciálegyenletek I-II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981
- [2] Bronson, Richard: *Differential Equations*, Schaum's easy Outlines, Mc Graw-Hill, New York, 2003
- [3] J. Collins, Peter: *Differential and Integral Equations*, Oxford University Press, New York, 2006
- [4] Leindler László: *Analízis*, JATE Kiadó, Szeged, 1990
- [5] Németh József: *Analízis példatár II.*, JATEPress, 1999.
- [6] Pál Jenő - Schipp Ferenc - Simon Péter: *Analízis II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997
- [7] Scharnitzky Viktor: *Differenciálegyenletek*, Bolyai-könyvek sorozat, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2003
- [8] Tóth János - Simon L. Péter: *Differenciálegyenletek*, Typotex, Budapest, 2009
- [9] William E - Boyce - Richard C. - Di Prima: *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems* (7th ed), John Wiley & Sons, Inc., ISBN 0-471-31999-6