Analízis
Gyakorlat támogató jegyzet

Király Balázs

2011. május 24.

Tartalomjegyzék

Előszó

Én már láttam a Végtelent. – mondta az idegen.
Nincs benne semmi különleges.[1]

Terry Pratchett

Jelen jegyzet a *TÁMOP-4.1.2-08/1/A Tananyagfejlesztés* című pályázat keretében készült első sorban a Pécsi Tudományegyetem Természettudományi Karának Programtervező Informatikus hallgatói számára, de könnyen adaptálható A Gazdasági Informatikus, Fizika BSc képzések Kalkulus gyakorlataihoz.

A jegyzet minden fejezete megfelel egy-egy 90 perces gyakorlat anyagának és tartalmazza a témakörhöz tartozó, egyéni feldolgozásra szánt feladatokat. Az Analízis I. és Analízis II. rész esetében ez illeszkedik a heti óraszámhoz, Analízis III. rész esetén egy fejezet feladatait két hét alatt dolgozzuk fel.

A feladatok megoldásainak végét ♢ szimbólummal, a bizonyítások végét pedig □ szimbólummal jelöltük. Az egyéni feldolgozásra szánt feladatok (Házi Feladatok) megoldásait külön alfejezetben közöltük, hogy lehetőséget nyújtsunk az önálló megoldásra.

A jegyzet két formátumban készült. Az elektronikus publikálásra alkalmas böngészhető pdf formátum mellett elérhető egy a hiperlinkektől megfosztott formátumban is, melyet nyomtatásra alkalmasabb, átláthatóbb, a hagyomásnyos könyvformátumokhoz jobban illeszkedő tagolással készítettünk.

A jegyzethez a közeljövőben készül továbbá egy *java* nyelven írt program, melynek segítségével ellenőrző dolgozatok feladatsorait generálhatjuk. A próba feladatsorok a Programtervező Informatikus képzés analízis zárthelyi dolgozataihoz illeszkednek. Ezek időpontjai a képzés keretén belül:

Analízis I.	**1. dolgozat**	7. gyakorlati héten	1-6. fejezet anyagából	90 perc
	2. dolgozat	12. gyakorlati héten	7-10. fejezet anyagából	90 perc
Analízis II.	**1. dolgozat**	7. gyakorlati héten	11-16 fejezet anyagából	90 perc
	2. dolgozat	12. gyakorlati héten	17-21. fejezet anyagából	90 perc
Analízis III.	**dolgozat**	13. gyakorlati héten	22-27 fejezet anyagából	90 perc

Ez úton szeretném megköszönni Dr. Eisner Tímeának a tananyag összeállítása és rendszerezése során nyújtott segítségét.

[1] Az idézet Terry Pratchett Soul Music című regényéből való. Az eredeti: ”I'VE SEEN THE INFINITE, said the stranger. IT'S NOTHING SPECIAL.”

Első rész

Analízis I.

1. fejezet

Számhalmazok tulajdonságai, bizonyítási módszerek

1.1. Gyakorlat

Teljes indukció elve:

1.1. Tétel. *Ha a természetes számokra vonatkozó valamely állítás*

a) igaz a 0 *számra,*

b) abból, hogy az n *természetes számra igaz az állítás, következik, hogy az* $n+1$ *számra is igaz,*

akkor az állítás igaz minden természetes számra.

1.1. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy az első* $n+1$ *természetes szám összege* $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$*, azaz*

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0+1+\cdots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Megoldás.

i) $n=0$ esetén az állítás igaz, hiszen

$$0 = \sum_{k=0}^{0} k = \frac{0\cdot(0+1)}{2} = 0.$$

ii) Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén az állítás teljesül:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}. \quad \text{(indukciós feltétel)} \tag{1.1}$$

iii) Igazoljuk az állítást $n+1$-re!

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = (n+1)+\sum_{k=0}^{n} k \overset{(1.1)}{=} (n+1)+\frac{n(n+1)}{2} =$$
$$= \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

Így a teljes indukció elve alapján az állítás igaz minden $n \in \mathbb{N}$ számra. ♢

1.2. Feladat. *Bizonyítsuk be a Bernoulli-féle egyenlőtlenséget, azaz, hogy minden* $n \in \mathbb{N}^*$ *és* $h \in \mathbb{R}$ *esetén*

a) $1+nh \le (1+h)^n$, *ha* $h > -1$,

b) $(1+h)^n \le 1+2nh$, *ha* $0 < h < \frac{1}{2n}$.

Megoldás.

a) i) $n = 1$ esetén $1+h \le (1+h)^1 = 1+h$.

ii) Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén az állítás igaz:

$$1+nh \le (1+h)^n. \tag{1.2}$$

iii) Igazoljuk $n+1$-re

$$\begin{aligned}(1+h)^{n+1} &= \underbrace{(1+h)^n}_{>0} \cdot \underbrace{(1+h)}_{>0} \overset{(1.2)}{\ge} (1+nh)(1+h) = \\ &= 1+nh+h+nh^2 = 1+(n+1)h + \underbrace{nh^2}_{\ge 0} \ge \\ &\ge 1+(n+1)h.\end{aligned}$$

Így a teljes indukció elve alapján az állítás igaz minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra.

b) Segédegyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{1+h} > 1-h, \quad (h > -1;\ h \neq 0) \tag{1.3}$$

$$1-nh > \frac{1}{1+2nh}.\ (0 < h < \frac{1}{2n}) \tag{1.4}$$

Mivel $1+h > 0$, ezért (1.3) ekvivalens a következő, nyilvánvalóan igaz egyenlőtlenséggel

$$1 > (1-h)(1+h) = 1 - \underbrace{h^2}_{\ge 0}.$$

Mivel $1+2nh > 0$, ezért (1.4) ekvivalens a következő összefüggéssel

$$(1-nh)(1+2nh) > 1.$$

Felbontva a zárójelet kapjuk, hogy

$$1+2nh-nh-2n^2h^2 = 1+\overset{>0}{nh}(1-\underset{>0}{2nh}) > 1.$$

Az igazolandó állítás bal oldalának reciprokát a következőképpen becsülhetjük:

$$\frac{1}{(1+h)^n} \overset{(1.3)}{\ge} (1-h)^n \overset{(a)}{\ge} 1-nh > \frac{1}{1+2nh} > 0.$$

Kihasználva, hogy pozitív számok között éppen fordított reláció áll fent, mint reciprokaik között kapható az állítás:

$$(1+h)^n \le 1+2nh.$$

◊

1.3. Feladat. *Mutassuk meg, hogy* $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ *számokra*

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

(Általánosított háromszög-egyenlőtlenség.)

1. Megoldás:

Megoldás.

i) $n = 0$ és $n = 1$ esetben az állítás semmitmondó.
$n = 2$ esetén

$$|x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2|.$$

Az abszolútérték előadáson igazolt tulajdonságai alapján a fenti állítás egyszerűen igazolható:

$$\left.\begin{array}{ccccc} -|x_1| & \le & x_1 & \le & |x_1| \\ -|x_2| & \le & x_2 & \le & |x_2| \end{array}\right\} \Leftrightarrow -(|x_1| + |x_2|) \le x_1 + x_2 \le |x_1| + |x_2|.$$

Innen szintén az abszolútérték tulajdonságai alapján következik az állítás

$$|x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2|.$$

ii) Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ értékre az állítás igaz, azaz

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

iii) Igazoljuk $n + 1$-re

$$\begin{aligned} |\underset{X}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} + \underset{Y}{x_{n+1}}| &\overset{(i)}{\le} |X| + |Y| = \\ = |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}| &\overset{(ii)}{\le} |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| + |x_{n+1}|. \end{aligned}$$

Így a teljes indukció elve alapján az állítás igaz minden $n \in \mathbb{N}$ indexre. $\diamondsuit$

2. Megoldás:

A teljes indukciót az indukciós elv másik megfogalmazása alapján végezzük:

1.2. Tétel. *Ha a természetes számokra vonatkozó valamely állítás*

a) igaz a 0 *számra,*

b) abból, hogy minden az n *természetes számnál kisebb természetes szám esetén igaz az állítás, következik, hogy az* n *számra is igaz,*

akkor az állítás igaz minden természetes számra.

Megoldás.

i) $n = 0$ esetén az állítás érdektelen, $n = 1$ esetben pedig nyílvánvaló.

ii) Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ értékre és minden $n' < n$ esetére bizonyítottuk az állítást.

iii) Igazoljuk $n+1$-re:

Legyen $1 \leq k \leq n$

$$|(\underbrace{x_1+x_2+\cdots+x_k}_{X})+(\underbrace{x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_n+x_{n+1}}_{Y})| \overset{(ii)}{\leq} |X|+|Y| =$$

$$= |x_1+x_2+\cdots+x_k|+|x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_n+x_{n+1}| \overset{(ii)}{\leq} |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|+|x_{n+1}|.$$

Így a teljes indukció elve alapján az állítás igaz minden $n \in \mathbb{N}$ indexre. ♢

1.3. Megjegyzés. *A számok abszolútértékének előadáson megismert tulajdonságai közül még nem bizonyítottuk az alábbi összefüggést:*

$$||x|-|y|| \leq |x-y| \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítás.

$$|x| = |y+(x-y)| \overset{(3.i)}{\leq} |y|+|x-y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$$

x és y szerepét felcserélve a fenti gondolatmenet alapján adódik:

$$-(|x|-|y|) = |y|-|x| \leq |y-x| = |x-y| \Rightarrow -|x-y| \leq |x|-|y|$$

A két becslést összevetve kapható az állítás. □

1.4. Definíció. *A $K \in \mathbb{R}$ szám a H halmaz* ***felső korlát****ja, ha minden $h \in H$ esetén $h \leq K$ teljesül. Egy halmaz felső korlátjai közül a legkisebbet* ***felső határ****nak, vagy szuprémumnak nevezzük. (***Alsó korlát*** és* ***alsó határ*** *vagy infimum hasonlóan értelmezhető.)*

1.4. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi számhalmazok alsó- és felső határát!*

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}, \ n > 0 \right\} \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : \ -1 < x < 1\}$$

Megoldás.

A) Sejtés: $\sup A = 1$.

Bizonyítás.

i) Az 1 egy jó felső korlát, hiszen

$$\forall a \in A \ a \leq 1, \text{ mivel } n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1$$

ii) Az 1 a legkisebb felső korlát, vagyis

$$\forall K < 1 \text{ esetén } \exists a \in A : \ a > K.$$

$a = 1 = \frac{1}{1} \in A$ minden K-ra ilyen.

Azaz $K = 1$ valóban a legkisebb felső korlát. (Az állítás indokolható lett volna azzal is, hogy $1 \in A$ így a halmaz maximuma és szuprémuma is egyben.) □

Sejtés: $\inf A = 0$.

Bizonyítás.

i) A 0 egy jó alsó korlát, mivel

$$\forall a \in A \ a \geq 0. \text{ nyilvánvaló, hiszen } 1, n \geq 0 \Rightarrow \ a = \frac{1}{n} \geq 0.$$

ii) A 0 a legnagyobb alsó korlát, vagyis

$$\forall k > 0 \text{ esetén } \exists a \in A: \ a < k.$$

Legyen $b = \frac{1}{k} \in \mathbb{R}^+$. Az archimédeszi axióma alapján $1, b \in \mathbb{R}^+$ számokhoz $\exists n \in \mathbb{N}\ b < n \cdot 1$. Ekkor

$$a := \frac{1}{n} < \frac{1}{b} = k.$$

Azaz $k = 1$ valóban a legnagyobb alsó korlát. □

B) Sejtés: $\sup B = 1$.

Bizonyítás.

i) Az 1 egy jó felső korlát, ami B definíciójából nyilvánvaló.

ii) Az 1 a legkisebb felső korlát, azaz

$$\forall K < 1 \text{ esetén } \exists b \in B: \ b > K.$$

Ha $K < 0$, akkor nyilvánvalóan létezik ilyen b. Vizsgáljuk a $0 < K < 1$ esetet. Ekkor legyen $c = \frac{1}{1-K}$. Az archimédeszi axióma értelmében, (vagy mert $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos) $\exists n \in \mathbb{N}$, amelyre

$$c < n \cdot 1 \ \Leftrightarrow \ 1 - K = \frac{1}{c} > \frac{1}{n} \ \Leftrightarrow \ K < 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} =: b \in \mathbb{Q}.$$

Továbbá $b \in B$ is igaz, hiszen $b \in \mathbb{Q}$ és $-1 < b < 1$ is teljesül. □

A bizonyítás során használhattuk volna azt a tételt, mely szerint minden intervallum tartalmaz racionális számot, így a $(K,1)$ intervallum is.

Az $\inf B = -1$ sejtés hasonlóan igazolható.

1.5. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\inf \{-x: \ x \in X\} = -\sup X.$$

Megoldás.
Legyen $\alpha := -\sup X$ és legyen $Y := \{-x: \ x \in X\}$. Ekkor

i) Az α az Y egy jó alsó korlátja, mivel

$$-\alpha = \sup X \ \Rightarrow \ \forall x \in X \ -\alpha \geq x \ \Leftrightarrow \ \alpha \leq -x \ \forall x \in X \Leftrightarrow \ \alpha \leq y \ \forall y \in Y.$$

ii) Az α az Y infimuma, azaz

$$\forall k > \alpha \text{ esetén } \exists y_0 \in Y: \; y_0 < k.$$

Mivel $-\alpha$ az X szuprémuma ezért bármely $K < -\alpha$ esetén létezik $x \in X$ elem, hogy $x > K$.

Legyen $K_0 = -k < -\alpha$ és legyen x_0 a fentiek alapján K_0-hoz talált X-beli elem, azaz

$$x_0 > K_0 \Leftrightarrow k = -K > \alpha \; \exists y_0 = -x_0 \in Y \; y_0 = -x_0 < -K = k.$$

Azaz α valóban az Y halmaz infimuma. $\diamondsuit$

1.6. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sup \underbrace{\{x+y: \quad x \in X, \; y \in Y\}}_{=:A} = \underbrace{\sup X}_{\alpha} + \underbrace{\sup Y}_{\beta}.$$

Megoldás.

i) $\alpha+\beta$ egy jó felső korlát, hiszen $x \le \alpha$ $(\forall x \in X)$ és $y \le \beta$ $(\forall y \in Y)$. A két egyenlőtlenséget összeadva:

$$x+y \le \alpha+\beta \quad \forall x \in X, \; \forall y \in Y.$$

ii) $\alpha+\beta$ a legkisebb felső korlát, azaz

$$\forall K < \alpha+\beta \text{ esetén } \exists a \in A, \text{ amelyre } a > K.$$

Mivel $K < \alpha+\beta$ ezért létezik $k_1 < \alpha$ és létezik $k_2 < \beta$, hogy $K = k_1+k_2$. (Megjegyeznénk, hogy K felbontásai közül nem mind teljesíti egyszerre mindkét feltételt, de garantálható, hogy létezik olyan felbontás, amely igen.) Ekkor

$$\begin{aligned} k_1 < \alpha = \sup X \quad &\Rightarrow \quad \exists x_0 \in X, \; x_0 > k_1, \\ k_2 < \beta = \sup Y \quad &\Rightarrow \quad \exists y_0 \in Y, \; y_0 > k_2. \end{aligned}$$

Így $a := x_0+y_0 \in A$ esetén $a > K = k_1+k_2$ teljesül. $\diamondsuit$

1.7. Feladat. *Írjuk fel és igazoljuk a számtani- és mértani közép közötti összefüggést* n=2 *esetben.*

Megoldás.
Legyen $x_1, x_2 \ge 0$, ekkor

$$\sqrt{x_1 x_2} \le \frac{x_1+x_2}{2},$$

vagyis nem-negatív számok mértani közepe kisebb egyenlő, mint a számtani közepük.

Bizonyítás.

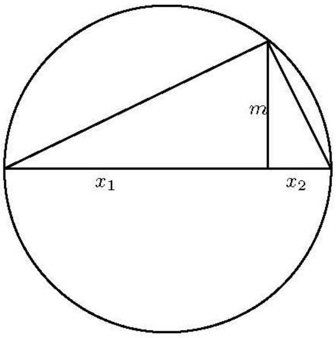
$$\begin{aligned} 0 \le \sqrt{x_1x_2} \quad &\le \quad \frac{x_1+x_2}{2} \qquad\qquad /(\;)^2 \\ x_1x_2 \quad &\le \quad \frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4} \\ 4x_1x_2 \quad &\le \quad x_1^2+2x_1x_2+x_2^2 \\ 0 \quad &\le \quad x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 \\ 0 \quad &\le \quad (x_1-x_2)^2, \end{aligned}$$

ami nyilvánvalóan minden $x_1, x_2 \ge 0$ számra igaz. $\square$

1.5. Megjegyzés.

1. *Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha* $x_1 = x_2$*, ez a fenti bizonyítás alapján is nyilvánvaló.*

2. *A geometriai bizonyítás elegáns, de az algebrai megoldás könnyebben általánosítható.*



$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2}{2} &= R \\ \sqrt{x_1 x_2} &= m \\ m &\leq R \quad \textit{mindig igaz.} \end{aligned}$$

3. *Az általánosított összefüggés bizonyításától eltekintünk, de elolvasása tanulságos. Lásd: [15] 21.o.*

4. *Az összefüggés ismerete szükséges, csak bizonyítani nem kell.*

A számtani- és mértani közép közötti összefüggés:

> *Legyen* $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$ *és* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$. *Ekkor*
>
> $$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

1.2. Házi Feladatok

1.1. Házi Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}.$$

megoldás

1.2. Házi Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}.$$

megoldás

1.3. Házi Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}.$$

megoldás

1.4. Házi Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$1^3+3^3+\cdots+(2n-1)^3 = n^2\cdot(2n^2-1),$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2\cdot(2n^2-1).$$

megoldás

1.5. Házi Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n! = (n+1)!-1,$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1.$$

megoldás

1.6. Házi Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

megoldás

1.7. Házi Feladat. *Határozzuk meg az alábbi számhalmazok alsó- és felső határát.*

$$A=\left\{\frac{(-1)^n}{n}:\ n\in\mathbb{N},\ n>0\right\}\qquad B=\left\{\frac{1}{n}+(-1)^n\cdot n:\ n\in\mathbb{N},\ n>0\right\}$$

$$C=\left\{\frac{x}{y}:\ 0<x<1;\ 0<y<x\right\}$$

megoldás

1.8. Házi Feladat. *Legyenek $X\subset\mathbb{R}$ és $Y\subset\mathbb{R}$ valós számhalmazok. Igazoljuk, hogy*

a) $\sup\{-x:\ x\in X\} = -\inf X$

b) $\inf\{x+y:\ x\in X\ \ y\in Y\} = \inf X+\inf Y$

c) $\sup\{x-y:\ x\in X\ \ y\in Y\} = \sup X-\inf Y$

d) $\inf\{x-y:\ x\in X\ \ y\in Y\} = \inf X-\sup Y$

megoldás

1.3. Megoldások

1.1. Házi Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}.$$

Bizonyítás. A bizonyítást n-szerinti teljes indukcióval végezzük.

i) $n=1$ esetén az állítás igaz, hiszen

$$1 = \sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2+1)}{6} = 1.$$

ii) Tegyük fel, hogy valamely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén az állítás teljesül:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}. \tag{1.5}$$

iii) Igazoljuk az állítást $n+1$-re!

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2+\sum_{k=1}^{n} k^2 \overset{(1.5)}{=} (n+1)^2+\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} = \\ &= \frac{(n+1)\cdot(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)\cdot(2n^2+7n+6)}{6} = \\ &= \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)\cdot(2(n+1)+1)}{6}.\end{aligned}$$

Így a teljes indukció elve alapján az állítás igaz minden $n\in\mathbb{N}^*$ számra. □

vissza a feladathoz

1.2. Házi Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}.$$

Bizonyítás. A bizonyítást n-szerinti teljes indukcióval végezzük.

i) $n=1$ esetén az állítás igaz, hiszen

$$1 = \sum_{k=1}^{1} k^3 = \frac{1^2\cdot(1+1)^2}{4} = \frac{1\cdot 4}{4} = 1.$$

ii) Tegyük fel, hogy valamely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén az állítás teljesül:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}. \tag{1.6}$$

iii) Igazoljuk az állítást $n+1$-re!

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= (n+1)^3+\sum_{k=1}^{n} k^3 \overset{(1.6)}{=} (n+1)^3+\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} = \\ &= \frac{(n+1)^2\cdot(n^2+4\cdot(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2\cdot(n^2+4n+4)}{4} = \\ &= \frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)^2\cdot((n+1)+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

Így a teljes indukció elve alapján az állítás igaz minden $n\in\mathbb{N}^*$ számra. □

vissza a feladathoz

1.3. Házi Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}.$$

Bizonyítás. A fenti összefüggés az alábbi zárt alakban írható:

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot(k+1) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}.$$

A bizonyítást n-szerinti teljes indukcióval végezzük.

i) $n=1$ esetén az állítás igaz, hiszen

$$2=\sum_{k=1}^{1} k\cdot(k+1) = 1\cdot 2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

ii) Tegyük fel, hogy valamely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén az állítás teljesül:

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot(k+1) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}. \tag{1.7}$$

iii) Igazoljuk az állítást $n+1$-re!

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot(k+1) = (n+1)\cdot(n+2)+\sum_{k=1}^{n} k\cdot(k+1) \overset{(1.7)}{=} \\ =\ & (n+1)\cdot(n+2)+\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{3} = \\ =\ & \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)\cdot((n+1)+2)}{3}.\end{aligned}$$

Így a teljes indukció elve alapján az állítás igaz minden $n\in\mathbb{N}^*$ számra. □

2. Megoldás: Az állítás igazolható teljes indukció nélkül is. Jelen esetben ráadásul ez a módszer az egyszerűbb. A későbbiekben a sorozatok tulajdonságainál is visszatérünk a problémára.

$$\begin{aligned} & 1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)=\sum_{k=1}^{n} k\cdot(k+1)=\sum_{k=1}^{n} k^2+k=\sum_{k=1}^{n} k^2+\sum_{k=1}^{n} k= \\ = & \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{n\cdot(n+1)}{6}\cdot(2n+1+3)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}. \end{aligned}$$ □

vissza a feladathoz

1.4. Házi Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$1^3+3^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2\cdot(2n^2-1),$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=n^2\cdot(2n^2-1).$$

Bizonyítás. A bizonyítást n-szerinti teljes indukcióval végezzük.

i) $n=1$ esetén az állítás igaz, hiszen $(2-1)^3=1=1^2\cdot(2-1)=1$.

ii) Tegyük fel, hogy valamely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén az állítás teljesül:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=n^2(2n^2-1). \tag{1.8}$$

iii) Igazoljuk az állítást $n+1$-re!

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^3=(2(n+1)-1)^3+\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 \overset{(1.8)}{=} \\ = & (2n+1)^3+n^2(2n^2-1)=2n^4-n^2+8n^3+12n^2+6n+1= \\ = & 2n^4+8n^3+11n^2+6n+1=2n^4+6n^3+5n^2+n+2n^3+6n^2+5n+1= \\ = & (2n^3+6n^2+5n+1)(n+1)=(2n^3+4n^2+n+2n^2+4n+1)(n+1)= \\ = & \big((2n^2+4n+1)\cdot(n+1)\big)\cdot(n+1)=(n+1)^2\cdot\big(2(n^2+2n+1)-1\big)= \\ = & (n+1)^2\cdot(2(n+1)^2-1). \end{aligned}$$

Így a teljes indukció elve alapján az állítás igaz minden $n\in\mathbb{N}^*$ számra. □

2. Megoldás: Ez az állítás is igazolható teljes indukció nélkül.

$$\begin{aligned} & 1^3+3^3+\cdots+(2n-1)^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+(2n)^3-\big(2^3+4^3+\cdots+(2n)^3\big)= \\ = & 1^3+2^3+3^3+\cdots+(2n)^3-2^3\cdot\big(1^3+2^3+\cdots+n^3\big)=\sum_{k=1}^{2n}k^3-8\cdot\sum_{k=1}^{2n}k^3= \\ = & \frac{(2n)^2\cdot(2n+1)^2}{4}-8\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}=n^2\cdot(2n+1)^2-2n^2(n+1)^2= \\ = & n^2\cdot\big(4n^2+4n+1-2(n^2+2n+1)\big)=n^2\cdot(2n^2-1). \end{aligned}$$ □

vissza a feladathoz

1.5. Házi Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n! = (n+1)! - 1,$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)! - 1.$$

Bizonyítás. A bizonyítást n-szerinti teljes indukcióval végezzük.

i) $n=1$ esetén az állítás igaz, hiszen

$$1\cdot 1! = 1 = 2! - 1 = 1.$$

ii) Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az állítás teljesül:

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)! - 1. \tag{1.9}$$

iii) Igazoljuk az állítást $n+1$-re!

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot k! &= (n+1)\cdot(n+1)! + \sum_{k=1}^{n} k\cdot k! \overset{(1.9)}{=} \\ &= (n+1)\cdot(n+1)! + (n+1)! - 1 \\ &= (n+1)!\,((n+1)+1) - 1.\end{aligned}$$

Így a teljes indukció elve alapján az állítás igaz minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra. □

2. Megoldás: Az állítás közvetlen igazolása is tanulságos és elegáns.

$$k\cdot k! = (k+1-1)\cdot k! = (k+1)! - k!$$

Így

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n! = \sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - k! = (\cancel{2}! - 1!) + (\cancel{3}! - \cancel{2}!) + \cdots + ((n+1)! - \cancel{n}!) = (n+1)! - 1.$$

□

vissza a feladathoz

1.6. Házi Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Bizonyítás. A bizonyítást n-szerinti teljes indukcióval végezzük.

i) $n=1$ esetén az állítás igaz, hiszen

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

ii) Tegyük fel, hogy valamely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén az állítás teljesül:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{n}{n+1}. \tag{*}$$

iii) Igazoljuk az állítást $n+1$-re!

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k\cdot(k+1)} &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot(k+1)}\overset{(*)}{=}\\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{n}{n+1}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)}{(n+2)}.\end{aligned}$$

Így a teljes indukció elve alapján az állítás igaz minden $n\in\mathbb{N}^*$ számra. □

2. Megoldás: Ez az állítás is igazolható közvetlenül. A módszert a végtelen sorok témakörnél fogjuk sokszor alkalmazni.

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

Visszaírva a zárt alakba:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

vissza a feladathoz

1.7. Házi Feladat. *Határozzuk meg az alábbi számhalmazok alsó- és felső határát.*

$$A=\left\{\frac{(-1)^n}{n}:\ n\in\mathbb{N},\ n>0\right\}\qquad B=\left\{\frac{1}{n}+(-1)^n\cdot n:\ n\in\mathbb{N},\ n>0\right\}$$

$$C=\left\{\frac{x}{y}:\ 0<x<1;\ 0<y<x\right\}$$

A) Sejtés $\inf A=-1$ és $\sup A=\frac{1}{2}$

Észrevétel: Ha n páros, akkor $\frac{(-1)^n}{n}>0$, ha n páratlan, akkor $\frac{(-1)^n}{n}<0$. Így a halmaz elemei két osztályra bonthatók aszerint, hogy n páros vagy páratlan. (Osztály: olyan részhalmazok összessége, melyek páronként diszjunktak és egyesítésük visszaadja az eredeti halmazt.) Legyen tehát

$$A_1 := \left\{ \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} : k \in \mathbb{N} \right\} \text{ és } A_2 := \left\{ \frac{(-1)^{2k}}{2k} : k \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Ekkor igaz, hogy $a_1 < 0 < a_2$ $\forall a_1 \in A_1$, $\forall a_2 \in A_2$. Így $\sup A = \sup A_2$ és $\inf A = \inf A_1$.

$$\sup A = \sup A_2 = \frac{1}{2}.$$

Bizonyítás.

$$A_2 := \left\{ \frac{(-1)^{2k}}{2k} : \; k \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ \frac{1}{2k} : \; k \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

i) Az $\frac{1}{2}$ egy jó felső korlát, hiszen

$$1 \leq k \Rightarrow \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2 \cdot 1}$$

ii) Az $\frac{1}{2}$ a legkisebb felső korlát, hiszen $\frac{1}{2} \in A_2$, így bármely $K < \frac{1}{2}$ esetén létezik az A_2 halmaznak olyan a eleme, amelyre $a > K$. (Ha más nem, akkor az $a = \frac{1}{2}$ ilyen elem.)

Az infimum bizonyítását hasonlóan lehet elvégezni. □

B) Sejtés: B nem korlátos sem alulról, sem felülről. A páros n-ekhez tartozó elemek halmaza legyen B_1, a páratlanoké B_2:

$$B_1 := \left\{ \frac{1}{2k} + (-1)^{2k} : \; k \in \mathbb{N}^* \right\} \quad B_2 := \left\{ \frac{1}{2k+1} + (-1)^{2k+1} : \; k \in \mathbb{N} \right\}$$

Ekkor $b_2 < 0 < b_1$ minden $b_1 \in B_1$ és minden $b_2 \in B_2$ esetén. Így

$$\sup B = \sup B_1, \text{ és } \inf B = \inf B_2.$$

Sejtés: $\inf B = \inf B_2 = -\infty$.

Bizonyítás.

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \text{esetén} \quad \exists b \in B_2, \quad \text{amelyre} \quad b < K.$$

Legyen $c := |K|$. Ekkor az archimédeszi axióma értelmében $\exists k \in \mathbb{N}$ $c < 2k$. Erre a k-ra igaz a következő

$$K \geq -c > -2k = (-1)^{2k+1} \cdot 2k \overset{**}{\geq} \frac{1}{2k+1} + (-1)^{2k+1} \cdot (2k+1) =: b.$$

A fenti levezetés lépései közül (**)-gal jelölt becslés magyarázata:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k+1} < 1 \;\Rightarrow\; (-1)^{2k+1} \cdot 2k \quad &> \quad \frac{1}{2k+1} + (-1)^{2k+1} \cdot 2k - 1 = \\ &= \quad \frac{1}{2k+1} + (-1)^{2k+1} \cdot (2k+1). \end{aligned}$$

Azaz megadtuk a képletet, amellyel tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ szám esetén találhatunk egy $b \in B_2$ elemet amely a kérdéses K-nál kisebb. Tehát K nem lehet alsó korlát. □

A $\sup B = \infty$ sejtés hasonlóan igazolható.

C) Sejtés: $\sup C = \infty$ és $\inf C = 1$.

a) A C felülről nem korlátos halmaz, azaz

$$\forall K \in \mathbb{R} \text{ esetén } \exists c \in C \text{ hogy } c > K.$$

Ekkor az archimédeszi axióma alapján $K,1 \in \mathbb{R}$ számokhoz létezik egy $n \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $K < n \cdot 1$, így

$$K < n = \frac{n}{1} = \frac{2n \cdot \frac{1}{2}}{2n \cdot \frac{1}{2n}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2n}} \in C$$

Valóban, hiszen

$$\begin{aligned} 0 <\ & x = \tfrac{1}{2} && < 1, \\ 0 <\ & y = \tfrac{1}{2n} && < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Sejtés: $\inf C = 1$.

i) Az 1 valóban egy jó alsó korlát, hiszen $0 < y < x$ minden $c = \frac{x}{y} \in C$ esetén, így c olyan törtként írható fel, melynek számlálója nagyobb, mint a nevezője, vagyis $c > 1$ minden $c \in C$ esetén.

ii) Az 1 a legnagyobb alsó korlát, azaz

$$\forall k \in \mathbb{R},\ k > 1 \text{ esetén } \exists c \in C \text{ hogy } c < k.$$

Legyen $b := \frac{1}{k-1}$, ekkor mivel $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $b < n$, így $k - 1 > \frac{1}{n}$. Legyen ekkor $c := 1 + \frac{1}{n} < 1 + k - 1 = k$. $c \in C$, hiszen

$$c = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+2}},$$

ahol $0 < x = \frac{n+1}{n+2} < 1$ és $0 < y = \frac{n}{n+2} < x = \frac{n+1}{n+2}$.

vissza a feladathoz

1.8. Házi Feladat. *Legyenek $X \subset \mathbb{R}$ és $Y \subset \mathbb{R}$ valós számhalmazok. Igazoljuk, hogy*

a) $\sup\{-x :\ x \in X\} = -\inf X$

b) $\inf\{x + y :\ x \in X\ \ y \in Y\} = \inf X + \inf Y$

c) $\sup\{x - y :\ x \in X\ \ y \in Y\} = \sup X - \inf Y$

d) $\inf\{x - y :\ x \in X\ \ y \in Y\} = \inf X - \sup Y$

Megoldás:

a) Legyen $A := \{-x :\ x \in X\}$ és $\alpha := \inf X$.

i) $-\alpha$ egy jó felső korlát, hiszen mivel $\alpha = \inf X$, ezért

$$\alpha \le x\ \forall x \in X \ \Leftrightarrow\ -\alpha \ge -x\ \forall x \in X.$$

ii) $-\alpha$ a legkisebb felső korlát, hiszen mivel $\alpha = \inf X$, ezért

$$\forall k > \alpha\ \exists x \in X\ x < k. \Leftrightarrow \forall K = -k < -\alpha\ \exists y = -x \in A\ y > -k = K,$$

ami az állítással ekvivalens.

b) Legyen $B := \{x+y :\ x \in X\ \ y \in Y\}$ és $\alpha := \inf X$, továbbá $\beta := \inf Y$.

i) $\alpha+\beta$ egy jó alsó korlát, hiszen

$$\begin{array}{ll} \alpha \le x, & \forall x \in X, \text{ mert } \alpha \text{ az } X \text{ egy alsó korlátja,} \\ \beta \le y, & \forall y \in Y, \text{ mert } \beta \text{ az } Y \text{ egy alsó korlátja.} \end{array}$$

A két egyenlőtlenséget összeadva:

$$\alpha+\beta \le x+y \quad \forall x \in X,\ \forall y \in Y.$$

ii) $\alpha+\beta$ a legnagyobb alsó korlát, vagyis

$$\forall k > \alpha+\beta \text{ esetén } \exists b \in B, \text{ amelyre } b < k.$$

$$k > \alpha+\beta \ \Rightarrow\ \exists k_1 > \alpha,\ k_2 > \beta, \text{ hogy } k_1+k_2 = k.$$

Ekkor mivel
$k_1 > \alpha = \inf X \ \Rightarrow\ \exists x_0 \in X,\ x_0 < k_1$ és mivel
$k_2 > \beta = \inf Y \ \Rightarrow\ \exists y_0 \in Y,\ y_0 < k_2$.
Így $b := x_0+y_0 \in B$ esetén $b < k = k_1+k_2$.

Megjegyzés: A c és d feladat igazolható lenne a korábbiakra való hivatkozással is, de a teljesség kedvéért nézzük a részletes bizonyítást!

c) Legyen $C := \{x-y :\ x \in X\ \ y \in Y\}$, $\alpha := \sup X$ és $\beta := \inf Y$

i) $\alpha-\beta$ egy jó felső korlát, hiszen

$$\alpha \ge x\ \forall x \in X \text{ és } \beta \le y\ \forall y \in Y \ \Leftrightarrow -\beta \ge -y\ \forall y \in Y$$

$$\alpha-\beta \ge x-y =: c \in C\ \forall x \in X \text{ és } \forall y \in Y$$

ii) $\alpha-\beta$ a legkisebb felső korlát, azaz $\forall K < \alpha-\beta$ esetén $\exists c \in C\ c > K$.

$$K < \alpha-\beta \Rightarrow \exists k_1 < \alpha,\ k_2 > \beta, \text{ hogy } k_1-k_2 = K.$$

Mivel $k_1 < \alpha = \sup X\ \exists x_0 \in X,\ x_0 > k_1$.
Mivel $k_2 > \beta = \inf Y\ \exists y_0 \in Y,\ y_0 < k_2 \ \Leftrightarrow\ -y_0 > -k_2$.
A fenti két egyenlőtlenséget összeadva kapjuk:

$$x_0-y_0 > k_1-k_2 = K,$$

ami az állítással ekvivalens.

d) Legyen C az előző feladatban definiált halmaz és $\gamma := \inf X$, továbbá $\delta := \sup Y$

i) $\gamma - \delta$ egy jó alsó korlát, hiszen

$$\gamma \leq x \ \forall x \in X \text{ és } \beta \geq y \ \forall y \in Y \ \Leftrightarrow \ -\beta \leq -y \ \forall y \in Y$$

$$\gamma - \delta \leq x - y \ \forall x \in X, \ \forall y \in Y.$$

ii) $\gamma - \delta$ a legnagyobb alsó korlát, azaz $\forall k > \gamma - \delta$ esetén $\exists c \in C \ C < k$.

$$k > \gamma - \delta \ \Rightarrow \ \exists k_1 > \gamma \text{ és } k_2 < \delta, \text{ hogy } k = k_1 - k_2.$$

Mivel $k_1 > \gamma = \inf X \ \Rightarrow \ \exists x_0 \in X \ x_0 < k_1$.
Mivel $k_2 < \delta = \sup Y \ \Rightarrow \ \exists y_0 \in Y \ y_0 > k_2 \ \Leftrightarrow \ -y_0 < -k_2$.
$C \ni c := x_0 - y_0 < k_1 - k_2 = k$, ami az állítással ekvivalens.

vissza a feladathoz

2. fejezet

Számsorozatok alaptulajdonságai

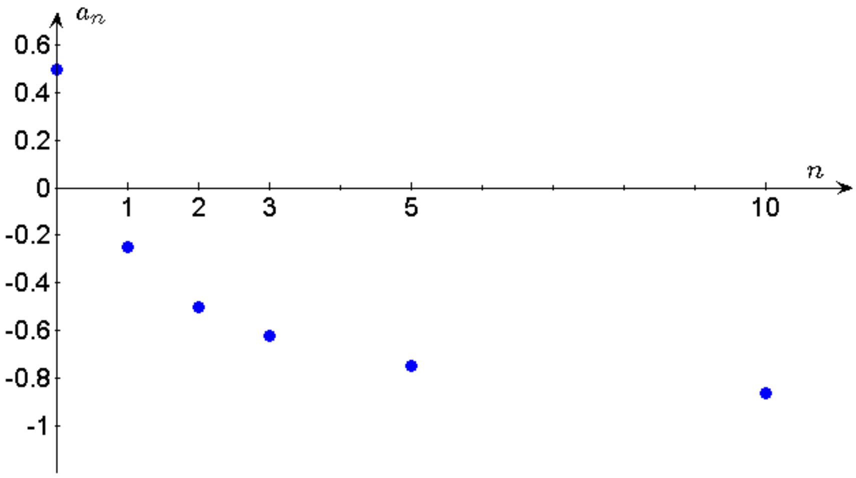
2.1. Gyakorlat

2.1. Feladat. *Írjuk fel a sorozat* 0., 1., 2., 3., 5., 10. *elemét, ábrázoljuk ezeket az elemeket. Fogalmazzunk meg sejtést a sorozat monotonitásáról, majd igazoljuk azt.*

$$a = \left(\frac{1-2n}{2+2n},\ n \in \mathbb{N}\right)$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \\ a_1 &= \frac{1-2}{2+2} = -\frac{1}{4} \\ a_2 &= \frac{1-4}{2+4} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \\ a_3 &= \frac{1-6}{2+6} = -\frac{5}{8} \\ a_5 &= \frac{1-10}{2+10} = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4} \\ a_{10} &= \frac{1-20}{2+20} = -\frac{19}{22} \end{aligned}$$



Sejtés: szigorúan monoton csökken.

Monotonitás vizsgálat:

$a_{n+1} - a_n = ?$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1-2n}{2+2n} \\ a_{n+1} &= \frac{1-2(n+1)}{2+2(n+1)} = \frac{1-2n-2}{2+2n+2} = \frac{-2n-1}{2n+4} \end{aligned}$$

Ezeket felhasználva:

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= \frac{-2n-1}{2n+4}-\frac{1-2n}{2+2n}=\frac{(-2n-1)(2+2n)-(1-2n)(2n+4)}{(2n+4)(2n+2)}= \\
&= \frac{-4n^2-4n-2n-2-(-4n^2+2n-8n+4)}{(2n+4)(2n+2)}= \\
&= \frac{-6}{(2n+4)(2n+2)}<0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \\
&\Downarrow \\
a_{n+1}-a_n &< 0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \\
a_{n+1} &< a_n \quad \forall n\in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

Tehát a sorozat valóban szigorúan monoton csökkenő. ♢

2.2. Feladat. *Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából a következő sorozatokat!*

a) $a=\left(\frac{n^2+2n}{n+1},\ n\in\mathbb{N}\right)$

Megoldás.
$a_{n+1}-a_n=?$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^2+2n}{n+1} \\
a_{n+1} &= \frac{(n+1)^2+2(n+1)}{(n+1)+1}=\frac{n^2+2n+1+2n+2}{n+2}=\frac{n^2+4n+3}{n+2}
\end{aligned}$$

Ezeket felhasználva:

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= \frac{n^2+4n+3}{n+2}-\frac{n^2+2n}{n+1}=\frac{(n^2+4n+3)(n+1)-(n^2+2n)(n+2)}{(n+1)(n+2)}= \\
&= \frac{n^3+4n^2+3n+n^2+4n+3-(n^3+2n^2+2n^2+4n)}{(n+1)(n+2)}= \\
&= \frac{n^2+3n+3}{(n+1)(n+2)}>0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \\
&\Downarrow \\
a_{n+1}-a_n &> 0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \\
a_{n+1} &> a_n \quad \forall n\in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

Tehát a sorozat szigorúan monoton növő. ♢

b) $b=\left(\frac{n}{2n-7},\ n\in\mathbb{N}\right)$

Megoldás.
i)

$$b_0=0>b_1=-\frac{1}{5}>b_2=-\frac{2}{3}>b_3=-3<b_4=4.$$

A fenti néhány elem felírásából is látszik, hogy a sorozat nem monoton, mert

$$b_2>b_3<b_4.$$

2.1. Megjegyzés.

1. *Nem monoton sorozat esetén elegendő három egymás utáni elemet mutatni, amelyek úgy viselkednek, hogy a sorozat sem monoton növő, sem monoton csökkenő nem lehet.*
2. *A sorozat általános tagjának értelmezhetőségét vizsgálva a következő megállapítás tehető:*
$$\frac{n}{2n-7};\; 2n \neq 7 \;\Leftrightarrow\; n \neq 3{,}5.$$
Ezt a kritikus értéket a sorozat elemeinek indexe a kikötéstől függetlenül sem venné fel ($3{,}5 \notin \mathbb{N}$)*, de a vizsgálat azért hasznos, mert a sorozat a kritikus pont környezetében vált monotonitást, vagyis most a* $b_2,\ b_3,\ b_4$*, vagy a* $b_3,\ b_4,\ b_5$ *elemhármas felírásával megmutatható, hogy a sorozat nem monoton.*
3. *Az előző megjegyzésekben vázolt módszer előnye, hogy kevés számolással választ tudunk adni a sorozat monotonitására. A hátránya abban rejlik, hogy csupán annyit lehet megállapítani, hogy a sorozat nem monoton. A következő módszerrel ennél többet is megállapíthatunk.*

ii) $b_{n+1} - b_n = ?$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{n}{2n-7} \\ b_{n+1} &= \frac{(n+1)}{2(n+1)-7} = \frac{n+1}{2n-5} \end{aligned}$$

Ezeket felhasználva:

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{n+1}{2n-5} - \frac{n}{2n-7} = \frac{(2n-7)(n+1)-(2n-5)n}{(2n-5)(2n-7)} = \\ &= \frac{2n^2-7n+2n-7-(2n^2-7n)}{(2n-5)(2n-7)} = \\ &= \frac{-7}{(2n-5)(2n-7)} \begin{array}{lll} < & 0 & \text{ha } n \leq 2 \\ > & 0 & \text{ha } n = 3 \\ < & 0 & \text{ha } n \geq 4 \end{array} \end{aligned}$$

Legyen $A := 2n-5$ és $B := 2n-7$. Ekkor a $b_{n+1} - b_n$ különbség egy olyan tört alakban írható, amelynek számlálója -7, nevezője pedig az $A \cdot B$ szorzat, így az előjele leolvasható az alábbi táblázatból:

n	$0 \leq n \leq 2$	$n = 3$	$4 \leq n$
A	$-$	$+$	$+$
B	$-$	$-$	$+$
$b_{n+1} - b_n$	$-$	$+$	$-$

Tehát a b sorozat egy bizonyos indextől kezdve szigorúan monoton csökken.

Megjegyzés.
A dolgozatban a feladat megoldását a részletesebb módszerrel kérjük.

c) $c = \left(\left(-\frac{1}{5}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}\right)$

Megoldás.

i) A sorozat nem monoton, hiszen például:

$$c_0 = 1 > c_1 = -\frac{1}{5} < c_2 = \frac{1}{25}.$$

ii)

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{5}\right)^n = -\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^n - \left(-\frac{1}{5}\right)^n \\ &= \left(-\frac{1}{5}\right)^n \cdot \left(-\frac{1}{5} - 1\right) = \\ &= \frac{-6}{5}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^n \begin{array}{ll} < 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ > 0 & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{array} \end{aligned}$$

Tehát a sorozat nem monoton.

2.2. Megjegyzés. *A második, részletesebb megoldás során válik láthatóvá, hogy nincs olyan index, amelytől kezdve a sorozat monoton lenne. Érdemes megjegyezni, hogy a monoton és a bizonyos indextől kezdve monoton sorozatok viselkedése hasonlít egymásra és nem a nem monoton sorozatoké. Ezért érdemes a részletesebb vizsgálatot végigszámolni.*

2.3. Feladat. *Vizsgáljuk meg az* $a = \left(\frac{1-2n}{2+2n},\ n \in \mathbb{N}\right)$ *sorozatot korlátosság szempontjából!*

Megoldás.

i) sejtés $-100 \le a_n \le -\frac{1}{2}$

2.3. Megjegyzés. *A sejtés felső becslése rossz. A sorozat első néhány elemét felírtuk az 2.1. feladatban. Azok alapján látható, hogy a sorozatnak van* $-\frac{1}{2}$*-nél nagyobb eleme. Azért választottuk a nyilvánvalóan hibás felső korlátot, hogy lássuk, mi történik, ha rossz a sejtés.*

Bizonyítás. Megvizsgáljuk, hogy a $-100 \le \frac{1-2n}{2n+2}$ reláció mely n-ekre teljesül.

$$\begin{aligned} -100 &\le \frac{1-2n}{2n+2} \\ 0 &\le \frac{1-2n}{2n+2} + 100 = \frac{1-2n+200n+200}{2n+2} \\ 0 &\le \frac{198n+201}{2n+2} \end{aligned}$$

A tört akkor pozitív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű. Legyen $A{:=}198n{+}201$ és $B := 2n+2$. Ekkor felhasználva, hogy

$$\begin{aligned} 2n+2 &= 0 \\ 2n &= -2 \\ n &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 198n+201 &= 0 \\ 198n &= -201 \\ n &= -\frac{201}{198} \end{aligned}$$

a tört előjele leolvasható az alábbi táblázatból.

n	$n < -\frac{201}{198}$	$n = -\frac{201}{198}$	$-\frac{201}{198} < n < -1$	$n = -1$	$-1 < n$
A	$-$	0	$+$	$+$	$+$
B	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{A}{B}$	$+$	0	$-$	NA	$+$
	$I.$	$II.$	$III.$	$IV.$	$V.$

Az $I.$-es és a $II.$-es tartomány a feltételnek megfelelne, de nincs ilyen $n \in \mathbb{N}$. A $III.$-as és a $IV.$-es tartomány nem felel meg a feltételnek, úgysincs ilyen $n \in \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ tehát az $V.$ tartományba esik. Ebben a tartományban pedig a fenti táblázat alapján minden pont kielégíti a feltételt. Ezzel az állítást igazoltuk, vagyis $k = -100$ egy jó alsó korlát. □

2.4. Megjegyzés. *Fordítva is indokolhattunk volna: Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor*

$$198n + 201 > 0 \text{ és } 2n + 2 > 0.$$

Vizsgáljuk most a felső korlátra vonatkozó sejtést!

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} a_n &\leq -\frac{1}{2} \\ \frac{1-2n}{2n+2} &\leq -\frac{1}{2} \\ \frac{1-2n}{2n+2} + \frac{1}{2} &\leq 0 \\ \frac{1-2n+n+1}{2(n+1)} &\leq 0 \\ \frac{2-n}{2n+2} &\leq 0 \end{aligned}$$

A baloldalon szereplő tört nevezője minden $n \in \mathbb{N}$ esetén pozitív, így a tört előjelét a számláló határozza meg. Tehát a tört pontosan akkor nem-pozitív, ha $n \geq 2$. A feltétel nem teljesül minden természetes index esetén, ebből látszik, hogy a becslés nem volt helyes. Szerencsére csak véges sok $n \in \mathbb{N}$ esetén nem igaz az állítás ($n = 0$, $n = 1$). Ilyenkor új korlátot választunk. Ha lehetséges, akkor érdemes felírni a problémás elemeket és meghatározni a maximumukat. (Hiszen véges sok elem esetén mindig van ilyen tulajdonságú.) $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = -\frac{1}{4}$. A következő sejtés $K = \frac{1}{2}$ lesz, ami már nyilvánvalóan jó lesz.

$$\begin{aligned} a_n &\leq \frac{1}{2} \\ \frac{1-2n}{2n+2} &\leq \frac{1}{2} \\ \frac{1-2n}{2n+2} - \frac{1}{2} &\leq 0 \\ \frac{1-2n-n-1}{2(n+1)} &\leq 0 \\ \frac{-3n}{2n+2} &\leq 0 \end{aligned}$$

Ami nyilvánvalóan minden szóbajöhető n-re teljesül. □

ii) Mivel monotonitás szempontjából már megvizsgáltuk a sorozatot, használhatók a monoton sorozatok korlátaira vonatkozó tételek. Ezek előnye, hogy rögtön a határokat adják meg, míg az első módszernél a határokat tovább kell keresni.

a szigorúan monoton csökkenő, vagyis

$$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \ldots \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Így $a_0 \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$K = a_0 = \max\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\} = \sup\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\} = \sup a.$$

Szigorúan monoton csökkenő sorozat alsó határa (infimuma) a határérték:

$$k = \inf a = \lim a = \lim_{n\to\infty} a_n = -1.$$

Ha az első módszerrel vizsgáljuk, a szuprémum illetve infimum tulajdonság bizonyítása a halmazoknál használt módon történik. $\diamondsuit$

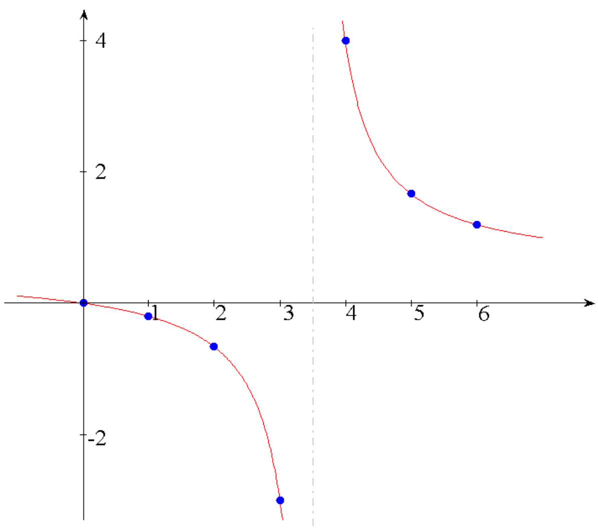
2.4. Feladat. *Vizsgáljuk meg az* $a = \left(\frac{n}{2n-7}, \ n \in \mathbb{N}\right)$ *sorozatot korlátosság szempontjából!*

Megoldás.

i) A sorozatot a b feladatban megvizsgáltuk monotonitás szempontjából. A sorozat egy bizonyos indextől kezdve szigorúan monoton csökken.

$$a_n = \frac{n}{2n-7} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n-3{,}5}\right) = \frac{1}{2}\frac{n-3{,}5+3{,}5}{n-3{,}5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{3{,}5}{n-3{,}5} = \frac{7}{4}\frac{1}{n-3{,}5} + \frac{1}{2}.$$

Mivel a sorozatok $\mathbb{N}$-en értelmezett függvények, így az $n \mapsto a_n$ leképezés az $x \mapsto f(x) = \frac{7}{4}\frac{1}{x-3{,}5} + \frac{1}{2}$ függvény leszűkítése $\mathbb{N}$-re.



A függvény menetéből nyilvánvaló, hogy a sorozat határait a szinguláris hely körül kell keresni. Jelen esetben

$$\min a = \inf a = a_3 = -3 \quad \max a = \sup a = a_4 = 4.$$

A dolgozatban ilyen esetben vagy a fenti részletes magyarázatot kell leírni az ábrával együtt, vagy a következő bizonyítást az

$$\inf a = -3 \quad \text{és} \quad \sup a = 4.$$

sejtésekre.

ii) Sejtés: $\inf a = -3$

Bizonyítás.

1) A -3 egy jó alsó korlát, hiszen $a_n \geq -3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, mert

$$\begin{aligned} a_n = \frac{n}{2n-7} &\geq -3 \\ \frac{n}{2n-7} + 3 &\geq 0 \\ \frac{n+6n-21}{2n-7} &\geq 0 \\ \frac{7n-21}{2n-7} &\geq 0 \\ \frac{n-3}{2n-7} &\geq 0 \end{aligned}$$

Ha $n \geq 4$, akkor

$$n-3 \geq 1 \quad \text{és} \quad 2n-7 \geq 1$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{n-3}{2n-7} \geq 0$$

Ha $n < 4$, akkor

$$n-3 \leq 0 \quad \text{és} \quad 2n-7 < 0$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{n-3}{2n-7} \geq 0$$

2) A -3 a legnagyobb alsó korlát, hiszen a sorozat elemei közt szerepel, így

$$\inf a = \min a = a_3 = -3.$$

□

2.5. Megjegyzés. *A* $\sup a = 4$ *bizonyítása hasonlóan történik. Ez házi feladatként elvégzendő!*

2.5. Feladat.

a) Definíció alapján igazoljuk az $a = \left(\frac{1-2n}{2n+2},\ n \in \mathbb{N}\right)$ *sorozat konvergenciáját!*

b) Adjuk meg, hogy a sorozat mely elemei esnek a határérték $\varepsilon = 0{,}01$ *sugarú környezetébe!*

Megoldás.

a) Sejtés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1 = A$.

Az $(a_n,\ n\in\mathbb{N})$ sorozat konvergens és a határértéke a $A=-1$ szám, ha

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\quad \forall n>N\ |a_n-A|<\varepsilon. \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1-2n}{2n+2}-(-1)\right| &< \varepsilon\\ \left|\frac{1-2n+(2n+2)}{2n+2}\right| &< \varepsilon\\ \left|\frac{3}{2n+2}\right| &< \varepsilon\end{aligned}$$

Az abszolútértékben szereplő kifejezés $\forall n\in\mathbb{N}$ esetén pozitív, így az abszolútértéke önmaga:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2n+2} &< \varepsilon\\ 3 &< \varepsilon(2n+2)\\ \frac{3}{\varepsilon} &< 2n+2\\ \frac{3}{\varepsilon}-2 &< 2n\\ \frac{\frac{3}{\varepsilon}-2}{2} &< n\end{aligned}$$

Ekkor legyen $N(\varepsilon):=\max\left\{\left[\frac{\frac{3}{\varepsilon}-2}{2}\right],0\right\}$.

Nyilvánvaló, hogy ez jó küszöbindex és bármely $\varepsilon>0$ esetén a fenti formula alapján kiszámítható, így a sorozat valóban konvergens és a határértéke -1.

b) $N(0{,}01)=\left[\frac{\frac{3}{\frac{1}{100}}-2}{2}\right]=\left[\frac{300-2}{2}\right]=\left[\frac{298}{2}\right]=149.$

Vagyis a sorozat 149. eleme még kívül van a $(-1{,}01;\ -0{,}99)$ környezeten, de az 150. elemtől kezdve az összes elem a fenti intervallumba esik. ♢

2.1.1. Mértani (geometriai) sorozatok

2.6. Definíció. *Legyen $x=(q^n,\ q\in\mathbb{R}$ rögzített, $\ n\in\mathbb{N})$. Az ilyen alakban írható sorozatokat mértani sorozatoknak nevezzük.*

2.7. Tétel. *Legyen x egy mértani sorozat, ekkor*

a) ha $q>1$, akkor x divergens és $\lim x=\infty$,

b) ha $q\le -1$, akkor x divergens,

c) ha $-1<q<1$, akkor x konvergens és $\lim x=0$,

d) ha $q=1$, akkor x konvergens és $\lim x=1$.

Bizonyítás.

a) $q > 1$

$$\lim x = \infty \;\Leftrightarrow\; \forall R \in \mathbb{R},\; \exists N = N(R) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N,\; x_n > R. \tag{2.2}$$

Vizsgáljuk meg, hogy mely n-ekre teljesül, hogy $q^n > R$.

$$q^n = (1 + \underbrace{(q-1)}_{>0})^n \overset{B}{\geq} 1 + n(q-1) > R$$

Mivel $q - 1 > 0$

$$\Rightarrow \; n > \frac{R-1}{q-1}$$

$$N(R) := \max\left\{\left[\frac{R-1}{q-1}\right];\; 0\right\}$$

A fenti küszöbindex választása mellett (2.2) valóban teljesül.

2.8. Megjegyzés.

1. *A $\overset{B}{\geq}$-val jelölt becslés során az első gyakorlaton bizonyított Bernoulli-egyenlőtlenséget használtuk. A továbbiakban is ezt a jelölést alkalmazzuk.*
2. *A bizonyítás során az x_n elemet alulról becsültük, majd beláttuk, hogy még a becslés is nagyobb R-nél. A bizonyításaink során gyakran használjuk a becslést, ezért fontos megértenünk az elvét. Egy*

$$A < B$$

egyenlőtlenség igazolása során A-t felülről (B-t alulról) becsülhetjük, de csak úgy, hogy az egyenlőtlenség iránya ne változzon.

b) Ha $q = -1$, akkor $x = ((-1)^n,\; n \in \mathbb{N})$.

A sorozat páros illetve páratlan indexű elemeiből álló részsorozatait vizsgálva megállapítható, hogy ezek határértéke nem egyenlő ($\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = 1,\; \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = -1,$). Ez ellentmond a határérték definíciójának harmadik következményének.

(*„Konvergens sorozat bármely részsorozata is konvergens és határértéke az eredeti sorozat határértékével egyenlő.”*)

Ha $q < -1$, akkor legyen

$$\begin{array}{lll} \nu = (2n,\; n \in \mathbb{N}) & x \circ \nu = (q^{2n},\; n \in \mathbb{N}) = ((q^2)^n,\; n \in \mathbb{N}) & q^2 > 1 \;\Rightarrow\; \lim(x \circ \nu) = +\infty \\ \mu = (2n+1,\; n \in \mathbb{N}) & x \circ \mu = (q^{2n+1},\; n \in \mathbb{N}) = ((-1)|q|^{2n+1},\; n \in \mathbb{N}) & |q| > 1 \;\Rightarrow\; \lim(x \circ \mu) = -\infty \end{array}$$

Ez ellentmond a határérték definíciójának harmadik következményének, így x divergens.

c) $-1 < q < 1$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N\; |x_n - 0| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

$$|q^n| < \varepsilon$$

Ha $q = 0$ $\forall N \in \mathbb{N}$ jó küszöbindex.

Ha $q \neq 0$, akkor

$$|q^n| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{q}\right|^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$(1 + (\overbrace{\underbrace{\left|\frac{1}{q}\right|}_{>1} - 1}^{>0}))^n \overset{B}{\geq} 1 + n(\frac{1}{|q|} - 1) \overset{?}{>} \frac{1}{\varepsilon}$$

A fenti egyenlőtlenséget rendezve kapjuk:

$$n > \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\frac{1}{|q|} - 1}.$$

Legyen

$$N(\varepsilon) := \max\left\{0, \left[\frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\frac{1}{|q|} - 1}\right]\right\}.$$

$N(\varepsilon)$ esetén (2.3) teljesül. x valóban null-sorozat.

d)

$$q = 1 \;\Rightarrow\; x = (1,\; n \in \mathbb{N}),\; \text{konstans sorozat} \;\Rightarrow\; \lim x = 1. \qquad \square$$

2.2. Házi Feladatok

2.1. Házi Feladat. *Írjuk fel a következő sorozatok* 0., 1., 2., 5., 10. *elemét, ábrázoljuk ezeket az elemeket. Vizsgáljuk meg a sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából, adjuk meg alsó- és felső határaikat!*

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{4n+3}{5n+4},\ n\in\mathbb{N}\right) \\ b &= (7-2n,\ n\in\mathbb{N}) \\ c &= \left(\sin(n\cdot\frac{\pi}{2}),\ n\in\mathbb{N}\right) \\ d &= (-3\cdot 2^n,\ n\in\mathbb{N}) \end{aligned}$$

megoldás

2.2. Házi Feladat. *Definíció alapján igazoljuk a következő sorozatok konvergenciáját és adjuk meg, hogy a sorozat mely elemei esnek a határérték* $\varepsilon = 0{,}02$ *sugarú környezetébe!*

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{3n+2}{n+1};\ n\in\mathbb{N}\right) \\ b &= \left(\frac{1-7n}{2n-1};\ n\in\mathbb{N}\right) \\ c &= \left(\frac{6n-1}{2-3n};\ n\in\mathbb{N}\right) \end{aligned}$$

megoldás

További gyakorló feladatok

1) [15] *71.o.: 1., 2., 3.a) feladatok*

2) Írjuk fel a következő sorozatok 0., 1., 2., 3., 5., 10. elemét, ábrázoljuk őket. Vizsgáljuk meg a sorozatokat monotonitás, korlátosság szempontjából. Adjuk meg az alsó- és a felső határaikat!

$$\begin{aligned} a &= (5n-3,\ n\in\mathbb{N}) \\ b &= (\frac{n^2-2n}{n+3},\ n\in\mathbb{N}) \\ c &= ((-4)^n,\ n\in\mathbb{N}) \\ d &= (\cos n\frac{\pi}{4},\ n\in\mathbb{N}) \\ e &= (\frac{4n+1}{3^n},\ n\in\mathbb{N}) \end{aligned}$$

2.3. Megoldások

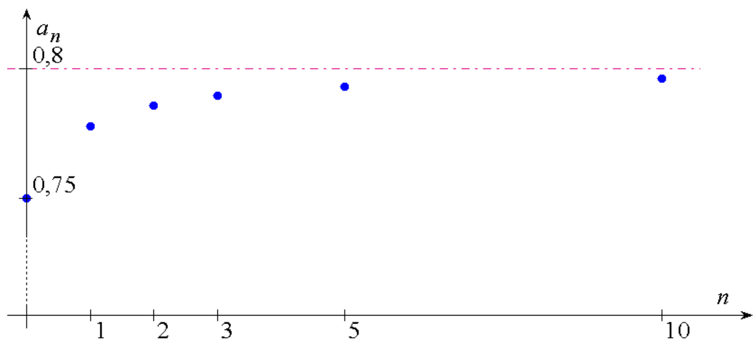
2.1. Házi Feladat. *Írjuk fel a következő sorozatok* 0., 1., 2., 5., 10. *elemét, ábrázoljuk ezeket az elemeket. Vizsgáljuk meg a sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából, adjuk meg alsó- és felső határaikat!*

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{4n+3}{5n+4},\ n\in\mathbb{N}\right) \\ b &= (7-2n,\ n\in\mathbb{N}) \\ c &= \left(\sin(n\cdot\frac{\pi}{2}),\ n\in\mathbb{N}\right) \\ d &= (-3\cdot 2^n,\ n\in\mathbb{N}) \end{aligned}$$

Megoldás.

a)

$$a_0=\frac{3}{4},\ a_1=\frac{7}{9},\ a_2=\frac{11}{14},\ a_5=\frac{23}{29},\ a_{10}=\frac{43}{54}.$$



Sejtés a szigorúan monoton növő.

$$a_{n+1}=\frac{4(n+1)+3}{5(n+1)+4}=\frac{4n+7}{5n+9}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &= \frac{4n+7}{5n+9}-\frac{4n+3}{5n+4}=\frac{(4n+7)(5n+4)-(4n+3)(5n+9)}{(5n+9)(5n+4)}= \\ &= \frac{20n^2+35n+16n+28-(20n^2+36n+15n+37)}{(5n+9)(5n+4)}= \\ &= \frac{1}{(5n+9)(5n+4)}>0\ \forall n\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &> 0\ \forall n\in\mathbb{N} \\ a_{n+1} &> a_n\ \forall n\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

A sorozat szigorúan monoton növő.

Mivel a sorozat szigorúan monoton növő

$$\inf a = \min a = a_0 = \frac{3}{4}, \quad \sup a = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{5}.$$

Ezeket a fenti tétel ismerete nélkül is igazolhatjuk. (Így nem kell a monotonitás ismerete.)
Sejtés: $\inf a = a_0 = \frac{3}{4}$

Bizonyítás.

i) A $\frac{3}{4}$ egy jó alsó korlát, hiszen $a_n \geq \frac{3}{4}$ $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{4n+3}{5n+4} &\geq \frac{3}{4} \\ \frac{4n+3}{5n+4} - \frac{3}{4} &\geq 0 \\ \frac{16n+12-(15n+12)}{20n+16} &\geq 0 \\ \frac{n}{20n+16} &\geq 0 \end{aligned}$$

Ami valóban minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül.

ii) A $\frac{3}{4}$ a legnagyobb alsó korlát, hiszen a sorozat felveszi ezt az értéket. ($a_0 = \frac{3}{4}$) □

Sejtés: $\sup a = \frac{4}{5}$

Bizonyítás.

i) A $\frac{4}{5}$ egy jó felső korlát, hiszen $a_n < \frac{4}{5}$ $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{4n+3}{5n+4} &< \frac{4}{5} \\ \frac{4n+3}{5n+4} - \frac{4}{5} &< 0 \\ \frac{20n+15-(20n+16)}{25n+20} &< 0 \\ \frac{-1}{25n+20} &< 0 \end{aligned}$$

Ami valóban minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül.

ii) A $\frac{4}{5}$ a legkisebb felső korlát, azaz

$$\forall K < \frac{4}{5}\ \exists n \in \mathbb{N}\ a_n > K$$

$$\begin{aligned} \frac{4n+3}{5n+4} &> K \\ 4n+3 &> K(5n+4) \\ 4n+3 &> 5Kn+4K \\ 3-4K &> (5K-4)n \end{aligned}$$

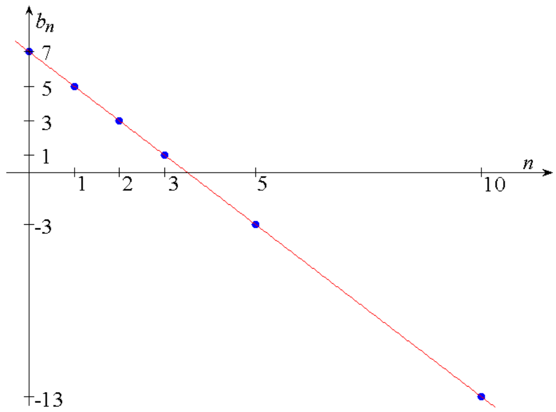
Mivel $K < \frac{4}{5}$, $5K-4 < 0$, így a reláció iránya megfordul.

$$\frac{3-4K}{5K-4} < n,$$

vagyis bármely $K < \frac{4}{5}$ esetén a $\frac{3-4K}{5K-4}$-nél nagyobb indexű elemek nagyobbak K-nál. □

b)

$$\begin{aligned} b_0 &= 7 \\ b_1 &= 5 \\ b_2 &= 3 \\ b_5 &= -3 \\ b_{10} &= -13 \end{aligned}$$



Sejtés a b sorozat szigorúan monoton csökkenő.

$$b_{n+1} = 7-2(n+1) = 7-2n-2 = 5-2n$$

$$\begin{aligned} b_{n+1}-b_n = 5-2n-(7-2n) = -2 &< 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \\ b_{n+1}-b_n &< 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \\ b_{n+1} &< b_n \ \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Tehát a sorozat valóban szigorúan monoton csökkenő.

Mivel a sorozat szigorúan monoton csökkenő

$$\sup b = \max b = b_0 = 7, \quad \inf b = \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$

Ezeket a következőképpen is igazolhatjuk:

Sejtés: $\sup b = 7$

Bizonyítás.

i) A 7 egy jó felső korlát, mert $b_n \leq 7 \ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 7-2n &\leq 7 \\ -2n &\leq 0, \end{aligned}$$

ami valóban minden szóbajövő n-re igaz.

ii) A 7 a legkisebb felső korlát, hiszen a sorozat elemei között szerepel. □

Sejtés: $\inf b = -\infty$, vagyis a sorozat alulról nem korlátos.

Bizonyítás.

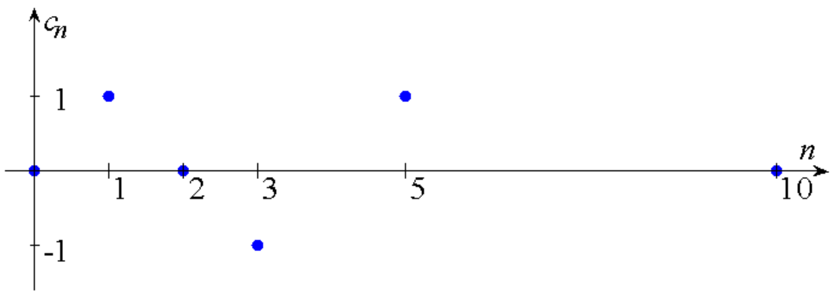
$$\forall R \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\ b_n < R.$$

$$\begin{aligned} 7-2n &< R \\ \frac{7-R}{2} &< n, \end{aligned}$$

Vagyis bármely $R \in \mathbb{R}$ esetén a sorozat $\frac{7-R}{2}$-nél nagyobb indexű elemei kisebbek, mint R. □

c)

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_1 &= 1 \\ c_2 &= 0 \\ c_3 &= -1 \\ c_5 &= 1 \\ c_{10} &= 0 \end{aligned}$$



A sorozat nem monoton, hiszen például

$$c_0 = 0 < c_1 = 1 < c_2 = 0,$$

sőt egy adott indextől kezdve sem monoton, hiszen

$$c_{n+1} - c_n = \sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0-1=-1 & \text{ha } n = 4k+1,\ k \in \mathbb{Z} \\ -1-0=-1 & \text{ha } n = 4k+2,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0-(-1)=1 & \text{ha } n = 4k+3,\ k \in \mathbb{Z} \\ 1-0=1 & \text{ha } n = 4k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Korlátosság:

Sejtés: $\sup c = \max c = 1$

Bizonyítás.

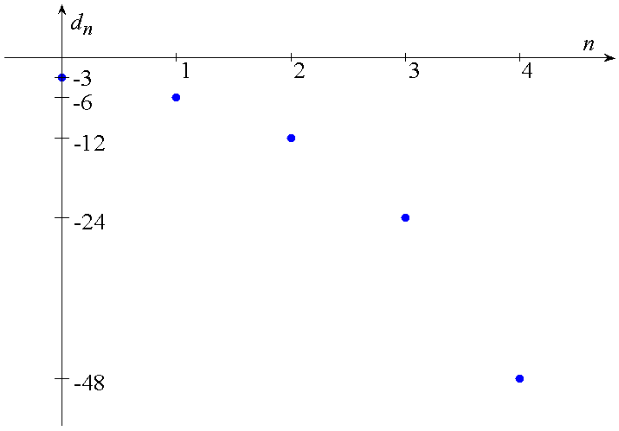
i) Az 1 egy jó felső korlát, hiszen $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $\sin x \le 1$.

ii) Az 1 a legkisebb felső korlát, mivel szerepel a sorozat elemei közt. □

Az $\inf c = \min c = 1$ állítás hasonlóan igazolható.

d) Mivel a sorozat elemeinek abszolútértéke nagyon gyorsan nő, ábrázolásuk még megfelelő egységválasztás mellett is nehézkes. Hogy használható ábrát kapjunk, a megadott elemek helyett a 0., 1., 2., 3., 4. elemeket ábrázoltuk. Természetesen kiszámoltuk a kívánt elemeket is.

$$\begin{aligned}
d_0 &= -3\\
d_1 &= -6\\
d_2 &= -12\\
d_3 &= -24\\
d_4 &= -48\\
d_5 &= -96\\
d_{10} &= -3072
\end{aligned}$$



Sejtés: Szigorúan monoton csökkenő.

$$d_{n+1} = -3 \cdot 2^{n+1} = -6 \cdot 2^n$$

$$\begin{aligned}
d_{n+1} - d_n = -6 \cdot 2^n - (-3 \cdot 2^n) = -3 \cdot 2^n (2-1) &< 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\\
d_{n+1} - d_n &< 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\\
d_{n+1} &< d_n \ \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Vagyis a sorozat valóban szigorúan monoton csökkenő.

Mivel d szigorúan monoton csökkenő:

$$\sup d = \max d = d_0 = -3, \quad \inf d = \lim_{n\to\infty} d_n = -\infty.$$

Ezek, az előzőekhez hasonlóan a monotonitás ismerete nélkül is igazolhatók.

Sejtés: $\sup d = -3$.

Bizonyítás.

i) A -3 egy jó felső korlát, hiszen $d_n \leq -3 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
-3 \cdot 2^n &\leq -3\\
2^n &\geq 1\\
2^n &\geq 2^0
\end{aligned}$$

Mivel a 2^x függvény szigorúan monoton növő, ezért a függvényértékek között fennálló reláció fennáll az argumentumok között is. Így a fenti egyenlőtlenség ekvivalens az alábbival:

$$n \geq 0,$$

amely minden természetes n esetén automatikusan teljesül.

ii) Ez a legkisebb felső korlát, hiszen a sorozat egyik eleme felveszi ezt az értéket.

□

vissza a feladathoz

2.2. Házi Feladat. *Definíció alapján igazoljuk a következő sorozatok konvergenciáját és adjuk meg, hogy a sorozat mely elemei esnek a határérték $\varepsilon = 0{,}02$ sugarú környezetébe!*

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{3n+2}{n+1};\ n \in \mathbb{N}\right) \\ b &= \left(\frac{1-7n}{2n-1};\ n \in \mathbb{N}\right) \\ c &= \left(\frac{6n-1}{2-3n};\ n \in \mathbb{N}\right) \end{aligned}$$

Megoldás.

a) Sejtés $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N\ |a_n - 3| < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{3n+2}{n+1} - 3\right| &< \varepsilon \\ \left|\frac{3n+2-(3n+3)}{n+1}\right| &< \varepsilon \\ \left|\frac{-1}{n+1}\right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

$$\frac{-1}{n+1} < 0,\ \Rightarrow\ \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< n+1 \\ \frac{1}{\varepsilon} - 1 &< n \end{aligned}$$

$$N(\varepsilon) := \max\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right];\ 0\right\}$$

Tehát bármely $\varepsilon > 0$ számhoz előállítható a definíciónak megfelelő küszöbszám, így az a sorozat konvergens és határértéke 3.

$$N(0{,}02) := \max\left\{\left[\frac{1}{\frac{2}{100}} - 1\right];\ 0\right\} = \max\{[50-1];\ 0\} = 49.$$

Tehát a sorozat 49. eleme még kívül van, de az 50-től kezdve a sorozat minden eleme a 3 szám 0,02 sugarú környezetébe esik.

b) Sejtés $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\frac{7}{2}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N\ |b_n + \frac{7}{2}| < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1-7n}{2n-1}+\frac{7}{2}\right| &< \varepsilon\\ \left|\frac{2-14+4-6n}{2(2n-1)}\right| &< \varepsilon\\ \left|\frac{-5}{2(2n-1)}\right| &< \varepsilon\end{aligned}$$

$$\frac{-5}{2(2n-1)}<0, \Rightarrow \left|\frac{-5}{2(2n-1)}\right|=\frac{5}{2(2n-1)}.$$

$$\begin{aligned}\frac{5}{2(2n-1)} &< \varepsilon\\ \frac{5}{2\varepsilon} &< 2n-1\\ \frac{5}{2\varepsilon}+1 &< 2n\\ \frac{\frac{5}{2\varepsilon}+1}{2} &< n\end{aligned}$$

$$N(\varepsilon):=\max\left\{\left[\frac{\frac{5}{2\varepsilon}+1}{2}\right];\ 0\right\}$$

Tehát bármely $\varepsilon>0$ számhoz előállítható a definíciónak megfelelő küszöbszám, így a b sorozat konvergens és határértéke $-\frac{7}{2}$.

$$N(0{,}02):=\max\left\{\left[\frac{\frac{5}{2\varepsilon}+1}{2}\right];\ 0\right\}=\max\left\{\left[\frac{\frac{500}{4}+1}{2}\right];\ 0\right\}=\max\left\{\left[\frac{126}{2}\right];\ 0\right\}=63.$$

Tehát a sorozat 63. eleme még kívül van, de a 64.-től kezdve a sorozat minden eleme a határérték ε sugarú környezetébe esik.

c) Sejtés $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=-2.$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\quad \forall n>N\ |c_n+2|<\varepsilon.$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{6n-1}{2-3n}+2\right| &< \varepsilon\\ \left|\frac{6n-1+4-6n}{2-3n}\right| &< \varepsilon\\ \left|\frac{3}{2-3n}\right| &< \varepsilon\end{aligned}$$

$\frac{3}{2-3n}>0 \Leftrightarrow n<\frac{2}{3} \Leftrightarrow n=0$

Ez végessok eset, ezért a konvergenciát nem befolyásolja.

Ha $n \geq 1$, akkor

$$\frac{3}{2-3n}<0 \Rightarrow \left|\frac{3}{2-3n}\right|=\frac{3}{3n-2}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{3n-2} &< \varepsilon \\ \frac{3}{\varepsilon} &< 3n-2 \\ \frac{3}{\varepsilon}+2 &< 3n \\ \frac{\frac{3}{\varepsilon}+2}{3} &< n \end{aligned}$$

$$N(\varepsilon) := \max\left\{\left[\frac{\frac{3}{\varepsilon}+2}{3}\right];\ 0\right\}$$

Tehát bármely $\varepsilon > 0$ számhoz előállítható a definíciónak megfelelő küszöbszám, így a c sorozat konvergens és határértéke -2.

$$N(0{,}02) := \max\left\{\left[\frac{\frac{3}{\frac{2}{100}}+2}{3}\right];\ 0\right\} = \max\left\{\left[\frac{\frac{300}{2}+2}{3}\right];\ 0\right\} = 50.$$

Vagyis a sorozat elemei az 51.-től kezdve mind bent vannak a $[-2{,}02,\ -1{,}98]$ intervallumban. $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

3. fejezet

Nevezetes sorozatok

3.1. Gyakorlat

3.1. Feladat. *Vizsgáljuk meg a következő sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából. Bizonyítsuk a konvergenciát definíció alapján!*

$$a = \left(\frac{2n+3}{3n+1}, n \in \mathbb{N}\right).$$

Megoldás.

I) Monotonitás:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)+3}{3(n+1)+1} - \frac{2n+3}{3n+1} = \frac{2n+5}{3n+4} - \frac{2n+3}{3n+1} = \\
&= \frac{(2n+5)\cdot(3n+1) - (2n+3)\cdot(3n+4)}{(3n+1)\cdot(3n+4)} = \frac{(6n^2+17n+5) - (6n^2+17n+12)}{(3n+1)\cdot(3n+4)} = \\
&= \frac{-7}{(3n+1)\cdot(3n+4)} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{n+1} - a_n < 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} < a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Így a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

II) Konvergencia

Sejtés: A sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3} = A$, azaz

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
|a_n - A| &< \varepsilon \\
\left|\frac{2n+3}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{6n+9-(6n+2)}{3\cdot(3n+1)}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{7}{3\cdot(3n+1)}\right| &< \varepsilon, \qquad \frac{7}{3\cdot(3n+1)} > 0, \text{ ezért}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{7}{3\cdot(3n+1)} &< \varepsilon, \qquad (3n+1)>0,\ \text{ezért} \\ \frac{7}{3\cdot\varepsilon} &< 3n+1 \\ \frac{7}{9\cdot\varepsilon}-\frac{1}{3} &< n \end{aligned}$$

Így

$$N(\varepsilon) := \max\left\{\left[\frac{7}{9\cdot\varepsilon}-\frac{1}{3}\right], 0\right\}$$

választása mellett a definíció teljesül, azaz a sorozat valóban konvergens és a határérétéke $\lim a = \frac{2}{3}$.

III) Korlátosság

Mivel a sorozat konvergens és a konvergencia szükséges feltétele a korlátosság, ezért a sorozat korlátos is. Ha a sorozat alsó- illetve felső határát is kérdezné a feladat, akkor arra a tételre hivatkozhatnánk, melyszerint monoton csökkenő sorozat szuprémuma a kezdőelem és infimuma a határérték, azaz

$$\sup a = a_0 = 3 \quad \inf a = \lim a = \frac{2}{3}.$$

♢

3.2. Feladat. *Vizsgáljuk meg a következő sorozatot monotonitás, korlátosság szempontjából. Adjuk meg az alsó- és felső határát. Adjuk meg a határértékét, ha létezik. (Nem kell definíció alapján vizsgálni.)*

$$a = \left(3+(-1)^n\frac{2}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right)$$

Megoldás.

I. monotonitás:

A $(-1)^n$-es tényező miatt a sorozat felváltva tartalmaz 3-nál kisebb illetve 3-nál nagyobb elemeket. Így a sorozat nem monoton. (Indokolható lenne 3 egymásutáni elem felsorolásával, például $a_1 = 1 < a_2 = 4 > a_3 = \frac{7}{3}$, ebből viszont még nem látszana, hogy a sorozat egy bizonyos indextől kezdve sem monoton. Vizsgálható lenne a szokásos módon az $a_{n+1}-a_n$ különbség előjele alapján is, de a $(-1)^n$ sorozat tulajdonságaira hivatkozni lényegesen egyszerűbb.)

II. korlátosság, határok:

Legyen

$$\begin{aligned} \nu = (2n,\ n\in\mathbb{N}^*) \quad a\circ\nu &= (3+(-1)^{2n}\frac{2}{2n},\ n\in\mathbb{N}^*) \\ \mu = (2n+1,\ n\in\mathbb{N}) \quad a\circ\mu &= (3+(-1)^{2n+1}\frac{2}{2n+1},\ n\in\mathbb{N}). \end{aligned}$$

Ekkor

$$(a\circ\nu)_k > 3 > (a\circ\mu)_l, \quad \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall l\in\mathbb{N},$$

és

$$(a\circ\nu) \underset{\text{fésűs}}{\cup} (a\circ\mu) = a.$$

Így $\sup a = \sup(a\circ\nu)$ és $\inf a = \inf(a\circ\mu)$.

Sejtés: $\sup a = \sup(a\circ\nu) = 4$

Bizonyítás.

i) A 4 valóban jó felső korlát, hiszen

$$\begin{aligned}(a\circ\nu)_n &\leq 4\ \forall n\in\mathbb{N}^*\\ 3+\frac{2}{2n} &\leq 4\ \forall n\in\mathbb{N}^*\\ (0<)\frac{1}{n} &\leq 1\ \forall n\in\mathbb{N}^*\\ n &\geq \frac{1}{1}=1\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\end{aligned}$$

ami valóban mindig teljesül.

ii) A 4 valóban a legkisebb felső korlát, hiszen $(a\circ\nu)_1=4$, ezért

$$\max(a\circ\nu)=(a\circ\nu)_1=4.$$

□

Az $\inf a=\inf(a\circ\mu)=1$ sejtés hasonlóan igazolható. Otthon egyénileg befejezendő.

III. konvergencia

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a\circ\nu)_n &= \lim_{n\to\infty} 3+\frac{1}{n}=3\\ \lim_{n\to\infty}(a\circ\mu)_n &= \lim_{n\to\infty} 3-\frac{2}{2n+1}=3\end{aligned}$$

A fenti két állítás a definíció szerint igazolható és házi feladatként igazolni is kell. Mivel

$$(a\circ\nu)\underset{\text{fésűs}}{\cup}(a\circ\mu)=a \text{ és } \lim(a\circ\nu)=\lim(a\circ\mu)=3,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty}a_n=3.$$

♢

3.1.1. Nevezetes sorozatok

A következő nevezetes sorozatok határértékeit definíció alapján fogjuk igazolni. A mértani sorozatok konvergenciáját és határértékét az előző fejezetben már vizsgáltuk. A gyakorlaton részletes magyarázattal csak az $a=(a_n=\sqrt[n]{\alpha},\ n\in\mathbb{N}^*,\ \alpha\in\mathbb{R}^+)$, $a=(a_n=\sqrt[n]{n},\ n\in\mathbb{N}^*)$ és az $a=(a_n=\sqrt[n]{n!},\ n\in\mathbb{N}^*)$ sorozatok szerepelnek.

$a=(a_n=C,\ n\in\mathbb{N},\ C\in\mathbb{R}^+)$ **konvergenciája**

Sejtés: $\lim a=C$.

Bizonyítás. A konvergencia definícióját felírva:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ |a_n-C|<\varepsilon.$$

Mivel $a_n-C=0$ minden $n\in\mathbb{N}$ index esetén, ezért az $|a_n-C|<\varepsilon$ reláció bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén fennáll, így $N=0$ minden $\varepsilon>0$ esetén jó küszöbindex. □

$a = (a_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*)$ **konvergenciája**

Sejtés: $\lim a = 0$.

Bizonyítás. A konvergencia definícióját felírva:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*\ \forall n > N\ |a_n - 0| < \varepsilon.$$

Mivel $\frac{1}{n} > 0$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ezért $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$, így a definícióban szereplő relációval ekvivalens az alábbi összefüggés:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &< \varepsilon \qquad (n > 0,\ \varepsilon > 0) \\ \frac{1}{\varepsilon} &< n. \end{aligned}$$

Legyen tehát $N(\varepsilon) := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. A kapott küszöbindex választása mellett a definíció teljesül, azaz $(a_n,\ n \in \mathbb{N})$ sorozat valóban konvergens és határértéke 0. □

$a = (a_n = n^p,\ n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}^*)$ **konvergenciája**

Sejtés: $\lim a = \infty$.

Bizonyítás. A sorozat a sejtés alapján tágabb értelemben konvergens. Írjuk fel a megfelelő definíciót:

$$\forall R \in \mathbb{R}\ \exists N(R) \in \mathbb{N}^*\ \forall n > N\ n^p > R.$$

Ha $R \leq 0$, akkor $N = 1$ jó küszöbszám.

Vizsgáljuk most az $R > 0$ esetet. Mivel $R > 0$, ezért a reláció irányát nem változtatja meg, ha az egyenlőtlenség mindkét oldalából p-edik gyököt vonunk:

$$n > \sqrt[p]{R}.$$

Így $N(R) = \left[\sqrt[p]{R}\right]$ jó küszöbszám. □

$a = (a_n = \sqrt[p]{n},\ n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}^*)$ **konvergenciája**

Sejtés: $\lim a = \infty$.

Bizonyítás. A sorozat a sejtés alapján tágabb értelemben konvergens. Írjuk fel a megfelelő definíciót:

$$\forall R \in \mathbb{R}\ \exists N(R) \in \mathbb{N}^*\ \forall n > N\ \sqrt[p]{n} > R.$$

Ha $R \leq 0$, akkor $N = 1$ jó küszöbszám.

Vizsgáljuk most az $R > 0$ esetet. Mivel $R > 0$, ezért a reláció irányát nem változtatja meg, ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát p-edik hatványra emeljük:

$$n > R^p.$$

Így $N(R) = [R^p]$ jó küszöbszám. □

$a = (a_n = \frac{\alpha^n}{n!},\ n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{R})$ **konvergenciája**

Sejtés: $\lim a = 0$.

Bizonyítás. A konvergencia definícióját felírva:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*\ \forall n > N\ |a_n - 0| < \varepsilon.$$

Legyen $\beta := |\alpha|$, ekkor a fenti reláció a következő alakban írható $\frac{\beta^n}{n!} < \varepsilon$, melyre igaz az alábbi becslés:

$$\frac{\beta^n}{n!} = \frac{\beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \ldots \cdot \beta \quad \cdot \quad \beta \qquad \cdot \ldots \cdot \quad \beta \quad \cdot \quad \beta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot [\beta] \cdot ([\beta]+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n} \leq \frac{\beta^{[\beta]}}{[\beta]!} \cdot 1 \cdot \frac{\beta}{n} < \varepsilon$$

Ahonnan $n > \frac{\beta^{[\beta]+1}}{[\beta]! \cdot \varepsilon}$, így $N(\varepsilon) := \left[\frac{\beta^{[\beta]+1}}{[\beta]! \cdot \varepsilon}\right]$ jó küszöbindex. □

$a = (a_n = \sqrt[n]{\alpha},\ n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha \in \mathbb{R}^+)$ **konvergenciája**

Sejtés: $\lim a = 1$.

Bizonyítás. A konvergencia definícióját felírva:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*\ \forall n > N\ |a_n - 1| < \varepsilon.$$

$0 < \alpha \leq 1$:

$$\sqrt[n]{\alpha} \leq \sqrt[n]{1} = 1 \ \Rightarrow\ |\sqrt[n]{\alpha} - 1| = 1 - \sqrt[n]{\alpha}$$

A definícióban szereplő reláció helyett vizsgáljuk tehát a következő összefüggést:

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt[n]{\alpha} &< \varepsilon \\ 1 - \varepsilon &< \sqrt[n]{\alpha} \end{aligned}$$

Ha $1 - \varepsilon \leq 0$, akkor minden $N \in \mathbb{N}^*$ jó küszöbszám, ha $1 - \varepsilon > 0$, akkor az egyenlőtlenség mindkét oldalát n-edik hatványra emelhetjük:

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon)^n &< \alpha \\ \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^n &> \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség bal oldalát becsüljük a Bernoulli-egyenlőtlenség (1.2) alapján:

$$\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^n = \left(1 + \left(\frac{1}{1-\varepsilon} - 1\right)\right)^n \overset{B}{\geq} 1 + n \cdot \left(\frac{1}{1-\varepsilon} - 1\right) > \frac{1}{\alpha}$$

A kapott összefüggésből n-et kifejezve:

$$n > \frac{\frac{1}{\alpha} - 1}{\frac{1}{1-\varepsilon} - 1} > 0 \quad \Rightarrow N(\varepsilon) := \left[\frac{\frac{1}{\alpha} - 1}{\frac{1}{1-\varepsilon} - 1}\right]$$

A fenti $N(\varepsilon)$ választása mellett a definíció teljesül, azaz a sorozat valóban konvergens és a határértéke 1.

$\alpha > 1$:

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{1} = 1 \ \Rightarrow\ |\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1$$

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a}-1 &< \varepsilon\\ 0<\sqrt[n]{a} &< 1+\varepsilon\\ a &< (1+\varepsilon)^n\end{aligned}$$

$$(1+\varepsilon)^n \overset{B}{\geq} 1+n\cdot\varepsilon > a$$

$$n > \frac{a-1}{\varepsilon} > 0 \quad \Rightarrow N(\varepsilon) := \left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right].$$

A fenti $N(\varepsilon)$ választása mellett a definíció teljesül, azaz a sorozat valóban konvergens és a határértéke 1. □

$a=(a_n=\sqrt[n]{n},\ n\in\mathbb{N}^*)$ **konvergenciája**

Sejtés: $\lim a = 1$.

Bizonyítás. A konvergencia definícióját felírva:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*\ \forall n>N\ |a_n-1|<\varepsilon.$$

Mivel $n\geq 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{n}\geq 1 \Rightarrow |\sqrt[n]{n}-1| = \sqrt[n]{n}-1$, ezért a definícióban szereplő reláció helyett vizsgáljuk a következő összefüggést:

$$\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon \ \Leftrightarrow\ n<(1+\varepsilon)^n$$

Hatványozás azonosságait és ismét a Bernoulli-egyenlőtlenséget (1.2) használhatjuk a becslésre:

$$(1+\varepsilon)^n = (\sqrt{1+\varepsilon})^{2n} = (1+\underbrace{(\sqrt{1+\varepsilon}-1)}_{>0})^{2n} \overset{B}{\geq} (1+n\cdot(\sqrt{1+\varepsilon}-1))^2 > (\sqrt{1+\varepsilon}-1)^2\cdot n^2 > n,$$

ahonnan

$$n > \frac{1}{(\sqrt{1+\varepsilon}-1)^2} > 0 \ \Rightarrow\ N(\varepsilon) := \left[\frac{1}{(\sqrt{1+\varepsilon}-1)^2}\right].$$

A fenti $N(\varepsilon)$ választása mellett a definíció teljesül, azaz a sorozat valóban konvergens és a határértéke 1. □

$a=(a_n=\sqrt[n]{n!},\ n\in\mathbb{N}^*)$ **konvergenciája**

Sejtés: $\lim a = \infty$.

Bizonyítás. A sorozat a sejtés alapján tágabb értelemben konvergens. Írjuk fel a megfelelő definíciót:

$$\forall R\in\mathbb{R}\ \exists N(R)\in\mathbb{N}^*\ \forall n>N\ \sqrt[n]{n!}>R.$$

Ha $R\leq 0$, akkor $N=1$ jó küszöbszám.

Vizsgáljuk most az $R>0$ esetet. Mivel $R>0$, ezért a reláció irányát nem változtatja meg, ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát n-edik hatványra emeljük:

$$n! > R^n \ \Leftrightarrow\ \frac{R^n}{n!} < 1.$$

$$\frac{R^n}{n!} = \frac{R\cdot R\cdot R\cdot\ldots\cdot R \quad\cdot\quad R \quad\cdot\ldots\cdot\quad R\ \cdot\ R}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot[R]\cdot([R]+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n} \leq \frac{R^{[R]}}{[R]!}\cdot 1\cdot\frac{R}{n} < 1$$

$$n > \frac{R^{[R]+1}}{[R]!} \quad\Rightarrow\quad N(R) := \left[\frac{R^{[R]+1}}{[R]!}\right] = \left[\frac{R^{[R]}}{([R]-1)!}\right],$$

A fenti $N(R)$ választása mellett a definíció teljesül, azaz a sorozat valóban divergens és a határértéke ∞. □

3.2. Házi Feladatok

3.1. Házi Feladat. *Vizsgáljuk meg a következő sorozatot monotonitás, korlátosság szempontjából. Adjuk meg az alsó- és felső határát. Adjuk meg a határértékét, ha létezik. Bizonyítsuk a konvergenciát definíció alapján.*

a) $a = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n+2};\ n \in \mathbb{N}\right)$

megoldás

b) $a = \left(\frac{3n-5}{2n+7};\ n \in \mathbb{N}\right)$

megoldás

3.3. Megoldások

3.1. Házi Feladat. *Vizsgáljuk meg a következő sorozatot monotonitás, korlátosság szempontjából. Adjuk meg az alsó- és felső határát. Adjuk meg a határértékét, ha létezik. Bizonyítsuk a konvergenciát definíció alapján.*

a) $a = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n+2};\ n \in \mathbb{N}\right)$

Megoldás.

I. Monotonitás:

a nem monoton, hiszen elemei felváltva nagyobbak, illetve kisebbek mint 1.

II. Korlátosság, határok:

Legyen

$$(\nu = 2n,\ n \in \mathbb{N}) \quad a \circ \nu = \left(1 + \frac{(-1)^{2n}}{2n+2},\ n \in \mathbb{N}^*\right) = \left(1 + \frac{1}{2n+2},\ n \in \mathbb{N}^*\right)$$
$$(\mu = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}) \quad a \circ \mu = \left(1 + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+3},\ n \in \mathbb{N}\right) = \left(1 + \frac{1}{2n+3},\ n \in \mathbb{N}^*\right).$$

Ekkor

$$(a \circ \nu)_k > 1 > (a \circ \mu)_\ell, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall l \in \mathbb{N},$$

és

$$(a \circ \nu) \underset{\text{fésűs}}{\cup} (a \circ \mu) = a.$$

Így $\sup a = \sup(a \circ \nu)$ és $\inf a = \inf(a \circ \mu)$.

Sejtés: $\sup a = \sup(a \circ \nu) = \frac{3}{2}$

Bizonyítás.

i) A $\frac{3}{2}$ valóban egy jó felső korlát, hiszen

$$\begin{aligned}
(a \circ \nu)_n &\le \frac{3}{2} \\
1 + \frac{1}{2n+2} &\le \frac{3}{2} \\
(0 <)\frac{1}{2n+2} &\le \frac{1}{2} \\
2n+2 &\ge 2 \\
2n &\ge 0 \\
n &\ge 0,
\end{aligned}$$

ami valóban minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül.

ii) A $\frac{3}{2}$ a legkisebb felső korlát, hiszen $(a \circ \nu)_0 = \frac{3}{2}$.

Az $\inf a = \inf(a \circ \mu) = \frac{2}{3}$ sejtés hasonlóan igazolható. Egyénileg befejezendő. $\square$

III. Konvergencia:

sejtés: $\lim a = 1$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned} \left|1 + \frac{(-1)^n}{n+2} - 1\right| &< \varepsilon \\ \left|\frac{(-1)^n}{n+2}\right| &< \varepsilon \\ \frac{1}{n+2} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< n+2 \\ \frac{1}{\varepsilon} - 2 &< n \end{aligned}$$

$$N(\varepsilon) := \max\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon} - 2\right];\ 0\right\}$$

♢

vissza a feladathoz

b) $a = \left(\dfrac{3n-5}{2n+7};\ n \in \mathbb{N}\right)$

Megoldás.

I) Monotonitás:

$$a_{n+1} = \frac{3(n+1)-5}{2(n+1)+7} = \frac{3n-2}{2n+9}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{3n-2}{2n+9} - \frac{3n-5}{2n+7} = \frac{(3n-2)(2n+7)-(3n-5)(2n+9)}{(2n+9)(2n+7)} = \\ &= \frac{6n^2+21n-4n-14-(6n^2+27n-10n-45)}{(2n+9)(2n+7)} = \\ &= \frac{31}{(2n+9)(2n+7)} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$a_{n+1} > a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

tehát a sorozat szigorúan monoton növő.

II) Konvergencia

Sejtés: $\lim a = \frac{3}{2}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{3n-5}{2n+7}-\frac{3}{2}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{6n-10-6n-21}{2(2n+7)}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{-31}{2(2n+7)}\right| &< \varepsilon \\
\frac{31}{2(2n+7)} &< \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{31}{2\varepsilon} &< 2n+7 \\
\frac{31}{2\varepsilon}-7 &< 2n \\
\frac{\frac{31}{2\varepsilon}-7}{2} &< n
\end{aligned}$$

$$N(\varepsilon) := \max\left\{\left[\frac{\frac{31}{2\varepsilon}-7}{2}\right];\ 0\right\}$$

Azért érdemes a konvergenciát előbb vizsgálni, mert ilyenkor a korlátosság vizsgálat helyett elég arra a tételre hivatkozni, mely szerint a konvergencia szükséges feltétele a korlátosság. Ha a határokra is szükség van, akkor további vizsgálódás kell.

III) Korlátosság, határok:

Mivel a sorozat szigorúan monoton növő, ezért

$$\inf a = \min a = a_0 = -\frac{5}{7}, \quad \sup a = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}.$$

Gyakorlásként érdemes a fenti tétel felhasználása nélkül is igazolni a határokat.

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

4. fejezet

Határérték számítás I.

4.1. Gyakorlat

4.1.1. Divergens sorozatok

4.1. Feladat. *Definíció alapján vizsgáljuk a következő tágabb értelemben konvergens sorozatokat.*

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{n^2+2n}{n+1},\ n\in\mathbb{N}\right) \\ b &= \left(-5\cdot 3^n,\ n\in\mathbb{N}\right) \end{aligned}$$

Megoldás.

a) Az a sorozat valódi divergens (tágabb értelemben konvergens) és $\lim a = +\infty$, mert

$$\forall R\in\mathbb{R}\ \exists N=N(R)\in\mathbb{N},\ \text{hogy}\ \forall n>N:\ a_n>R \tag{4.1}$$

$$\frac{n^2+2n}{n+1}>R$$

Ha $R<0$, akkor minden $N\in\mathbb{N}$ jó küszöb, ha $R\geq 0$, akkor tovább vizsgálódunk:

$$\begin{aligned} (0<)\frac{n^2+2n}{n+1}>\frac{n^2+n}{n+1} &> R, \quad \text{mert } n\geq 0 \\ n &> R \end{aligned}$$

$$N(R):=\max\{[R];\ 0\}$$

Mivel az $N(R)$-nél nagyobb indexű elemei a sorozatnak nagyobbak R-nél, a sorozat valóban divergens és határértéke $+\infty$.

b) A b sorozat valódi divergens és $\lim b = -\infty$, mert

$$\forall r\in\mathbb{R}\ \exists N=N(r)\in\mathbb{N},\ \text{hogy}\ \forall n>N:\ b_n<r \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} -5\cdot 3^n &< r \\ 3^n &> -\frac{1}{5}r \\ (1+(3-1))^n \overset{B}{\geq} 1+n(3-1) &> -\frac{1}{5}r \\ 2n &> -\frac{1}{5}r-1 \\ n &> \frac{-\frac{1}{5}r-1}{2} \end{aligned}$$

$$N(r) := \max\left\{\left[\frac{-\frac{1}{5}r-1}{2}\right]\ ;\ 0\right\}$$

Mivel az $N(r)$-nél nagyobb indexű elemei a sorozatnak kisebbek r-nél, a sorozat valóban divergens és határértéke $-\infty$.

4.1. Megjegyzés.

1. *Ha a környezet definícióját kiterjesztjük és azt mondjuk, hogy*

$$K_\varepsilon(+\infty) := \left\{x|\ x\in\mathbb{R}\ x > \frac{1}{\varepsilon}(=:R)\right\},$$

akkor a (4.1) és (4.2) definíciók a konvergencia definícióval csengenek egybe. (Innen az elnevezés is.)

2. *Az összes divergens sorozat kielégíti az alábbi definíciót, amely a konvergencia definíció negálásával nyerhető:*

Az $a = (a_n,\ n\in\mathbb{N})$ sorozat divergens, ha

$$\forall A\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon_0>0,\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \textit{hogy}\ n_0>N,\ \textit{de}$$

$$|a_{n_0}-A|\geq\varepsilon_0.$$

Ezt ritkán használjuk.

4.1.2. Határérték számítás a műveleti tulajdonságok alapján

A műveleti tulajdonságok az alábbi határozatlansági esetekben nem alkalmazhatók: „$\frac{0}{0}$”, „$\frac{\infty}{\infty}$”, „$\infty-\infty$” „$0\cdot\infty$”, „0^0”, „1^∞”, „∞^0”.

4.2. Feladat. *A műveleti tulajdonságok alapján határozzuk meg a következő sorozatok határértékét, ha létezik.*

a) $a = \left(2-\frac{5}{n+2}+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\cdot\sin\frac{n\cdot\pi}{2},\ n\in\mathbb{N}\right)$

Megoldás.
A fenti sorozatra

$$a_n = b_n - c_n + d_n\cdot f_n \quad \forall n\in\mathbb{N},\ \text{ahol}$$

$$\begin{aligned} b &= (2,\ n\in\mathbb{N}) & c &= \left(\tfrac{5}{n+2},\ n\in\mathbb{N}\right)\\ d &= \left(\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n,\ n\in\mathbb{N}\right) & f &= \left(\sin\tfrac{n\cdot\pi}{2},\ n\in\mathbb{N}\right)\end{aligned}$$

$\lim d\cdot f = 0$, mert $d\in\mathcal{N}$ és $f\in\mathcal{K}$. (Lásd a tételt előadáson.)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underbrace{\lim_{n\to\infty} b_n}_{2} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} c_n}_{0} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} d_n\cdot f_n}_{0} = 2.$$

◊

Típus: két polinom hányadosa
Eljárás: A nevező legmagasabb kitevőjű tagjával egyszerűsítünk.

b) $a = \left(\frac{2n^2-5n-7}{n^2-5},\ n\in\mathbb{N}\right)$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-5n-7}{n^2-5} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2-\frac{5}{n}-\frac{7}{n^2})}{n^2(1-\frac{5}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{5}{n}-\frac{7}{n^2}}{1-\frac{5}{n^2}} = 2$$

$\diamondsuit$

c) $a = \left(\frac{7n-3}{2n^2+1},\ n\in\mathbb{N}\right)$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{7n-3}{2n^2+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\frac{7}{n}-\frac{3}{n^2})}{n^2(2+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7}{n}-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = 0$$

$\diamondsuit$

d) $a = \left(\frac{5n^2-11n+8}{2n-7},\ n\in\mathbb{N}\right)$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-11n+8}{2n-7} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n(5n-11+\frac{8}{n})}{n(2-\frac{7}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n-11+\frac{8}{n}}{2-\frac{7}{n}} = \infty$$

$\diamondsuit$

4.2. Megjegyzés.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 0, & ha\ \deg P < \deg Q \\ \operatorname{sgn}\frac{p}{q}\cdot\infty, & ha\ \deg P > \deg Q \\ C = \frac{p}{q}, & ha\ \deg P = \deg Q, \end{cases}$$

ahol p a $P(x)$, q pedig a $Q(x)$ polinom főegyütthatója.

Típus: q^n racionális törtfüggvénye
Eljárás: Közös kitevőre hozunk, majd a nevező legnagyobb alapú (abszolútértékben) tagjával egyszerűsítünk.

e) $a = \left(\frac{3\cdot5^{n-1}+2\cdot3^n}{-4^{n+2}+5\cdot3^{n-2}};\ n\in\mathbb{N}\right)$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot5^{n-1}+2\cdot3^n}{-4^{n+2}+5\cdot3^{n-2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{5}\cdot5^n+2\cdot3^n}{-16\cdot4^n+\frac{5}{9}\cdot3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{5^n}{4^n}+2\frac{3^n}{4^n}}{-16+\frac{5}{9}\cdot\frac{3^n}{4^n}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^n+2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}{-16+\frac{5}{9}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n} = -\infty.\end{aligned}$$

f) $a = \left(\frac{7\cdot9^n-6\cdot5^{n-1}}{5\cdot4^n-2\cdot3^{2n+1}};\ n\in\mathbb{N}\right)$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot 9^n - 6\cdot 5^{n-1}}{5\cdot 4^n - 2\cdot 3^{2n+1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot 9^n - \frac{6}{5}\cdot 5^n}{5\cdot 4^n - 2\cdot 3\cdot (3^2)^n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot 9^n - \frac{6}{5}\cdot 5^n}{5\cdot 4^n - 6\cdot (9)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7 - \frac{6}{5}\cdot\frac{5^n}{9^n}}{5\cdot\frac{4^n}{9^n} - 6} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{7 - \frac{6}{5}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^n}{5\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n - 6} = -\frac{7}{6}
\end{aligned}$$

g) $a = \left(\frac{4\cdot 2^{n-1}+3\cdot(-7)^n}{2\cdot 3^{n+1}+5\cdot 4^{2n-1}};\ n\in\mathbb{N}\right)$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 2^{n-1}+3\cdot(-7)^n}{2\cdot 3^{n+1}+5\cdot 4^{2n-1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty}\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2^n + 3\cdot(-7)^n}{6\cdot 3^n + \frac{5}{4}\cdot 16^n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\frac{2^n}{16^n}+3\frac{(-7)^n}{16^n}}{6\frac{3^n}{16^n}+\frac{5}{4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\frac{1}{8}\right)^n + 3\left(-\frac{7}{16}\right)^n}{6\left(\frac{3}{16}\right)^n + \frac{5}{4}} = 0
\end{aligned}$$

Típus: Két végtelenbe tartó racionális-tört különbsége
Eljárás: Közös nevezőre hozunk, ezzel „polinom-per-polinom” alakot kapunk.

h) $a = \left(\frac{n^2+1}{2n+1} - \frac{3n^2+1}{6n+1};\ n\in\mathbb{N}\right)$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n+1} - \frac{3n^2+1}{6n+1}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)(6n+1)-(3n^2+1)(2n+1)}{(2n+1)(6n+1)} = \\
&= \frac{-2n^2+4n}{(2n+1)(6n+1)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}
\end{aligned}$$

A nevező legnagyobb kitevőjű tagja $\sim n^2$, ezzel osztunk. Ha ez a szorzat alakból nem látszik felbonthatjuk a zárójeleket.

A fenti $(2n+1)(6n+1)$ szorzatból három féleképpen lehet n^2-t kiemelni:

1. Az első tényezőből emelek ki n^2-t,
2. A második tényezőből emelek ki n^2-t,
3. Mindkét tényezőből kiemelek n-t.

Most ez utóbbit érdemes választani:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(-2+\frac{4}{n^2})}{n^2(2+\frac{1}{n})(6+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{12} = \frac{-1}{6}$$

◊

Típus: „Gyökök” különbsége
Eljárás: Konjugálttal bővítünk.

i) $a = \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n-1};\ n \in \mathbb{N}\right)$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim a &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \text{„konjugálttal bővítünk”}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1}\right)\frac{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n-1}}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n-1}} =\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n+1)-(n^2-n-1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n-1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{2} = 1.
\end{aligned}$$

j) $a = \left(\sqrt{5n^2+2} - 2n;\ n \in \mathbb{N}\right)$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim a &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{5n^2+2}-2n\right) \overset{\infty-\infty}{=} \text{„konjugálttal bővítünk”}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{5n^2+2}-2n\right)\frac{\sqrt{5n^2+2}+2n}{\sqrt{5n^2+2}+2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+2-4n^2}{\sqrt{5n^2+2}+2n} =\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{\sqrt{5n^2+2}+2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{2}{n}}{\sqrt{5+\frac{2}{n^2}}+2} = \infty.
\end{aligned}$$

k) $a = \left(\sqrt[3]{n^3-2n^2+1} - n;\ n \in \mathbb{N}\right)$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim a &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2+1}-n\right) \overset{\infty-\infty}{=} \text{„konjugálttal bővítünk”}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2+1}-n\right)\frac{\sqrt[3]{(n^3-2n^2+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2+1}+n^2}{\sqrt[3]{(n^3-2n^2+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2+1}+n^2} =\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^3-2n^2+1)-n^3}{\sqrt[3]{(n^3-2n^2+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2+1}+n^2} =\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2+1}{\sqrt[3]{(n^3-2n^2+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2+1}+n^2} =\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3})^2}+1\cdot\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}+1} = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

l) $a = \left(\frac{\sqrt[3]{n^3-6n}-\sqrt{n^3+2n^2}}{\sqrt{4n^2-3n}};\ n \in \mathbb{N}\right)$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3-6n}-\sqrt{n^3+2n^2}}{\sqrt{4n^2-3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1-\frac{6}{n^2}}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{4-\frac{3}{n}}} = -\infty$$

Ebben a feladatban is gyökök különbsége szerepel a számlálóban, mégsem kell konjugálttal bővíteni. Ennek oka hogy a benne lévő n hatványok különböznek, a tört nagy n-ekre úgy viselkedik, mint $\frac{n-n^{3/2}}{n} = 1-n^{\frac{1}{2}}$. ♢

Típus: Változó tagszámú sorozatok
Eljárás: Összegképlet keresése.

m) $a = \left(\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3};\ n \in \mathbb{N}\right)$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} \overset{\circ}{=}$$

Változó tagszámú összeg. Az ilyenekre nem alkalmazhatók a műveleti szabályok.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bizonyítását lásd az 1. gyakorlaton. A dolgozatban az összefüggést bizonyítani is kell.

$$\overset{\circ}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$ ♢

n) $a = \left(\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)}{n^3};\ n \in \mathbb{N}\right)$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)}{n^3} \overset{\circ}{=}$$

Változó tagszámú összeg. Megpróbáljuk felírni az összegképletet.

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

Vagy az 1. gyakorlat 3. házi feladatában használt bizonyítással.

$$\overset{\circ}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}(n+1)n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{6}\cdot 1(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})\frac{1}{n}}{1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$ ♢

Típus: $\sqrt[n]{n}$ és $\sqrt[n]{a}$ racionális törtfüggvényei
Eljárás: Szorzattá alakítás.

o) $a = \left(\frac{\sqrt[n]{n^3}+5\sqrt[n]{n^2}+5\sqrt[n]{n}-2}{\sqrt[n]{n}+2};\ n \in \mathbb{N}^*\right)$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}+5\sqrt[n]{n^2}+5\sqrt[n]{n}-2}{\sqrt[n]{n}+2} = \frac{9}{3} = 3.$$

Felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$, ha $k \in \mathbb{N}$. ♢

p) $a = \left(\frac{3\sqrt[n]{16}-4\sqrt[n]{8}+1}{(\sqrt[n]{2}-1)^2};\ n \in \mathbb{N}\right)$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt[n]{16}-4\sqrt[n]{8}+1}{(\sqrt[n]{2}-1)^2} \overset{\circ}{=}$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$, ha $c \in \mathbb{R}_+$, a fenti határérték „$\frac{0}{0}$" határozatlansági esetre vezet. Legyen $a := \sqrt[n]{2}$, ekkor

$$\frac{3\sqrt[n]{16}-4\sqrt[n]{8}+1}{(\sqrt[n]{2}-1)^2} = \frac{3a^4-4a^3+1}{(a-1)^2} \overset{*}{=} \frac{(a-1)^2(3a^2+2a+1)}{(a-1)^2}$$

$*$: Mivel a számlálóban szereplő polinom 1 helyen 0 értéket vesz fel, ezért szorzattá alakításában szerepelni fog az $(a-1)$ tényező. Próbáljuk a számlálót szorzattá alakítani. Ezt csoportosítással, kiemeléssel, vagy polinomosztással érhetjük el.

$$\begin{array}{rrrrrl}
3a^4 & -4a^3 & +0a^2 & +0a & +1 & :(a-1) = \ 3a^3-a^2-a-1. \\
3a^4 & -3a^3 & & & & \\ \hline
 & -a^3 & +0a^2 & +0a & +1 & \\
 & -a^3 & +a^2 & & & \\ \hline
 & & -a^2 & +0a & +1 & \\
 & & -a^2 & +a & & \\ \hline
 & & & -a & +1 & \\
 & & & -a & +1 & \\ \hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Mivel a $3a^3-a^2-a-1$ polinomnak is zérushelye a=1, ezért tovább bontható:

$$\begin{array}{rrrrl}
3a^3 & -a^2 & -a & -1 & :(a-1) = \ 3a^2+2a+1. \\
3a^3 & -3a^2 & & & \\ \hline
 & 2a^2 & -a & -1 & \\
 & 2a^2 & -2a & & \\ \hline
 & & a & -1 & \\
 & & a & -1 & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

Ezért $3a^4-4a^3+1=(a-1)^2(3a^2+2a+1)$ és

$$\stackrel{\circ}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{2}-1)^2\cdot(3\sqrt[n]{2^2}+2\sqrt[n]{2}+1)}{(\sqrt[n]{2}-1)^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{4}+2\sqrt[n]{2}+1=6 \qquad \diamondsuit$$

q) $a=\left(\frac{\sqrt[n]{n^3}+2\sqrt[n]{n^2}-4\sqrt[n]{n}+1}{2\sqrt[n]{n}-2};\ n\in\mathbb{N}^*\right)$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}+2\sqrt[n]{n^2}-4\sqrt[n]{n}+1}{2\sqrt[n]{n}-2} \stackrel{\circ}{=}$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k}=1$, ha $k\in\mathbb{N}$, a fenti határérték„$\frac{0}{0}$" határozatlansági esetre vezet. Legyen $a:=\sqrt[n]{n}$, ekkor

$$\frac{\sqrt[n]{n^3}+2\sqrt[n]{n^2}-4\sqrt[n]{n}+1}{2\sqrt[n]{n}-2}=\frac{a^3+2a^2-4a+1}{2(a-1)}$$

A szorzattá alakításhoz polinomosztást végzünk a közös $a-1$ gyöktényezővel:

$$\begin{array}{cccc|l}
a^3 & +2a^2 & -4a & +1 & :(a-1)= \quad a^2+3a-1 \\
a^3 & -a^2 & & & \\ \hline
 & 3a^2 & -4a & +1 & \\
 & 3a^2 & -3a & & \\ \hline
 & & -a & +1 & \\
 & & -a & +1 & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$$\stackrel{\circ}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n}-1)(\sqrt[n]{n^2}+3\sqrt[n]{n}-1)}{2(\sqrt[n]{n}-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}+3\sqrt[n]{n}-1}{2} = \frac{3}{2} \qquad \diamondsuit$$

4.2. Házi Feladatok

4.1. Házi Feladat. *Definíció alapján igazoljuk, hogy a következő sorozat tágabb értelemben konvergens.*

$$a = \left(\frac{-5n^2 - 2n}{n+1};\ n \in \mathbb{N}\right)$$

megoldás

4.2. Házi Feladat. *A műveleti tulajdonságok alapján számítsuk ki a következő határértékeket!*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 2n^3 + 8}{2n^2 - 7}$ *megoldás*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\cdot 3^n - 5\cdot 4^{n+1}}{4\cdot 2^{n-1} + 5\cdot 3^{n+2}}$ *megoldás*

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 5}{-n^2 + 2n} \cdot \left(2 - \dfrac{6}{n-3} + \dfrac{4n-1}{-n+3}\right)$ *megoldás*

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3 + 3n^2}}{\sqrt[3]{n^3 - 5n^2}}$ *megoldás*

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$ *megoldás*

f) $\lim\limits_{n\to\infty} (3n - \sqrt{9n^2 + n - 2})$ *megoldás*

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}$ *megoldás*

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\sqrt[n]{27} + \sqrt[n]{9} + 4\sqrt[n]{3} - 7}{\sqrt[n]{9} - 1}$ *megoldás*

További gyakorló feladatok

1) [15] *71.o.: 3.b), c) 4.a) feladatok*

2) [15] *73.o.: 11.a), b), c), d), j), k) feladatok* A *11.k)* feladatban $\alpha \in \mathbb{K}$ helyett $\alpha \in \mathbb{R}$ esetben.

3) [9] *7.o.: 27. feladat 4., 6., 9.*

4) [9] *7.o.: 29. feladat*

5) [9] *7.o.: 30. feladat 1-6., 9., 24., 28., 29., 30.*

6) [15] *73.o.: 11. feladat*

7) [9] *7.o.: 30. feladat*

4.3. Megoldások

4.1. Házi Feladat. *Definíció alapján igazoljuk, hogy a következő sorozat tágabb értelemben konvergens.*

$$a = \left(\frac{-5n^2 - 2n}{n+1};\ n \in \mathbb{N} \right)$$

Megoldás.
sejtés: $\lim a = -\infty$

$$\forall r \in \mathbb{R}\ \exists N = N(r) \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ a_n < r$$

$$\begin{aligned}
\frac{-5n^2-2n}{n+1} &< r \\
\frac{-3n^2}{n+1} + \frac{-2n^2-2n}{n+1} &< r \\
\frac{-3n^2}{n+1} - 2 &< r \\
\frac{-3n^2}{n+1} &< r+2 \\
\frac{3n^2}{n+1} &> -r-2 \\
\frac{3n^2}{n+1} > \frac{-3n^2}{n+n} = \frac{-3n^2}{2n} &> -r-2 \quad \text{ha } n \geq 1 \\
\frac{3}{2}n &< -r-2 \\
n &> -\frac{2}{3}(r+2)
\end{aligned}$$

$$N(r) := \max\left\{ \left[-\frac{2}{3}(r+2) \right];\ 0 \right\}.$$

◊

vissza a feladathoz

4.2. Házi Feladat. *A műveleti tulajdonságok alapján számítsuk ki a következő határértékeket!*

Megoldás.
a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 2n^3 + 8}{2n^2 - 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 2n + \frac{8}{n^2}}{2 - \frac{7}{n^2}} = -\infty.$$

vissza a feladathoz

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 3^n - 5\cdot 4^{n+1}}{4\cdot 2^{n-1} + 5\cdot 3^{n+2}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 3^n - 20\cdot 4^n}{2\cdot 2^n + 45\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - 20\cdot \frac{4^n}{3^n}}{2\cdot \frac{2^n}{3^n} + 45} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2 - 20\cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n}{2\cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 45} = -\infty.
\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

c)

$$\lim_{n\to\infty} \overbrace{\underbrace{\frac{3n^2-5}{-n^2+2n}}_{a_n} \cdot \left(\underbrace{2}_{b_n} - \underbrace{\frac{6}{n-3}}_{c_n} + \underbrace{\frac{4n-1}{-n+3}}_{d_n} \right)}^{x_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-5}{-n^2+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{5}{n^2}}{-1+\frac{2}{n}} = -3 =: A$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 2 = 2 =: B$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n-3} = 0 =: C$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-1}{-n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{1}{n}}{-1+\frac{3}{n}} = -4 =: D$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A(B-C+D) = -3(2-0+(-4)) = 6.$$

vissza a feladathoz

d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+3n^2}}{\underbrace{\sqrt[3]{n^3-5n^2}}_{\sqrt[3]{n^3}\sim n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt[3]{1-\frac{5}{n}}} = \infty.$$

vissza a feladathoz

e)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) &= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = 0.\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

f)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (3n-\sqrt{9n^2+n-2}) &= \lim_{n\to\infty} (3n-\sqrt{9n^2+n-2}) \cdot \frac{3n+\sqrt{9n^2+n-2}}{3n+\sqrt{9n^2+n-2}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2-(9n^2+n-2)}{3n+\sqrt{9n^2+n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n+2}{3n+\sqrt{9n^2+n-2}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{-1+\frac{2}{n}}{3+\sqrt{9+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}} = \frac{-1}{3+\sqrt{9}} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

g)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3} \stackrel{\circ}{=}$$

$$\begin{aligned} 1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2 &= \left(1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n)^2\right)-\left(2^2+4^2+\cdots+(2n)^2\right)= \\ &= \left(1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n)^2\right)-2^2\cdot\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{2n} k^2 = \frac{2n\cdot(2n+1)\cdot(4n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} 1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2 &= \frac{2n\cdot(2n+1)\cdot(4n+1)}{6}-\frac{4n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}= \\ &= \frac{n(2n+1)}{3}\cdot(4n+1-2(n+1))=\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\circ}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot(2+\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}{3} = \frac{4}{3}.$$

vissza a feladathoz

h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt[n]{27}+\sqrt[n]{9}+4\sqrt[n]{3}-7}{\sqrt[n]{9}-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt[n]{27}+\sqrt[n]{9}+4\sqrt[n]{3}-7}{(\sqrt[n]{3}-1)(\sqrt[n]{3}+1)} \stackrel{\circ}{=}$

Legyen $a := \sqrt[n]{3}$, ekkor

$$\begin{array}{rrrr l}
2a^3 & +a^2 & +4a & -7 & :(a-1) = \quad 2a^2+3a+7 \\
a^3 & -2a^2 & & & \\ \hline
 & 3a^2 & +4a & -7 & \\
 & 3a^2 & -3a & & \\ \hline
 & & 7a & -7 & \\
 & & 7a & -7 & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$$\stackrel{\circ}{=} \lim_{n\to\infty} = \frac{2\sqrt[n]{9}+3\sqrt[n]{3}+7}{\sqrt[n]{3}+1} = \frac{12}{2} = 6.$$

♢

vissza a feladathoz

5. fejezet

Határérték számítás II.

5.1. Gyakorlat

5.1.1. Határérték számítás a műveleti tulajdonságok alapján

Típus: $((-1)^n,\ n \in \mathbb{N})$ **sorozatot tartalmazó sorozatok**
Eljárás: Páros és páratlan indexű részsorozatok vizsgálata.

5.1. Feladat. *A műveleti tulajdonságok alapján határozzuk meg a következő sorozatok határértékét, ha létezik.*

a) $a = \left((-1)^n \frac{7n-5}{n+9};\ n \in \mathbb{N}\right)$

Megoldás.
Legyen $\nu = (2n,\ n \in \mathbb{N})$, ekkor

$$(a \circ \nu) = \left((-1)^{2n} \frac{7 \cdot 2n - 5}{2n+9},\ n \in \mathbb{N}\right) = \left(\frac{14n-5}{2n+9},\ n \in \mathbb{N}\right),$$

amelyre

$$\lim(a \circ \nu) = \lim_{n\to\infty} \frac{14n-5}{2n+9} = \lim_{n\to\infty} \frac{14 - \frac{5}{n}}{2 + \frac{9}{n}} = 7,$$

és legyen $\mu = (2n+1,\ n \in \mathbb{N})$, ekkor

$$(a \circ \mu) = \left((-1)^{2n+1} \frac{7 \cdot (2n+1) - 5}{2n+1+9},\ n \in \mathbb{N}\right) = \left(-\frac{14n+2}{2n+10},\ n \in \mathbb{N}\right),$$

amelyre

$$\lim(a \circ \mu) = \lim_{n\to\infty} -\frac{14n+2}{2n+11} = -\lim_{n\to\infty} \frac{14 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{11}{n}} = -7.$$

Az a sorozatnak van két, különböző határértékkel rendelkező részsorozata, ami ellentmond a konvergencia harmadik következményének. („*Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és ezek határértéke megegyezik az eredeti sorozat határértékével.*") Így az a sorozat divergens.

5.1. Megjegyzés. *Nyilvánvaló, hogy a két vizsgált részsorozat határértéke az eredeti sorozat torlódási pontja. Sőt, mivel a sorozat a két részsorozatának fésűs egyesítése, ezért más torlódási pont nincs is.* $\diamondsuit$

b) $a = \left((-1)^n \frac{2n+3}{n^2-7},\ n \in \mathbb{N}\right)$

Megoldás.

1. megoldás

Legyen $\nu = (2n,\ n \in \mathbb{N})$, ekkor

$$(a \circ \nu) = \left((-1)^{2n} \frac{4n+3}{4n^2-7},\ n \in \mathbb{N}\right) = \left(\frac{4n+3}{4n^2-7},\ n \in \mathbb{N}\right),$$

amelyre

$$\lim(a \circ \nu) = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{4n^2-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}}{4 - \frac{7}{n^2}} = 0,$$

és legyen $\mu = (2n+1,\ n \in \mathbb{N})$, ekkor

$$(a \circ \mu) = \left((-1)^{2n+1} \frac{4\cdot(2n+1)+3}{(2n+1)^2-7},\ n \in \mathbb{N}\right) = \left(-\frac{4n+7}{4n^2+4n-6},\ n \in \mathbb{N}\right),$$

amelyre

$$\lim(a \circ \mu) = \lim_{n\to\infty} -\frac{4n+7}{4n^2+4n-6} = -\lim_{n\to\infty} \frac{4n+\frac{7}{n^2}}{4+\frac{4}{n}-\frac{6}{n^2}} = 0.$$

Mivel az a sorozat a két vizsgált részsorozat fésűs egyesítése, azaz $a = (a \circ \mu) \underset{\text{fésűs}}{\cup} (a \circ \nu)$, és $\lim(a \circ \mu) = \lim(a \circ \nu) = 0$, ezért $\lim a = 0$.

2. megoldás:

Előadáson bebizonyítottuk, hogy egy korlátos és egy null-sorozat szorzata nullsorozat. $((-1)^n,\ n \in \mathbb{N})$ korlátos és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n^2-7} = 0$. ♢

c) $a = \left((-1)^n \frac{3n^2+n}{2n-1}, n \in \mathbb{N}\right)$

Megoldás.

Legyen $\nu = (2n,\ n \in \mathbb{N})$, ekkor

$$(a \circ \nu) = \left((-1)^{2n} \frac{12n^2+2n}{4n-1},\ n \in \mathbb{N}\right) = \left(\frac{12n^2+2n}{4n-1},\ n \in \mathbb{N}\right),$$

amelyre

$$\lim(a \circ \nu) = \lim_{n\to\infty} \frac{12n^2+2n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n+2}{4-\frac{1}{n}} = \infty$$

és legyen $\mu = (2n+1,\ n \in \mathbb{N})$, ekkor

$$(a \circ \mu) = \left((-1)^{2n+1} \frac{3\cdot(2n+1)^2+(2n+1)}{4\cdot(2n+1)-1},\ n \in \mathbb{N}\right) = \left(-\frac{12n^2-14n-4}{4n+1},\ n \in \mathbb{N}\right),$$

amelyre

$$\lim(a \circ \mu) = \lim_{n\to\infty} -\frac{12n^2-14n-4}{4n+1} = -\lim_{n\to\infty} \frac{12n-14-\frac{4}{n}}{4+\frac{1}{n}} = -\infty$$

Mivel a-nak van két részsorozata, melyeknek nem azonos a határértékük, ezért a konvergencia harmadik következményének értelmében az a sorozat nem konvergens, még tágabb értelemben sem, azaz nem létezik $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ határérték. ♢

A következő néhány feladatot az alábbi tételre vezetjük vissza:

$(1+\frac{1}{n})^n$ konvergenciája

5.2. Feladat. *Igazoljuk, hogy az* $\left((1+\frac{1}{n})^n,\ n\in\mathbb{N}^*\right)$ *sorozat konvergens!*

Megoldás.
A fenti sorozat konvergenciáját nem a definíció alapján bizonyítjuk, hanem az alábbi, előadásról ismert tétel alapján:

5.2. Tétel. *Monoton és korlátos sorozat konvergens.*

I. Monotonitás:

Sejtés: a szigorúan monoton növő. Bizonyítandó, hogy

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \\ (1+\frac{1}{n})^n &< (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Tekintsük az

$$(1+\frac{1}{n});\ (1+\frac{1}{n});\ldots;(1+\frac{1}{n});1$$

$n+1$ darab pozitív számot és írjuk fel a számtani- és mértani közepük közötti összefüggést, melyet a 1. gyakorlaton mondtunk ki. Mivel a számok nem mind egyenlők, a reláció szigorú:

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})\cdot(1+\frac{1}{n})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{n})\cdot 1} &< \frac{(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{1}{n})+\cdots+(1+\frac{1}{n})+1}{n+1} \\ (0<)\ \sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n} &< \frac{n\cdot(1+\frac{1}{n})+1}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1} \qquad /(\quad)^{n+1} \\ (1+\frac{1}{n})^n &< \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ a_n &< a_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \end{aligned}$$

és épp ezt akartuk bizonyítani.

II. Korlátosság: Mivel a szigorúan monoton növő $k=a_1=(1+\frac{1}{1})^1=2$ egy jó alsó korlát. (Sőt ez az infimum is.)

A felső becsléshez tekintsük az

$$(1+\frac{1}{n});\ (1+\frac{1}{n});\ldots;(1+\frac{1}{n});\frac{1}{2};\frac{1}{2}$$

$n+2$ darab pozitív szám számtani- és mértani közepe közötti összefüggést:

$$\begin{aligned} \sqrt[n+2]{(1+\frac{1}{n})\cdot(1+\frac{1}{n})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{n})\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} &< \frac{(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{1}{n})+\cdots+(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2} \\ (0<)\ \sqrt[n+2]{(1+\frac{1}{n})^n\cdot\frac{1}{4}} &< \frac{n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2} = 1 \qquad /\ (\quad)^{n+2} \\ (1+\frac{1}{n})^n &< 4 \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \\ a_n &< 4 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Vagyis $K=4$ egy jó felső korlát. Tehát $2<a_n<4,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Így a sorozat korlátos és monoton növő, a fenti tétel értelmében konvergens. (Tudjuk, a határérték monotonitása miatt, hogy $2<\lim a<4$.) $\diamondsuit$

5.3. Megjegyzés.

1. *Belátható, hogy $K=3$ is jó felső korlát.*
2. *A fenti sorozat határértékét e-vel szokás jelölni és Euler-számnak nevezzük. A közelítő értéke: $e \approx 2{,}71828$.*

Kimondható tehát a következő tétel:

5.4. Tétel. *Az $(1+\frac{1}{n})^n$ sorozat monoton és korlátos, ezért konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$$

Bizonyítás nélkül elfogadjuk a következő tételt.

5.5. Tétel. *Ha $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, akkor*

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{b_n})^{b_n} = e$$

A következő tétel állításaira szintén szükségünk lesz a feladatok megoldásához.

5.6. Tétel.

(1) Ha $a_n \to a > 0$ és $b_n \to b \in \mathbb{R}$, akkor $a_n^{b_n} \to a^b$ $(n\to\infty)$

(2) Ha $a_n \to a > 1$ és $b_n \to \infty$, akkor $a_n^{b_n} \to \infty$ $(n\to\infty)$

(3) Ha $a_n \to a$ $(0 < a < 1)$ és $b_n \to \infty$, akkor $a_n^{b_n} \to 0$ $(n\to\infty)$

5.3. Feladat. *A műveleti tulajdonságok alapján határozzuk meg a kijelölt határértékeket!*

Típus: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$-re visszavezethető feladatok

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = ?$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}\cdot 3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}}_{\to e}\right]^3 = e^3$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2+n-1}\right)^{\frac{2n^3}{n-1}}=?$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2+n-1}\right)^{\frac{2n^3}{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n-1-3n+2}{n^2+n-1}\right)^{\frac{2n^3}{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3n+2}{n^2+n-1}\right)^{\frac{2n^3}{n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+n-1}{-3n+2}}\right)^{\frac{2n^3}{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+n-1}{-3n+2}}\right)^{\frac{n^2+n-1}{-3n+2}\cdot\frac{-3n+2}{n^2+n-1}\cdot\frac{2n^3}{n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+n-1}{-3n+2}}\right)^{\frac{n^2+n-1}{-3n+2}}\right]^{\frac{-3n+2}{n^2+n-1}\cdot\frac{2n^3}{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+n-1}{-3n+2}}\right)^{\underbrace{\frac{n^2+n-1}{-3n+2}}_{\to-\infty}}}_{\to e}\right]^{\frac{-6n^4+4n^3}{n^3-2n+1}}\overset{*}{=}0.$$

*: Vizsgáljuk meg külön a kitevő határértékét:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-6n^4+4n^3}{n^3-2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-6n+4}{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=-\infty,$$

így az előző tétel alapján a fenti határérték 0. ♢

Típus: Rendőrelvvel megoldható feladatok

A következő feladatok megoldása során sokszor fogunk hivatkozni a következő tételre.

5.7. Tétel. (Rendőrelv) *Legyen $a=(a_n,n\in\mathbb{N})$, $b=(b_n,n\in\mathbb{N})$ és $c=(c_n,n\in\mathbb{N})$ három valós számsorozat, melynek elemeire:*

$$a_n\le b_n\le c_n.$$

Ha a és c sorozatok konvergensek, és $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$, akkor a b sorozat is konvergens és határértéke

$$\lim_{n\to\infty}b_n=A.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5-\frac{1}{n+1}}=?$

Megoldás.

Becsüljük a sorozat általános tagját! Ehhez induljunk ki az alábbi relációból:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & < & \frac{1}{n+1} & \le & 1\\ 0 & > & -\frac{1}{n+1} & \ge & -1\\ 5 & > & 5-\frac{1}{n+1} & \ge & 4\\ \sqrt[n]{5} & > & \sqrt[n]{5-\frac{1}{n+1}} & \ge & \sqrt[n]{4}\end{array}$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}=1$, ezért a rendőrelv alapján:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5-\frac{1}{n+1}}=1.$$

♢

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2-5n+3}{n^5+1}}$

Megoldás.
Hogy a $\frac{n^2-5n+3}{n^5+1}$ törtet becsülni tudjuk vizsgáljuk meg az előjelét:

$$\frac{n^2-5n+3}{n^5+1} > 0 \quad n^2-5n+3 > 0,$$

ami a természetes n-ek között az $n \geq 5$ feltétel teljesülése esetén igaz.

- A felsőbecsléshez a fenti törtet szeretnénk növelni. Ez a számláló növelésével és/vagy a nevező csökkentésével lehetséges.
  - A számláló növelését úgy szeretnénk elvégezni, hogy a kapott polinom csak „összevonható" tagokat tartalmazzon. Ehhez a pozitív együtthatóval szereplő tagok helyett főtaggal (legmagasabb fokszámú tag) egynemű kifejezéseket írunk (az együtthatót változatlanul hagyjuk), a negatív együtthatójú tagokat elhagyjuk az összegből. Így

    $$n^2-5n+3 \leq n^2-0+3n^2.$$

    A kapott becslés minden szóbajöhető n-re teljesül ($n \geq 5$).
  - A nevező csökkentése során éppen ellenkezőleg járunk el. A pozitív együtthatójú tagokat hagyjuk el (kivéve természetesen a főtagot) és a negatív együtthatójú tagok helyett írunk a főtaggal egynemű kifejezést:

    $$n^5+1 \geq n^5+0 \quad \forall n \geq 5.$$

    Felhívnánk a figyelmet arra, hogy a nevező becslésekor vigyázni kell arra is, hogy a kifejezés egyetlen szóba jöhető n esetén se legyen 0. Így ha korábban nem zártuk volna ki n lehetséges értékei közül a 0-t, most meg kellene tennünk.
- Alsóbecsléshez csökkentsük a $\frac{n^2-5n+3}{n^5+1}>0$ törtet, amely a számláló csökkentésével és/vagy a nevező növelésével lehetséges.
  - Mivel $n^5+1 \leq n^5+n^5$, ha $n \geq 1$, ezért a nevező az előzőekhez hasonló indoklás alapján növelhető minden szóbajöhető n esetén.
  - Ha a számláló csökkentése során a $n^2-5n+3 \geq n^2-5n^2+0$ becslést használnánk, akkor a vizsgált tört helyett egy negatív előjelű kifejezést kapnánk. Célunk, hogy az előző feladathoz hasonlóan az n-edik gyök szigorú monotonitására hivatkozva alkalmazhassuk a rendőrelvet, de negatív kifejezés esetén az n-edik gyökvonás nem engedélyezett művelet. Az ilyen hibás becslést *túlbecslés*nek szokás nevezni.
    Mit tehetünk ilyen esetben? Fontos, hogy a számlálóban szereplő polinomot úgy csökkentsük, hogy eközben az előjele ne változzon meg. Például $n^2-\frac{1}{2}n^2+0$ egy jó becslés, abban az esetben, ha valóban kisebb az eredeti polinomnál. Vizsgáljuk meg, hogy milyen n-ek esetén teljesül ez:

    $$\begin{aligned} n^2-\frac{1}{2}n^2+0 &\leq n^2-5n+3 \\ -\frac{1}{2}n^2 &\leq -5n < -5n+3 \\ n &\geq 10. \end{aligned}$$

    Azaz minden $n \geq 10$ esetén $n^2-\frac{1}{2}n^2+0 \leq n^2-5n+3$ teljesül és ekkor

    $$\frac{n^2-\frac{1}{2}n^2+0}{n^5+n^5} \leq \frac{n^2-5n+3}{n^5+1}.$$

Így igaz az alábbi becslés:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \le \frac{n^2-\frac{1}{2}n^2+0}{n^5+n^5} & \le & \frac{n^2-5n+3}{n^5+1} & \le & \frac{n^2-0+3n^2}{n^5+0} & n \ge 10 \; n \in \mathbb{N} \\ \sqrt[n]{\frac{1}{4}n^{-3}} & \le & a_n & \le & \sqrt[n]{4n^{-3}} & n \ge 10 \; n \in \mathbb{N} \end{array}$$

A rendőrelv alapján:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2-5n+3}{n^5+1}} = 1. \qquad \diamondsuit$$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n-2^n}$

Megoldás.

$$3 \leftarrow 3\cdot\sqrt[n]{1-\frac{2}{3}} \le 3\cdot\sqrt[n]{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \sqrt[n]{3^n-2^n} = 3\cdot\sqrt[n]{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n} \le 3\cdot\sqrt[n]{1+0} \to 3.$$

A fenti reláció $\forall n \in \mathbb{N}^*$-ra fennáll, mert $0 < \left(\frac{2}{3}\right)^n \le \frac{2}{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, így a rendőrelv alapján

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n-2^n} = 3. \qquad \diamondsuit$$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n}$

Megoldás.

$$0 \leftarrow 0 \le \frac{n^3}{2^n} = \frac{n^3}{(\sqrt[4]{2})^{4n}} = \frac{n^3}{\left((1+(\sqrt[4]{2}-1))^n\right)^4} \overset{B}{\le} \frac{n^3}{(1+n(\sqrt[4]{2}-1))^4} \le \frac{n^3}{n^4(\sqrt[4]{2}-1)^4} = \frac{1}{n}\frac{1}{(\sqrt[4]{2}-1)^4} \to 0,$$

így rendőrelv alapján

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0.$$

A $\overset{B}{\le}$ becslés során az első gyakorlaton igazolt Bernoulli egyenlőtlenséget (1.2) alkalmaztuk. Így a nevezőt csökkentettük azáltal, hogy $(1+(\sqrt[4]{2}-1))^n$ helyett $1+n(\sqrt[4]{2}-1)$-et írtunk. $\diamondsuit$

5.1.2. Sorozatok alsó- és felső határértéke

5.8. Definíció. *Legyen $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ egy valós számsorozat. Az a* ***torlódási pontjai****nak halmazán a*

$$H := \left\{\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \mid \exists \nu : \mathbb{N}\to\mathbb{N} \text{ indexsorozat, hogy } \lim(a\circ\nu) = \alpha\right\}$$

halmazt értjük.

5.9. Definíció. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy valós számsorozat. Tekintsük az a torlódási pontjainak*

$$H := \left\{\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \mid \exists \nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ indexsorozat, hogy } \lim(a \circ \nu) = \alpha\right\}$$

*halmazát. Az a sorozat **felső határértékének** nevezzük a H halmaz szuprémumát, azaz*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \sup H,$$

*és hasonlóan az a sorozat **alsó határértéke**:*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \inf H.$$

5.4. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi sorozatok alsó és felső határértékét!*

a) $a = \left(3 + 2 \cdot \frac{(-1)^n \cdot n^2}{n^2 - 2n},\ n \in \mathbb{N}^*\right)$

Megoldás.
Vizsgáljuk a sorozat páros indexű elemeiből álló részsorozatát és vizsgáljuk meg a páratlan indexű elemekből álló részsorozatot is!

Legyen $\nu = (2n,\ n \in \mathbb{N}^*)$, ekkor

$$(a \circ \nu) = \left(3 + 2 \cdot \frac{(-1)^{2n} \cdot (2n)^2}{(2n)^2 - 2(2n)},\ n \in \mathbb{N}^*\right) = \left(3 + 2\frac{4n^2}{4n^2 - 4n},\ n \in \mathbb{N}^*\right),$$

amelyre

$$\lim(a \circ \nu) = \lim_{n\to\infty} 3 + 2\frac{4n^2}{4n^2 - 4n} = \lim_{n\to\infty} 3 + 2\frac{4}{4 - \frac{4}{n}} = 5$$

és legyen $\mu = (2n+1,\ n \in \mathbb{N})$, ekkor

$$\begin{aligned}(a \circ \mu) &= \left(3 + 2 \cdot \frac{(-1)^{2n+1} \cdot (2n+1)^2}{(2n+1)^2 - 2(2n+1)}, n \in \mathbb{N}\right) = \left(3 - 2\frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 4n + 1 - 4n - 2},\ n \in \mathbb{N}\right) = \\ &= \left(3 - 2\frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 - 1},\ n \in \mathbb{N}\right)\end{aligned}$$

amelyre

$$\lim(a \circ \mu) = \lim_{n\to\infty} 3 - 2\frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} 3 - 2\frac{4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 - \frac{1}{n^2}} = 1.$$

Mivel a két felsorolt konvergens részsorozat fésűs egyesítése az a sorozat, ezért a torlódási pontok halmaza csak a két említett részsorozat határértékét tartalmazza, $T = \{5,\ 1\}$. A torlódási pontok közül a legkisebbet nevezzük alsó határértéknek, a legnagyobbat pedig felső határértéknek, azaz

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 1 \quad \text{és} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = 5.$$

Mivel $\liminf a \neq \limsup a$, ezért a sorozat nem konvergens. $\diamondsuit$

b) $a=\left(1+\cos(n\cdot\frac{\pi}{3}),\ n\in\mathbb{N}\right)$

Megoldás.
Írjuk fel a sorozat néhány elemét:

$$a_0=1+\cos 0=2,\ a_1=1+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2},\ a_2=1+\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2},\ a_3=1+\cos\pi=0,$$
$$a_4=1+\cos\frac{4\pi}{3}=\frac{1}{2},\ a_5=1+\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2},\ a_1=1+\cos 2\pi=1+\cos 0=2,\ldots$$

Megállapítható, hogy az a sorozat az alábbi index-sorozatokhoz tartozó diszjunkt részsorozatok fésűs egyesítése:

$$\begin{aligned}\alpha &= (6n,\ n\in\mathbb{N})\\ \beta &= (6n+1,\ n\in\mathbb{N})\\ \gamma &= (6n+2,\ n\in\mathbb{N})\\ \delta &= (6n+3,\ n\in\mathbb{N})\\ \epsilon &= (6n+4,\ n\in\mathbb{N})\\ \phi &= (6n+5,\ n\in\mathbb{N})\end{aligned}$$

Könnyen látható, így a torlódási pontok halmaza:

$$T=\left\{2,\ \frac{3}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right\},$$

és $\liminf a=0$, $\limsup a=2$.

$a=\left((-1)^n\frac{2n+3}{n^2-7},\ n\in\mathbb{N}\right)$

A kérdéses sorozatot már vizsgáltuk a b) feladatban, ahol azt találtuk, hogy a sorozat konvergens. Ismert tétel alapján az a sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha pontosan egy torlódási pontja van, vagyis ha $\limsup a=\liminf a$. $\diamondsuit$

5.2. Házi Feladatok

5.1. Házi Feladat. *A műveleti tulajdonságok alapján határozzuk meg a következő határértékeket:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^{n+1} - 2\cdot 3^{n+1}}{(-1)^{n+1}2^n + 3^n}$ *megoldás*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \dfrac{(-1)^n}{n}$ *megoldás*

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+5}{3n-1}\right)^{2n+1}$ *megoldás*

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2-n+1}{3n^2+n+1}\right)^{\frac{n^3}{1-n}}$ *megoldás*

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7+\dfrac{1}{n+2}} \cdot \left(\dfrac{n-3}{n+5}\right)^{n-2}$ *megoldás*

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3n^2+5n-1}{n^3-7}}$ *megoldás*

5.2. Házi Feladat. *Határozzuk meg az alábbi sorozatok alsó és felső határértékét!*

a) $a = \left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right)$ *megoldás*

b) $a = \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{2},\ n \in \mathbb{N}\right)$ *megoldás*

c) $a = \left((-1)^n \cdot \cos(n\cdot\dfrac{\pi}{2}),\ n \in \mathbb{N}\right)$ *megoldás*

További gyakorló feladatok

1) [15] *73.o.: 11. feladat*

2) [9] *7.o.: 30. feladat*

3) [15] *71.o.: 3.b), c) 4.a) feladatok*

4) [15] *73.o.: 11.a), b), c), d), j), k) feladatok* A *11.k)* feladatban $\alpha \in \mathbb{K}$ helyett $\alpha \in \mathbb{R}$ esetben.

5) [9] *7.o.: 27. feladat 4., 6., 9.*

6) [9] *7.o.: 29. feladat*

7) [9] *7.o.: 30. feladat 1-6., 9., 24., 28., 29., 30.*

5.3. Megoldások

5.1. Házi Feladat. *A műveleti tulajdonságok alapján határozzuk meg a következő határértékeket:*

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n+1} - 2\cdot 3^{n+1}}{(-1)^{n+1}2^n + 3^n}$

Megoldás.
Legyen

$$a = \left(\frac{(-1)^n \cdot 2^{n+1} - 2\cdot 3^{n+1}}{(-1)^{n+1}2^n + 3^n},\ n\in\mathbb{N}\right) \quad \text{és} \quad \nu = (2n,\ n\in\mathbb{N}),$$

ekkor

$$(a\circ\nu) = \left(\frac{(-1)^{2n} \cdot 2^{2n+1} - 2\cdot 3^{2n+1}}{(-1)^{2n+1}2^{2n} + 3^{2n}},\ n\in\mathbb{N}\right) = \left(\frac{2^{2n+1} - 2\cdot 3^{2n+1}}{-2^{2n} + 3^{2n}},\ n\in\mathbb{N}\right),$$

amelyre

$$\begin{aligned}\lim(a\circ\nu) &= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1} - 2\cdot 3^{2n+1}}{-2^{2n} + 3^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n - 6\cdot 9^n}{-4^n + 9^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{4^n}{9^n} - 6}{-\frac{4^n}{9^n} + 1} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n - 6}{-\left(\frac{4}{9}\right)^n + 1} = -6.\end{aligned}$$

Hasonlóan legyen $\mu = (2n+1,\ n\in\mathbb{N})$, ekkor

$$(a\circ\mu) = \left(\frac{(-1)^{2n+1} \cdot 2^{2n+2} - 2\cdot 3^{2n+2}}{(-1)^{2n+2}2^{2n+1} + 3^{2n+1}},\ n\in\mathbb{N}\right) = \left(\frac{-4\cdot 4^n - 18\cdot 9^n}{2\cdot 4^n + 3\cdot 9^n},\ n\in\mathbb{N}\right),$$

amelyre

$$\lim(a\circ\mu) = \lim_{n\to\infty}\frac{-4\cdot 4^n - 18\cdot 9^n}{2\cdot 4^n + 3\cdot 9^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-4\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n - 18}{2\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n + 3} = -6$$

Mivel

$$a = (a\circ\nu)\underset{\text{fésűs}}{\cup}(a\circ\mu) \quad \text{és} \quad L(a\circ\nu) = L(a\circ\mu) = -6,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -6.$$

◊

vissza a feladathoz

b) $\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{(-1)^n}{n}$

Megoldás.
Legyen $a := \left(\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{(-1)^n}{n},\ n\in\mathbb{N}\right)$ és $\nu := (2n,\ n\in\mathbb{N})$, ekkor

$$a\circ\nu = \left(1 - \frac{(-1)^{2n}}{2n},\ n\in\mathbb{N}\right) = \left(1 - \frac{1}{2n},\ n\in\mathbb{N}\right)$$

$$L(a\circ\nu) = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2n} = 1.$$

És legyen $\mu := (2n+1,\ n \in \mathbb{N})$, ekkor

$$a \circ \mu = \left(1 - \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1},\ n \in \mathbb{N}\right) = \left(1 + \frac{1}{2n+1},\ n \in \mathbb{N}\right)$$

$$L(a \circ \mu) = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2n+1} = 1.$$

Mivel

$$a = (a \circ \nu) \underset{\text{fésűs}}{\cup} (a \circ \mu) \quad \text{és} \quad L(a \circ \nu) = L(a \circ \mu) = 1,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+5}{3n-1}\right)^{2n+1}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+5}{3n-1}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1+6}{3n-1}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{6}{3n-1}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n-1}{6}}\right)^{2n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n-1}{6}}\right)^{\frac{3n-1}{6}\cdot\frac{6}{3n-1}\cdot(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{3n-1}{6}}\right)^{\frac{3n-1}{6}}}_{\to e}\right]^{\frac{12n+6}{3n-1}} \doteq$$

Vizsgáljuk meg külön a kitevő határértékét:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n+6}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{12 + \frac{6}{n}}{3 - \frac{1}{n}} = 4$$

Így $\doteq e^4$.

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2-n+1}{3n^2+n+1}\right)^{\frac{n^3}{1-n}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2-n+1}{3n^2+n+1}\right)^{\frac{n^3}{1-n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+n+1-2n}{3n^2+n+1}\right)^{\frac{n^3}{1-n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-2n}{3n^2+n+1}\right)^{\frac{n^3}{1-n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n^2+n+1}{-2n}}\right)^{\frac{n^3}{1-n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n^2+n+1}{-2n}}\right)^{\frac{3n^2+n+1}{-2n}\cdot\frac{-2n}{3n^2+n+1}\cdot\frac{n^3}{1-n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{3n^2+n+1}{-2n}}\right)^{\frac{3n^2+n+1}{-2n}}}_{\to e}\right]^{\frac{-2n}{3n^2+n+1}\cdot\frac{n^3}{1-n}} \doteq$$

Vizsgáljuk meg külön a kitevő határértékét:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^4}{(1-n)(3n^2+n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n}{(\frac{1}{n}-1)(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \infty$$

Így $\doteq \infty$. ♢

vissza a feladathoz

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7+\dfrac{1}{n+2}} \cdot \left(\dfrac{n-3}{n+5}\right)^{n-2}$

Megoldás.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & \frac{1}{n+2} & \leq & 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ 7 & \leq & 7+\frac{1}{n+2} & \leq & 8 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \sqrt[n]{7} & \leq & \sqrt[n]{7+\frac{1}{n+2}} & \leq & \sqrt[n]{8} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 1 & & & & 1 \end{array}$$

A rendőrelv alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7+\frac{1}{n+2}} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n+5}\right)^{n-2} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+5-8}{n+5}\right)^{n-2} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-8}{n+5}\right)^{n-2} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n+5}{-8}}\right)^{n-2} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n+5}{-8}}\right)^{\frac{n+5}{-8}\cdot\frac{-8}{n+5}\cdot(n-2)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+5}{-8}}\right)^{\frac{n+5}{-8}}\right]^{\frac{-8n+16}{n+5}} \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg külön a kitevő határértékét:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-8n+16}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{-8+\frac{16}{n}}{1+\frac{5}{n}} = -8$$

Így $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n+5}\right)^{n-2} = e^{-8}$ és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7+\frac{1}{n+2}} \cdot \left(\frac{n-3}{n+5}\right)^{n-2} = 1 \cdot e^{-8} = \frac{1}{e^8}.$$

♢

vissza a feladathoz

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3n^2+5n-1}{n^3-7}}$

Megoldás.

$$\begin{array}{ccccc} \frac{3n^2-n^2}{n^3} & \overset{*}{\leq} & \frac{3n^2+5n-1}{n^3-7} & \overset{**}{\leq} & \frac{8n^2}{n^3-\frac{1}{2}n^3} \\ \sqrt[n]{2n^{-1}} & \leq & \sqrt[n]{\frac{3n^2+5n-1}{n^3-7}} & \leq & \sqrt[n]{16n^{-1}} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 1 & & & & 1 \end{array}$$

A rendőrelv alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3n^2+5n-1}{n^3-7}} = 1$$

$*$ ha

$$\begin{aligned} n^2 &\geq 1 \\ n &\geq 1 \end{aligned}$$

$**$ ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n^3 &\geq 7 \\ n^3 &\geq 14 \\ n &> 2 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

5.2. Házi Feladat. *Határozzuk meg az alábbi sorozatok alsó és felső határértékét!*

a) $a = \left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right)$

Megoldás.
A sorozatot már vizsgáltuk az 1.b) házi feladatban és azt találtuk, hogy konvergens és $\lim a = 1$, ezért

$$\liminf a = \limsup a = 1.$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

b) $a = \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{2},\ n \in \mathbb{N}\right)$

Megoldás.
Írjuk fel a sorozat néhány elemét:

$$a_0 = \frac{3}{2},\ a_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1,\ a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2,\ a_4 = a_0\frac{3}{2}, \ldots$$

Megállapítható, hogy az a sorozat az alábbi index-sorozatokhoz tartozó diszjunkt részsorozatok fésűs egyesítése:

$$\begin{array}{lll} \alpha = (4n,\ n \in \mathbb{N}) & & \beta = (4n+1,\ n \in \mathbb{N}) \\ \gamma = (4n+2,\ n \in \mathbb{N}) & & \delta = (4n+3,\ n \in \mathbb{N}) \end{array}$$

Könnyen látható, így a torlódási pontok halmaza: $T = \left\{\dfrac{3}{2},\ 1,\ 2\right\}$, és
$\liminf a = 1$, $\limsup a = 2$.

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

c) $a = \left((-1)^n \cdot \cos(n \cdot \dfrac{\pi}{2}),\ n \in \mathbb{N}\right)$

Megoldás.
Írjuk fel a sorozat néhány elemét:

$$a_0{=}1{\cdot}\cos 0{=}1,\ a_1{=}{-}1{\cdot}\cos\frac{\pi}{2}{=}0,\ a_2{=}1{\cdot}\cos\pi{=}{-}1,\ a_3{=}{-}1{\cdot}\cos\frac{3\pi}{2}{=}0,\ a_4{=}a_0{=}1{\cdot\cdot}\cos 2\pi{=}1,\ldots$$

Megállapítható, hogy az a sorozat az alábbi index-sorozatokhoz tartozó diszjunkt részsorozatok fésűs egyesítése:

$$\begin{aligned}
\alpha &= (4n,\ n \in \mathbb{N})\\
\beta &= (4n+1,\ n \in \mathbb{N})\\
\gamma &= (4n+2,\ n \in \mathbb{N})\\
\delta &= (4n+3,\ n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

Könnyen látható, így a torlódási pontok halmaza:

$$T = \{1,\ 0,\ -1\}\,,$$

és $\liminf a = -1$, $\limsup a = 1$. $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

6. fejezet

Végtelen sorok összege

6.1. Gyakorlat

6.1. Definíció. *Legyen $x : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ valós számsorozat. Ekkor az*

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

*formális összeget **végtelen sor**nak nevezzük.*

6.2. Definíció. *A fenti végtelen sor n-**edik részletösszegé**nek nevezzük az*

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$$

véges összeget.

6.3. Definíció. *Akkor mondjuk, hogy a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ sor **konvergens**, ha a részletösszegek $S = (S_n,\ n \in \in \mathbb{N})$ sorozata konvergens és a $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ értéket a **végtelen sor összegé**nek nevezzük.*

6.1. Feladat. *Határozzuk meg a következő végtelen sorok összegét!*

Teleszkópikus összegre vezető feladatok

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Megoldás.
Bontsuk az általános tagban szereplő törtet elemi törtek összegére!

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n+A}{n(n+1)}.$$

A megfelelő együtthatók egyeztetéséből:

$$\left.\begin{array}{rcl} A & = & 1 \\ A+B & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B = -1.$$

Így tehát $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Ezt felhasználva az n-edik részletösszeg az alábbi alakban írható:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ekkor a sor összege:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

◊

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$

Megoldás.
Most is kezdjük az általános tag felbontásával!

$$\frac{1}{n^2+3n} = \frac{1}{n(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3} = \frac{A(n+3)+Bn}{n(n+3)} = \frac{(A+B)n+3A}{n(n+3)}$$

A megfelelő együtthatók egyeztetéséből:

$$\left.\begin{aligned} 3A &= 1 \\ A+B &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{3}.$$

◊

Így tehát $\frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right)$. Ezt felhasználva az n-edik részletösszeg az alábbi alakban írható:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{4}} \right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{5}} \right) + \left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{6}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{7}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{8}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{6}} - \cancel{\frac{1}{9}} \right) + \right. \\ &\left. + \left(\cancel{\frac{1}{7}} - \cancel{\frac{1}{10}} \right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n-2}} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+3} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right]. \end{aligned}$$

Ekkor a végtelen sor összege:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} &= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right] = \frac{11}{18}. \end{aligned}$$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$

Megoldás.
Írjuk fel az n-edik részletösszeget és alkalmazzuk a logaritmus azonosságait:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=2}^{n} \log \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{n} \log(k-1) - \log k - \log(k+1) + \log(k+2) = \\
&= (\log 1 - \cancel{\log 2} - \log 3 + \cancel{\log 4}) + (\cancel{\log 2} - \cancel{\log 3} - \cancel{\log 4} + \cancel{\log 5}) + \\
&\quad + (\cancel{\log 3} - \log 4 - \cancel{\log 5} + \log 6) + \cdots + (\cancel{\log}(n-1) - \log n - \cancel{\log}(n+1) + \log(n+2)) = \\
&= \log 1 - \log 3 - \log n + \log(n+2) = -\log 3 + \log \frac{n+2}{n}.
\end{aligned}$$

Így a végtelen sor összege:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(-\log 3 + \log \frac{n+2}{n}\right) = \\
&= -\log 3 + \lim_{n\to\infty} \log \frac{n+2}{n} = -\log 3 + \log \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = \\
&= -\log 3 + \log \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1} = -\log 3 + \log 1 = -\log 3.
\end{aligned}$$

6.4. Megjegyzés.

1) *A feladatban szereplő* log *jelöléssel arra szerettük volna felhívni a figyelmet, hogy a megoldás lépései során nincs jelentősége annak, hogy milyen alapú logaritmusról van szó.*
2) *A végtelen sor összegének számolásakor felcseréltük a logaritmus és a határértékképzés sorrendjét. A lépés azért végezhető el, mert a logaritmus függvény a teljes értelmezési tartományán folytonos. Ezt a tulajdonságot majd az Analízis 2. című tárgy keretein belül igazoljuk, addig fogadjuk el, hogy a lépés helyes!*

Mértani sorra vezető feladatok

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Megoldás.
A mértani sor összegképletét fogjuk alkalmazni:

$$a_1 \sum_{n=0}^{\infty} q^n = a_1 \frac{1}{1-q}. \qquad (6.1)$$

$\diamondsuit$

Ehhez index-transzformációval elérjük, hogy az összegzés $n=0$-tól induljon és a hatványozás azonosságait alkalmazva fogjuk kialakítani a $a_1 \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ alakot:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

e) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{5^{n+1}}{3^{n-1} \cdot 2^{n+3}}$

Megoldás.
A mértani sorra vezető feladatok során mindig választhatunk az alábbi két megoldási mód közül:

1) Az előző feladathoz hasonlóan indextranszformáció és a hatványozás azonosságainak segítségével $a_1 \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ alakra hozzuk a kifejezést, majd a (6.1) összefüggést alkalmazzuk:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{3^{n-1} \cdot 2^{n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+4}}{3^{n+2} \cdot 2^{n+6}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n \cdot 5^4}{3^n \cdot 3^2 \cdot 2^n \cdot 2^6} = \frac{5^4}{3^2 \cdot 2^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^n \cdot 2^n} = \frac{5^4}{3^2 \cdot 2^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{6^n} =$$
$$= \frac{5^4}{3^2 \cdot 2^6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{5^4}{3^2 \cdot 2^6} \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = \frac{5^4}{3^2 \cdot 2^6} 6 = \frac{5^4}{3 \cdot 2^5} = \frac{625}{3 \cdot 32} = \frac{625}{96}$$

2) Belátjuk, hogy mértani sorral van dolgunk, melynek leolvassuk a hányadosát (q) és a kezdő elemét (a_1):

$$\sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{\frac{5^{n+1}}{3^{n-1} \cdot 2^{n+3}}}_{a_n} = \frac{5^4}{3^2 \cdot 2^5} + \frac{5^5}{3^3 \cdot 2^6} + \frac{5^6}{3^4 \cdot 2^7} + \cdots$$

$\sum\limits_{n=3}^{\infty} a_n$ egy mértani sor, melyre $a_1 = \frac{5^4}{3^2 \cdot 2^5}$ és

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+2}}{3^n \cdot 2^{n+4}} \cdot \frac{3^{n-1} \cdot 2^{n+3}}{5^{n+1}} = \frac{5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}.$$

Tehát

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{3^{n-1} \cdot 2^{n+3}} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{5^4}{3^2 \cdot 2^5} \cdot 6 = \frac{625}{96}.$$

$\diamondsuit$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergenciája

A fenti sor vizsgálatához fel fogjuk használni a Cauchy-féle kondenzációs elvet:

6.5. Tétel. (Cauchy-féle kondenzációs elv) *A* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *sor ekvikonvergens a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ *sorral ha* $0 \le a_n$, $(n \in \mathbb{N})$ *és a monoton fogyó sorozat, azaz a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *sor pontosan akkor konvergens, ha a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ *sor konvergens.*

6.6. Tétel. *A* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *végtelen sor pontosan akkor konvergens, ha* $\alpha > 1$.

Bizonyítás. Legyen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}_+$ rögzített.

A Cauchy-féle kondenzációs elv értelmében a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor ekvikonvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{\alpha-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n} = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n & \text{ha } \alpha > 1, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n & \text{ha } 0 < \alpha < 1, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 & \text{ha } \alpha = 1, \end{cases}$$

Az $\alpha > 1$ esetben egy 1-nél kisebb alapú mértani sort kaptunk, amelynek a konvergenciája ismert. Ha $\alpha < 1$, akkor is mértani sorhoz jutunk, de az alap ilyenkor 1-nél nagyobb, így az általános tag nem tart 0-hoz. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ sor ismert divergens sor. $\square$

6.2. Feladat. *Vizsgáljuk meg a következő sorok konvergenciáját! (Az összegükre nem vagyunk kiváncsiak, csak arra, konvergensek-e.)*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{3n+1}{2n-7}}_{a_n}$

Megoldás.
Mivel

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{2-\frac{7}{n}} = \frac{3}{2} \neq 0,$$

így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor nem teljesíti a konvergencia szükséges feltételét, vagyis a sor divergens. $\diamondsuit$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{3n-2}{3+n^3}}_{a_n}$

Megoldás.
Ha $n \gg 1$, akkor

$$a_n \sim \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha > 1.$$

Sejtés: A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens. A majoráns kritériumot alkalmazzuk.

$$0 \leq a_n = \frac{3n-2}{3+n^3} \leq \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2} =: b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, mert $\alpha = 2 > 1$ (hiperharmonikus sor).

Mivel $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, ezért $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, ezért a majoráns kritérium értelmében $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens. $\diamondsuit$

c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^3-2n^2+1}}}_{a_n}$

Megoldás.
Ha $n \gg 1$, akkor

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n^\alpha} \quad \alpha > 1.$$

Sejtés: A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens. A majoráns kritériumot alkalmazzuk.

$$0 \le a_n = \frac{1}{\sqrt{n^3-2n^2+1}} \overset{*}{\le} \frac{1}{\sqrt{n^3-\frac{1}{2}n^3}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}n^3}} = \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}} =: b_n$$

A $*$ egyenlőtlenség teljesül, ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n^3 &\ge 2n^2 \\ n &\ge 4. \end{aligned}$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sqrt{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ sor konvergens, mert $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.
Ekkor mivel

$$0 \le a_n \le b_n \quad \forall n > 4 \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{3} a_n + \sum_{n=4}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{3} a_n + \sum_{n=4}^{\infty} b_n < \infty,$$

ezért a majoráns kritérium értelmében a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens. ♢

d) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-7n+5}}}_{a_n}$

Megoldás.
Ha $n \gg 1$, akkor

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{n^\alpha} \quad \alpha < 1.$$

Sejtés: A $\sum\limits_{n=3}^{\infty} a_n$ sor divergens. A minoráns kritériumot alkalmazzuk.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-7n+5}} \overset{*}{\ge} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-0+5n^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{6n^2}} =: b_n$$

A $*$ egyenlőtlenség teljesül, ha

$$\begin{aligned} 5n^2 &\ge 5 \\ n^2 &\ge 1 \\ n &\ge 1 \quad (\text{vagy } n \le -1, \text{ ami nem lehet.}) \end{aligned}$$

A $\sum\limits_{n=3}^{\infty} b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{6}} \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ sor divergens, mert $\alpha = \frac{2}{3} < 1$.

Így a minoráns kritérium értelmében a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is divergens. $\diamondsuit$

e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{4n+8}{(2n+3)(2n+5)}}_{a_n}$

Megoldás.
Mivel $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ és $(a_n,\ n \in \mathbb{N})$ sorozat szigorúan monoton csökken, hiszen

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{4(n+1)+8}{(2(n+1)+3)(2(n+1)+5)} - \frac{4n+8}{(2n+3)(2n+5)} = \frac{4n+12}{(2n+5)(2n+7)} - \\ &\quad - \frac{4n+8}{(2n+3)(2n+5)} = \frac{(4n+12)(2n+3)-(4n+8)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} = \\ &= \frac{8n^2+36n+36-(8n^2+44n+56)}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} = \frac{-8n-20}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Tehát a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ sor egy Leibniz-típusú sor.

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+8}{(2n+3)(2n+5)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n}+\frac{8}{n^2}}{(2+\frac{3}{n})(2+\frac{5}{n})} = 0,$$

a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ sor a Leibniz-kritérium értelmében konvergens. A minoráns kritériummal belátható, hogy a sor nem abszolút konvergens (feltételesen konvergens). $\diamondsuit$

6.7. Megjegyzés. *Leibniz-típusú sor esetén a konvergencia-sebességre a következő egyszerű becslés adódik:*

$$\left| S_n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \right| \le a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a Leibniz-típusú sor S összege bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén S_n és S_{n-1} közé esik, azaz

$$S_{n-1} \le S \le S_n \quad \text{vagy} \quad S_n \le S \le S_{n-1}.$$

Ekkor az $|S_n - S|$ eltérés felülről becsülhető az $|S_n - S_{n-1}|$ eltéréssel.

$$|S_n - S| \le |S_n - S_{n-1}| = a_n. \qquad \square$$

6.3. Feladat. *Az előző feladatban vizsgált sor hányadik részletösszege közelíti a sor összegét legfeljebb $\frac{1}{10}$ hibával?*

Megoldás.
A fenti becslést alkalmazva a megfelelő index leolvasható.

$$\begin{aligned}
|S_n - S| \leq a_n &< \frac{1}{10} \\
\frac{4n+8}{(2n+3)(2n+5)} &< \frac{1}{10} \\
40n+80 &< (2n+3)(2n+5) \\
0 &< 4n^2+16n+15-40n-80 \\
0 &< 4n^2-24n-65 \\
0 &< 4(n^2-6n)-65 \\
0 &< 4(n^2-6n+9-9)-65 \\
0 &< 4(n-3)^2-36-65 \\
101 &< 4(n-3)^2 \\
\frac{101}{4} &< (n-3)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\sqrt{101}}{2} & < & n-3 \\
5{,}02 & < & n-3 \\
8{,}02 & < & n \\
9 & \leq & n \\
\text{Az} & S_9 & \text{már jó.}
\end{array}
\quad \text{vagy} \quad
\begin{array}{rcl}
-\frac{\sqrt{101}}{2} & > & n-3 \\
-5{,}02 & > & n-3 \\
-2{,}02 & > & n \\
 & \text{ami nem lehet.} &
\end{array}$$

Azaz $|S - S_9| < \frac{1}{10}$. ◊

6.2. Házi Feladatok

6.1. Házi Feladat. *Határozzuk meg a következő végtelen sorok összegét!*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ megoldás

b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$ megoldás

c) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-5n+6}$ megoldás

d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|\log(1-\frac{1}{n^2})\right|$ megoldás

6.2. Házi Feladat. *Vizsgáljuk meg a következő sorok konvergenciáját! (Az összegükre nem vagyunk kiváncsiak, csak arra, konvergensek-e.)*

a) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n\sqrt{n^2-2n+10}}}_{a_n}$ megoldás

b) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^7-2n^3+n^2+1}}_{a_n}$ megoldás

c) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2n+11}}_{a_n}$ megoldás

d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2-3n+8}}}_{a_n}$ megoldás

e) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{a_n}$ megoldás

f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{n-3}{n+5}}_{a_n}$ megoldás

6.3. Házi Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi sorok konvergenciáját a Cauchy-féle kondenzációs elvvel!*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ megoldás

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ megoldás

6.3. Megoldások

6.1. Házi Feladat. *Határozzuk meg a következő végtelen sorok összegét!*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

Megoldás.
Bontsuk fel az általános tagot:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \frac{An+2A+Bn}{n(n+2)}.$$

Az együtthatók egyeztetéséből:

$$\left.\begin{array}{rcl} A+B & = & 0 \\ 2A & = & 1 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \ B = -\frac{1}{2}.$$

Így

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Ezt felhasználva az n-edik részletösszeg az alábbi alakban írható:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right). \end{aligned}$$

A végtelen sor összege definíció alapján kapható:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}.$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} + \frac{1}{n-2} = \frac{A(n^2-3n+2)+B(n^2-2n)+C(n^2-n)}{n(n-1)(n-2)} = \\ &= \frac{(A+B+C)n^2+(-3A-2B-C)n+2A}{n(n-1)(n-2)}. \end{aligned}$$

Az együtthatók egyeztetéséből:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{rcl} A+B+C & = & 0 \\ 3A+2B+C & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ 2A+B=0 \\ 2A=1 \ \Rightarrow \ A=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \ B=-1 \ \Rightarrow \ C=\frac{1}{2}.$$

Így

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(n-1)(n-2)} &= \frac{\frac{1}{2}}{n-2}-\frac{1}{n-1}+\frac{\frac{1}{2}}{n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{2}{n-1}+\frac{1}{n}\right)= \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Ezt felhasználva az n-edik részletösszeg az alábbi alakban írható:

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(k-1)(k-2)}=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}\right)\right]= \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\dots\right. \\ &\left.\dots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Így a végtelen sor összege:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)(n-2)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4}.$$

♢

vissza a feladathoz

c) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2-5n+6}=\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n-2)(n-3)}$

Megoldás.

$$\frac{1}{(n-2)(n-3)}=\frac{A}{n-2}+\frac{B}{n-3}=\frac{(A+B)n+(-2B-3A)}{(n-2)(n-3)}$$

Ahonnan

$$\left.\begin{aligned}A+B &= 0 \Rightarrow B=-A \\ -2B-3A &= 1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}2A-3A &= 1. \\ A &= -1, \\ B &= 1.\end{aligned}$$

És így

$$\frac{1}{(n-2)(n-3)}=\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-2}.$$

A kapott összefüggést visszaírva az n-edik részletösszeg képletébe adódik, hogy

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=4}^{n}\frac{1}{(k-2)(k-3)}=\sum_{k=4}^{n}\left(\frac{1}{k-3}-\frac{1}{k-2}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+ \\ &+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-2}\right)=1-\frac{1}{n-2}.\end{aligned}$$

Így a végtelen sor összege:

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2-5n+6}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n-2}=1.$$

♢

vissza a feladathoz

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left|\log(1-\frac{1}{n^2})\right|$

Megoldás.
Mivel $1-\frac{1}{n^2}<1$ minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén, ezért $\log(1-\frac{1}{n^2})<0$ minden szóbajöhető n-re, így

$$\begin{aligned}\left|\log(1-\frac{1}{n^2})\right| &= -\log(1-\frac{1}{n^2})=\log\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{-1}=\log\frac{n^2}{n^2-1}=\\ &= \log n^2-\log(n^2-1)=2\log n-\log(n+1)-\log(n-1)\end{aligned}$$

A kapott összefüggést visszaírjuk az n-edik részletösszeg képletébe:

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=2}^{n}\left|\log(1-\frac{1}{k^2})\right|=(-\log 1+\log 2+\log 2-\log 3)+(-\log 2+\log 3+\log 3-\log 4)+\\ &\quad +(-\log 3+\log 4+\log 4-\log 5)+\cdots+(-\log(n-1)+\log n+\log n-\log(n+1))=\\ &= -\log 1+\log 2+\log n-\log(n+1)=\log 2+\log\frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

Ahonnan a végtelen sor összegére:

$$\sum_{n=2}^{\infty}|\log(1-\frac{1}{n^2})|=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log 2+\log\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\log 2+\log\frac{n}{n+1}=\log 2.$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

6.2. Házi Feladat. *Vizsgáljuk meg a következő sorok konvergenciáját! (Az összegükre nem vagyunk kiváncsiak, csak arra, konvergensek-e.)*

a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{n\sqrt{n^2-2n+10}}}_{a_n}$. Ha $n\gg 1$, akkor $a_n\sim\frac{1}{n^2}$.

Megoldás.
Sejtés: A $\sum\limits_{n=3}^{\infty}a_n$ sor konvergens, így a majoráns kritériumot használjuk:

$$0<a_n=\frac{1}{n\sqrt{n^2-2n+10}}\le\frac{1}{n\sqrt{n^2-2n}}\overset{*}{\le}\frac{1}{n\sqrt{n^2-\frac{1}{2}n^2}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}n^2}=\frac{\sqrt{2}}{n^2}=:b_n.$$

A * egyenlőtlenség akkor teljesül, ha

$$\frac{1}{2}n^2\ge 2n\ \Leftrightarrow\ n\ge 4\quad\text{vagy}\quad n\le 0\ \text{(ami nem lehet)}.$$

Így

$$\sum_{n=3}^{\infty}a_n=a_3+\sum_{n=4}^{\infty}a_n\le a_3+\sum_{n=4}^{\infty}b_n=a_3+\sqrt{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

A $\sum\limits_{n=3}^{\infty}b_n$ hiperharmonikus sor konvergens, így a majoráns kritérium alapján $\sum\limits_{n=3}^{\infty}a_n$ is konvergens.

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

b) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^7-2n^3+n^2+1}}_{a_n}$. Ha $n \gg 1$, akkor $a_n \sim \frac{1}{n^2}$.

Megoldás.
Sejtés: A $\sum\limits_{n=4}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens, így a majoráns kritériumot használjuk:

$$0 < a_n = \frac{1}{n^7-2n^3+n^2+1} \le \frac{1}{n^7-2n^3} \overset{**}{\le} \frac{1}{n^7-\frac{n^7}{2}} = \frac{2}{n^7} =: b_n.$$

A * egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $\frac{n^7}{2} \ge 2n^3$. Kihasználva, hogy $n>0$, a kapott feltétellel ekvivalens a $n^4 \ge 4$ összefüggés. Amelyből $n \ge \sqrt{2}$ vagy $n \le -\sqrt{2}$. Az utóbbi eset nyilvánvalóan számunkra érdektelen. Látható viszont, hogy a becslés igaz minden szóbajöhető ($n \ge 4$) indexre. Így

$$\sum_{n=4}^{\infty} a_n \le \sum_{n=4}^{\infty} b_n = 2\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^7} = 2\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Mivel $\alpha > 1$ a $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ hiperharmonikus sor konvergens, így a majoráns kritérium alapján a $\sum\limits_{n=4}^{\infty} a_n$ sor is konvergens. ♢

vissza a feladathoz

c) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2n+11}}_{a_n}$. Ha $n \gg 1$, akkor $a_n \sim \frac{1}{n}$.

Megoldás.
Sejtés: A $\sum\limits_{n=3}^{\infty} a_n$ sor divergens, így a minoráns kritériumot használjuk:

$$0 < a_n = \frac{1}{2n+11} \ge \frac{1}{2n+11n} = \frac{1}{13n} =: b_n.$$

Így

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n \ge \sum_{n=3}^{\infty} b_n = \frac{1}{13}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Mivel a $\sum\limits_{n=3}^{\infty} b_n$ sor divergens (harmonikus sor), a minoráns kritérium miatt a $\sum\limits_{n=3}^{\infty} a_n$ sor is divergens. ♢

vissza a feladathoz

d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2-3n+8}}}_{a_n}$. Ha $n \gg 1$, akkor $a_n \sim \frac{1}{n}$.

Megoldás.
Sejtés: A $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ sor divergens, így a minoráns kritériumot használjuk:

$$0 < a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+8}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+8n^2}} = \frac{1}{\sqrt{9n^2}} = \frac{1}{3n} =: b_n. \quad \forall n \geq 2.$$

Így igaz az alábbi reláció:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=2}^{\infty} b_n = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Mivel a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ sor divergens (harmonikus sor), a minoráns kritérium miatt a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ sor is divergens. ♢

vissza a feladathoz

e) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{a_n}$

Megoldás.
Mivel $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ és az $(a_n,\ n \in \mathbb{N})$ sorozat szigorúan monoton csökkenő, hiszen:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-(n+2)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{-2}{n(n+1)(n+2)} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Így a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$ sor Leibniz-típusú sor.

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$, a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$ sor, a Leibniz kritérium értelmében konvergens. ♢

vissza a feladathoz

f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{n-3}{n+5}}_{a_n}$

Megoldás.
Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-3}{n+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{3}{n}}{1+\frac{5}{n}} = 1 \neq 0$, a sor nem teljesíti a konvergencia szükséges feltételét. ♢

vissza a feladathoz

6.3. Házi Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi sorok konvergenciáját a Cauchy-féle kondenzációs elvvel!*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}$

Megoldás.
A feladat megoldása során a 6.6 tétel bizonyítását ismételjük meg a konkrét sorra.

A Cauchy-féle kondenzációs elv alapján a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor ekvikonvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n := \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

sorral, amelyről előadáson beláttuk, hogy divergens. $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{a_n}$

Megoldás.
A Cauchy-féle kondenzációs elv alapján a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor ekvikonvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n := \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

mértani sorral, amelyről előadáson beláttuk, hogy konvergens (hiszen kvóciense egynél kisebb). $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

7. fejezet

Konvergencia kritériumok, hatványsorok

7.1. Gyakorlat

A következő néhány feladat megoldásához az alábbi, előadáson bizonyított tételek felhasználására lesz szükség:

7.1. Tétel. (Cauchy-féle gyökkritérium) *Vizsgáljuk a* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *végtelen sort. Legyen*

$$\ell := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Ha $\ell < 1$, *akkor* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *végtelen sor abszolútkonvergens,* $\ell > 1$ *esetén a szóban forgó végtelensor divergens. Ha* $\ell = 1$, *akkor a gyökkritérium nem alkalmas a konvergencia vizsgálatára.*

7.2. Megjegyzés. *Az esetek nagy részében elegendő a fenti tételnél könnyebben vizsgálható, de gyengébb állítás használata.*
Vizsgáljuk a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *végtelen sort. Legyen*

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Ha $\alpha < 1$, *akkor* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *végtelen sor abszolútkonvergens,* $\alpha > 1$ *esetén a szóban forgó végtelensor divergens. Ha* $\alpha = 1$, *akkor így nem tudjuk eldönteni, hogy a sor konvergens-e.*

7.3. Tétel. (D'Alambert-féle hányadoskritérium) *Vizsgáljuk a* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *végtelen sort. Legyen*

$$\mathcal{L} := \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

és legyen

$$\ell := \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Ha $\mathcal{L} < 1$, *akkor* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *végtelen sor abszolútkonvergens,* $\ell > 1$ *esetén a szóban forgó végtelen sor divergens. Ha* $\ell \le 1 \le \mathcal{L}$, *akkor a hányadoskritérium nem alkalmas a konvergencia vizsgálatára.*

7.4. Megjegyzés. *Könnyen látható, hogy, ha létezik* $\alpha := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *határérték, akkor a fenti tétellel ekvivalens a következő állítás:*
Ha $\alpha < 1$*, akkor* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *végtelen sor abszolútkonvergens,* $\alpha > 1$ *esetén a szóban forgó végtelen sor divergens. Ha* $\alpha = 1$*, akkor a hányadoskritérium nem alkalmas a konvergencia vizsgálatára.*

7.1. Feladat. *Vizsgáljuk meg a következő sorok konvergenciáját! (Az összegükre nem vagyunk kiváncsiak, csak arra, konvergensek-e.)*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

Megoldás.
A Cauchy-féle gyökkritériumot használjuk:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2+1}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens. ♢

7.5. Megjegyzés. *A sorok vizsgálatánál már nem kell bizonyítani az* $\sqrt[n]{P(n)} \to 1$ $(n \to \infty)$ *határértéket. (Mint itt a számláló esetében.)*

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)3^n}$

Megoldás.
A Cauchy-féle gyökkritériumot használjuk:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{(2n+1)3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n+1}}{3\sqrt[n]{2n+1}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens. ♢

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Megoldás.
A D'Alambert-féle hányados-kritériumot használjuk:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)\cdot n!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2\cdot(n!)^2}{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)\cdot(2n+1)} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{(2+\frac{2}{n})\cdot(2+\frac{1}{n})} = \frac{1}{4} < 1.
\end{aligned}$$

Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens. ♢

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Megoldás.
A D'Alambert-féle hányados-kritériumot használjuk:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1.\end{aligned}$$

Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens. ♢

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}\log n}}_{a_n}$

Megoldás.
A Cauchy-féle kondenzációs elv alapján a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ sor ekvikonvergens a

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2^n}\log 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n \log 2}$$

sorral, melynek konvergenciáját a Cauchy-féle gyökkritériummal vizsgáljuk:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^{\frac{n}{2}}}}{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{\log 2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{\log 2}} = \sqrt{2} > 1.$$

Tehát a Cauchy-féle gyökkritérium alapján $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ sor divergens. Így a Cauchy-féle kondenzációs elv alapján a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ sor is divergens. ♢

7.6. Megjegyzés. *Látható, hogy a feladat megoldás szempontjánól érdektelen a logaritmus alapszáma. (Ezért is használtuk az alapszám nélküli jelölést.)*

f) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(\log_2 n)^{\log_2 n}}}_{a_n}$

Megoldás.
A Cauchy-féle kondenzációs elv alapján a $\sum\limits_{n=3}^{\infty} a_n$ sor ekvikonvergens a

$$\sum_{n=3}^{\infty} b_n = \sum_{n=3}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(\log_2 2^n)^{\log_2 2^n}} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$$

sorral, melynek konvergenciáját a Cauchy-féle gyökkritériummal vizsgáljuk:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1.$$

Tehát a Cauchy-féle gyökkritérium alapján $\sum\limits_{n=3}^{\infty} b_n$ sor abszolút konvergens. Így a Cauchy-féle kondenzációs elv alapján a $\sum\limits_{n=3}^{\infty} a_n$ sor is abszolút konvergens. ♢

7.1.1. Hatványsorok

A következő feladatok megoldása során leggyakrabban a Cauchy-Hadamard tételt fogjuk használni:

7.7. Tétel. (Cauchy-Hadamard tétel) *Vizsgáljuk a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$ *hatványsort. Legyen*

$$\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Ekkor az

$$R := \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{ha } 0 < \alpha < \infty, \\ \infty & \text{ha } 0 = \alpha, \\ 0 & \text{ha } \alpha = \infty, \end{cases}$$

$\overline{\mathbb{R}}$*-beli elemet a hatványsor konvergencia-sugarának nevezzük és a hatványsor* $K_R(x_0)$ *tartományon (*$x \in \mathbb{R}$ *esetben az* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *intervallum belső pontjaiban) abszolútkonvergens, a* $\overline{K_R(x_0)}$ *tartományon (valós esetben a zártintervallumon) kívül pedig divergens. A tartomány határpontjaiban, (valós esetben az intervallum végpontjaiban) további vizsgálatra van szükség.*

7.2. Feladat. *Határozzuk meg a következő hatványsorok konvergencia intervallumát!*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n x^n}{5^n n}$

Megoldás.

1) Cauchy-Hadamard tétel alapján

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{5^n \cdot n}}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{3}{5} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{5}{3}$$

2) A konvergencia intervallum középpontja $x_0 = 0$. Tehát a hatványsor a $(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ intervallum pontjaiban abszolút konvergens.

3) Vizsgáljuk meg, hogyan viselkedik a hatványsor az intervallum végpontjaiban!

Ha $x = -\frac{5}{3}$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sort kell vizsgálni, ami divergens.

Ha $x = \frac{5}{3}$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ Leibniz-típusú sort kell vizsgálni, ami konvergens, mert az általános tag tart nullába ($n \to \infty$). (de nem abszolút konvergens.)

Összefoglalva tehát a konvergencia intervallum: $\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right]$. ♢

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n n^2}$

Megoldás.
1) Cauchy-Hadamard tétel alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{3^n \cdot n^2} \\ \sqrt[n]{|c_n|} &= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[n]{n^2}} \\ \alpha &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{3 \cdot \sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{3} \\ R &= \frac{1}{\alpha} = 3. \end{aligned}$$

2) A konvergencia intervallum középpontja $x_0 = 1$. Tehát a hatványsor a $(-2,\ 4)$ intervallum pontjaiban abszolút konvergens.

3) Vizsgáljuk meg, hogyan viselkedik a hatványsor az intervallum végpontjaiban!
Ha $x = -2$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n \cdot n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$ Leibniz-típusú sort kell vizsgálni, ami konvergens, mert $\frac{1}{n^2} \to 0$ $(n \to \infty)$.
Ha $x = 4$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n \cdot n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hiperharmonikus sort kell vizsgálni, ami konvergens.

Összefoglalva tehát a konvergencia intervallum: $[-2,\ 4]$. ♢

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,(x+1)^n}{5^n}$

Megoldás.
1) Cauchy-Hadamard tétel alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{n!}{5^n} \\ \sqrt[n]{|c_n|} &= \frac{\sqrt[n]{n!}}{5} \\ \alpha &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{5} = \infty \\ R &= 0. \end{aligned}$$

2) A konvergencia intervallum középpontja $x_0 = -1$.

Tehát a hatványsor ebben az egy pontban konvergens. ♢

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

Megoldás.
1) Cauchy-Hadamard tétel alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{(2n)!} \\ \sqrt[n]{|c_n|} &= \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} \\ \alpha &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} = 0 \\ R &= \infty. \end{aligned}$$

A hatványsor tehát $\forall x \in \mathbb{R}$ helyen konvergens. ♢

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6n^2+3n+1}{2^n \cdot (n+1)^3} \cdot (x-2)^n$

Megoldás.
1) Cauchy-Hadamard tétel alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{6n^2+3n+1}{2^n \cdot (n+1)^3} \\ \sqrt[n]{|c_n|} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt[n]{\frac{6n^2+3n+1}{(n+1)^3}} \\ \alpha &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \sqrt[n]{\frac{6n^2+3n+1}{(n+1)^3}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \sqrt[n]{\frac{\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{(1+\frac{1}{n})^3}} = \frac{1}{2} \\ R &= \frac{1}{\alpha} = 2. \end{aligned}$$

2) A konvergencia intervallum középpontja $x_0=2$. Tehát a hatványsor a $(0,\ 4)$ intervallum pontjaiban abszolút konvergens.

3) Vizsgáljuk meg, hogyan viselkedik a hatványsor az intervallum végpontjaiban!

Ha $x=0$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2+3n+1}{2^n(n+1)^3} \cdot (-2)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{6n^2+3n+1}{(n+1)^3}$ Leibniz-típusú sort kell vizsgálni, ami konvergens, hiszen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+3n+1}{(n+1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3(1+\frac{1}{n})^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{(1+\frac{1}{n})^3} = 0.$$

Ha $x=4$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2+3n+1}{2^n(n+1)^3} \cdot 2^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2+3n+1}{(n+1)^3}$ hiperharmonikus sort kell vizsgálni, ami divergens, hiszen $a_n \sim \frac{1}{n}$. A sejtést a minoráns kritériummal igazolhatjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2+3n+1}{(n+1)^3} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2}{(2n)^3} = \frac{6}{8} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Összefoglalva tehát a konvergencia intervallum: $[0,\ 4)$. ♢

7.2. Házi Feladatok

7.1. Házi Feladat. *Vizsgáljuk meg a következő sorok konvergenciáját! (Az összegükre nem vagyunk kiváncsiak, csak arra, konvergensek-e.)*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$

megoldás

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

megoldás

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+2)!]^3}{(2n)!\,(n-1)!}$

megoldás

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

megoldás

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$

megoldás

f) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$

megoldás

g) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$

megoldás

7.2. Házi Feladat. *Határozzuk meg a következő hatványsorok konvergencia intervallumát!*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{2^n}$

megoldás

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10x)^n}{n!}$

megoldás

További gyakorló feladatok

[10] *38.o.: 2. 4. feladatok*

7.3. Megoldások

7.1. Házi Feladat. *Vizsgáljuk meg a következő sorok konvergenciáját! (Az összegükre nem vagyunk kiváncsiak, csak arra, konvergensek-e.)*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$

Megoldás.
A Cauchy-féle gyökkritériumot használjuk:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n+1}}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$

így a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolútkonvergens. ♢

vissza a feladathoz

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Megoldás.
A Cauchy-féle gyökkritériumot használjuk:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e > 1,$$

így a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens. ♢

vissza a feladathoz

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+2)!]^3}{(2n)!\,(n-1)!}$

Megoldás.
A D'Alambert-féle hányados-kritériumot használjuk:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+3)!]^3}{(2(n+1))!\,n!} \cdot \frac{(2n)!\,(n-1)!}{[(n+2)!]^3} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^3 \cdot [(n+2)!]^3}{(2n+2)(2n+1)(2n)!\,n(n-1!)} \cdot \frac{(2n)!\,(n-1)!}{[(n+2)!]^3} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^3}{(2n+2)(2n+1)n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{3}{n})^3}{(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})\cdot 1} = \frac{1}{4} < 1,
\end{aligned}$$

így a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolútkonvergens. ♢

vissza a feladathoz

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Megoldás.
A D'Alambert-féle hányados-kritériumot használjuk:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot (n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})} = \frac{1}{4} < 1,\end{aligned}$$

így a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sor abszolútkonvergens. ♢

vissza a feladathoz

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$

Megoldás.
A D'Alambert-féle hányados-kritériumot használjuk:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2+2n+1}}{(n+1)\cdot n!} \cdot \frac{n!}{2^{n^2}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2} \cdot 2^{2n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4^n}{n+1} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2(1+(4-1))^n}{n+1} \overset{B}{\geq} \lim_{n\to\infty} \frac{2(1+n(4-1))}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(\frac{1}{n}+3)}{1+\frac{1}{n}} = 6 > 1,\end{aligned}$$

így a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sor divergens. ♢

7.8. Megjegyzés. *A fenti módszerrel nem határoztuk meg a* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}}{n+1}$ *határértéket, csak azt igazoltuk, hogy az 1-nél nagyobb. (A feladat megoldásához ez is elég volt.)*

vissza a feladathoz

f) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$

Megoldás.
A Cauchy-féle kondenzációs elv alapján ekvikonvergens a

$$\sum_{n=3}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \log 2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log 2} = \frac{1}{\log 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$$

sorral, amely divergens (harmonikus sor), így az eredeti sor is divergens. ♢

vissza a feladathoz

g) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$

Megoldás.
A Cauchy-féle kondenzációs elv alapján ekvikonvergens a

$$\sum_{n=3}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \log^2 2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log^2 2} = \frac{1}{\log^2 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sorral, amely konvergens, mert hiperharmonikus sor és $\alpha > 1$, így az eredeti sor is konvergens. $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

7.2. Házi Feladat. *Határozzuk meg a következő hatványsorok konvergencia intervallumát!*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{2^n}$

Megoldás.
1) Cauchy-Hadamard tétel alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{n}{2^n} \\ \sqrt[n]{|c_n|} &= \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \\ \alpha &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} \\ R &= 2. \end{aligned}$$

2) A konvergencia középpont $x_0 = -2$. Tehát a hatványsor a $(-4,\ 0)$ intervallum pontjaiban abszolútkonvergens.

3) Vizsgáljuk a végpontokat

Ha $x = -4$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ sort kell vizsgálni, amely nem teljesíti a konvergencia szükséges feltételét.

Ha $x = 0$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n$ sort kell vizsgálni, amely nem teljesíti a konvergencia szükséges feltételét.

Tehát a konvergencia intervallum: $(-4,\ 0)$. $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n \cdot x^n}{n!}$

Megoldás.
1) Cauchy-Hadamard tétel alkalmazzuk. Legyen $c_n = \frac{10^n}{n!}$:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|c_n|} &= \frac{10}{\sqrt[n]{n!}} \\ \alpha &= \limsup_{n\to\infty} \frac{10}{\sqrt[n]{n!}} = 0 \\ R &= \infty. \end{aligned}$$

Tehát a hatványsor $\forall x \in \mathbb{R}$ helyen konvergens. $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

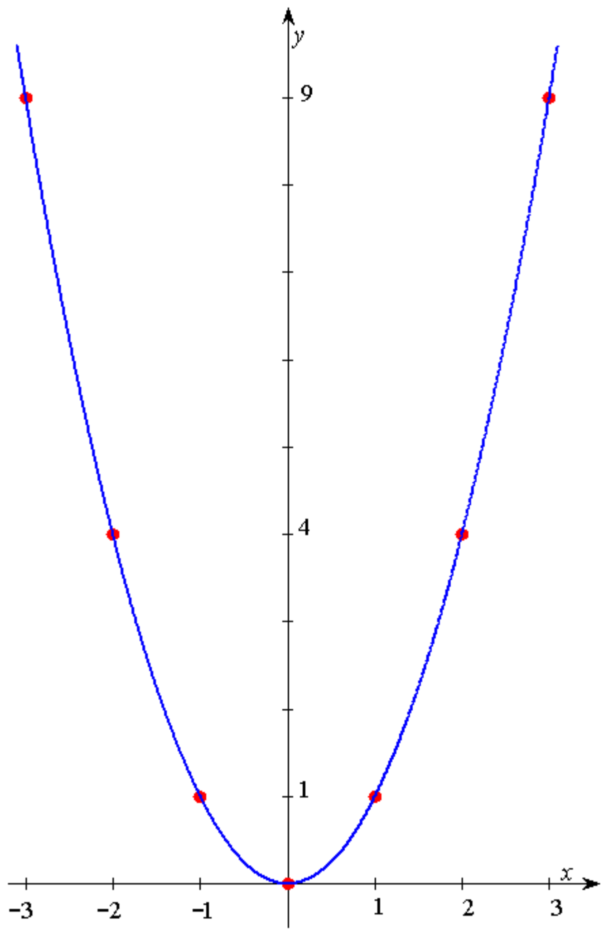
8. fejezet

Nevezetes függvények

8.1. Gyakorlat

8.1. Feladat. *Ábrázoljuk az alábbi nevezetes függvényeket, majd a grafikonjukról olvassuk le a tulajdonságaikat!*

a) $f(x) = x^2$

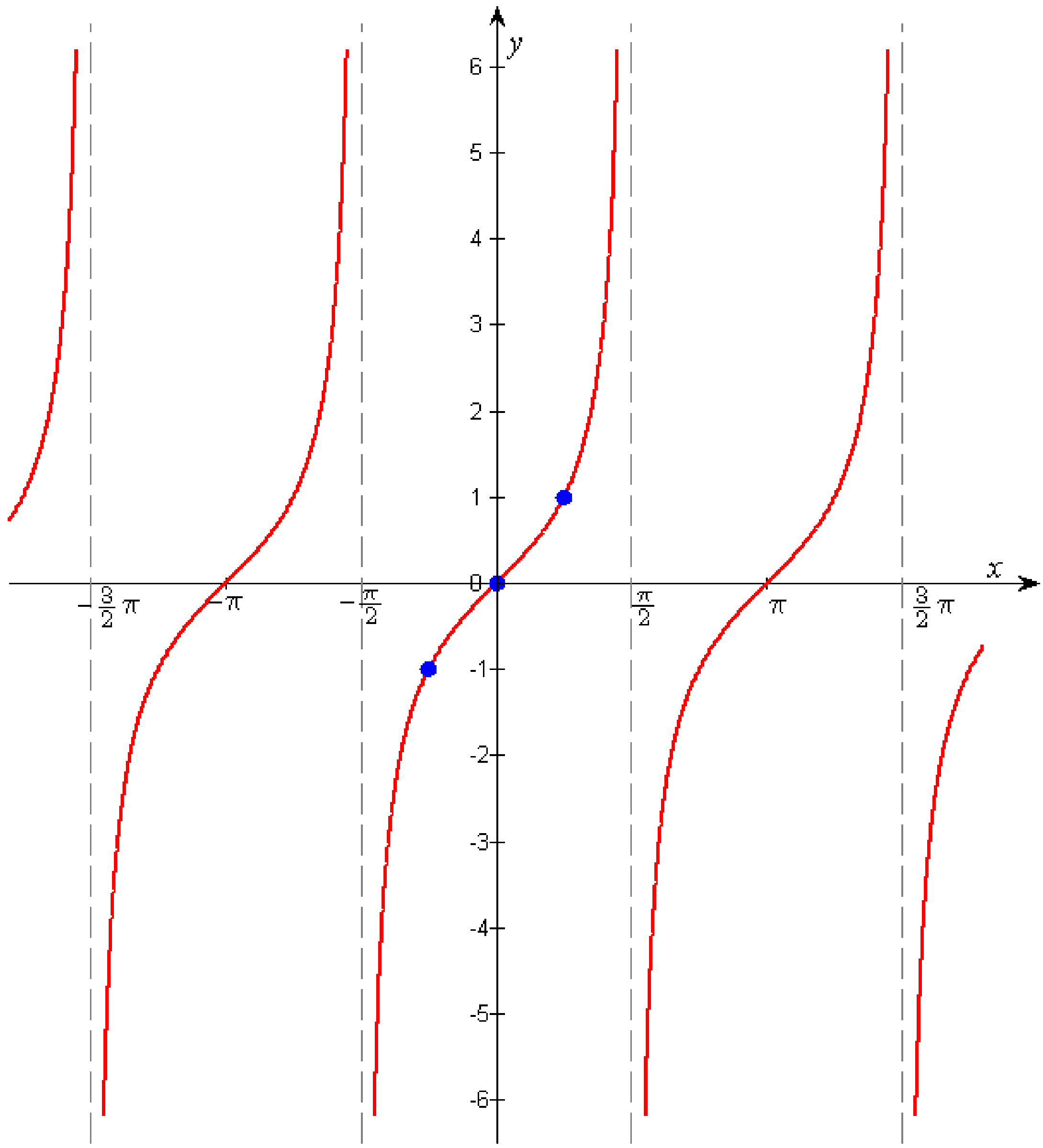


$$\begin{aligned} \mathscr{D}_f &= \mathbb{R} \\ \mathscr{R}_f &= \{y \mid y \in \mathbb{R},\ y \geq 0\} \end{aligned}$$

- páros,
- nem periodikus,
- Nem monoton, de
  $(-\infty,\ 0)$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő
  $(0,\ +\infty)$ intervallumon szigorúan monoton növő.
- A teljes értelmezési tartományán konvex $\Rightarrow$ nincs inflexiós pontja.
- minimum hely $x_0 = 0$
  minimum érték $f(x_0) = y_0 = 0$.
  maximum nincs.

♢

b) $f(x) = \text{tg}x$



$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus\left\{x|\ x\in\mathbb{R}\ x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$
$$\mathscr{R}_f = \mathbb{R}$$

- páratlan
- periodikus $(p = \pi)$
- nem monoton, de egy-egy perióduson belül szigorúan monoton növő.
- A $\left(-\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi,\ 0 + k\cdot\pi\right)$ intervallumokon konkáv $(k\in\mathbb{R})$,
  a $\left(0 + k\cdot\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi\right)$ intervallumokon konvex $(k\in\mathbb{R})$,
  így a $0 + k\cdot\pi$ pontok inflexiós-pontok.
- minimum, maximum nincs. $\diamondsuit$

8.2. Feladat. *Határozzuk meg a valós számok azon legbővebb részhalmazát, melyen a következő hozzárendelésekkel adott függvények értelmezhetők.*

a) $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2} + \sqrt[3]{x-1}$

Megoldás.
Legyen $f(x) := g(x) + h(x)$, ahol $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ és $h(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Mivel az összeggfüggvény értelmezési tartománya az egyes tagok értelmezési tartományainak metszete, $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_g \cap \mathscr{D}_h$.

A $g(x)$ függvény egy hányados függvény, amely a nevező zérushelyeit kivéve minden valós helyen értelmezett:

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &\neq 0 \\ x+3 &\neq 0 \\ x &\neq -3 \\ \mathscr{D}_g &= \mathbb{R}\setminus\{-3\} \end{aligned}$$

A $h(x)$ függvény páratlan kitevős gyökfüggvény, így minden valós helyen értelmezett.

$$\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_g \cap \mathscr{D}_h = (\mathbb{R}\setminus\{-3\}) \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}\setminus\{-3\}.$$ ♢

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$

Megoldás.
Legyen $f(x) = g(h(x))$, ahol $g(x) = \sqrt{x}$ és $h(x) = \frac{x-1}{x+3}$. Az összetett függvény értelmezési tartománya a belső függvény (h) értelmezési tartományának azon része, ahol belső függvény olyan értékeket vesz fel, melyeken a külső függvény értelmezve van.

A belső függvény egy hányados függvény, amely a nevező zérushelyeit kivéve minden valós helyen értelmezett:

$$\begin{aligned} x+3 &\neq 0 \\ x &\neq -3 \\ \mathscr{D}_h &= \mathbb{R}\setminus\{-3\} \end{aligned}$$

A külső függvény páros kitevős gyökfüggvény, így

$$\mathscr{D}_g = \{x | x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}.$$

Tehát a $\mathscr{D}_h = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$ halmaz azon x elemeit keressük, melyekre $y = \frac{x-1}{x+3} \in \mathscr{D}_g = \{x | x \in \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$.

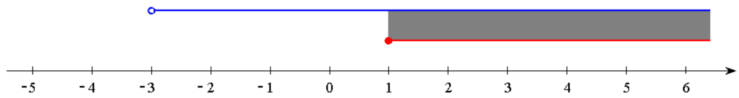
Vagyis

$$\frac{x-1}{x+3} \geq 0$$

Ez két féle esetben állhat fent

i) $x-1 \geq 0$ és $x+3 > 0$

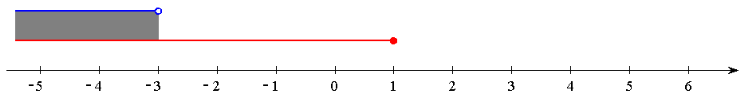
$$\begin{array}{rcrcrcr} x-1 & \geq & 0 & \text{és} & x+3 & > & 0 \\ x & \geq & 1 & \text{és} & x & > & -3 \end{array}$$



$$A = \{x | x \in \mathbb{R},\ x \geq 1\}$$

ii) $x-1 \leq 0$ és $x+3 < 0$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x-1 & \leq & 0 & \text{és} & x+3 & < & 0 \\ x & \leq & 1 & \text{és} & x & < & -3 \end{array}$$



$$B = \{x | x \in \mathbb{R},\ x < -3\}$$

Így az f függvény értelmezési tartománya

$$\mathscr{D}_f = A \cup B = \{x | x \in \mathbb{R},\ x < -3 \text{ vagy } x \geq 1\}. \qquad \diamondsuit$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4} \cdot \sqrt{-x}$

Megoldás.
f egy szorzat-függvény, amelyre $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, ahol $g(x) = \frac{1}{x^2+4}$ és $h(x) = \sqrt{-x}$. A szorzat-függvény értelmezési tartománya a tényezők értelmezési tartományának metszete.

A g függvény egy racionális törtfüggvény, amely minden valós helyen értelmezett, kivéve a nevező zérushelyeit. De a nevező $x^2+4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, így $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$.

A h függvény páros kitevős gyökfüggvény lineáris transzormáltja, így

$$-x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 0,$$

vagyis

$$\mathscr{D}_h = \{x | x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\}.$$

Mivel a g értelmezési tartománya az alaphalmaz ($\mathbb{R}$), ezért a metszetet nem befolyásolja, így

$$\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_h = \{x | x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\}. \qquad \diamondsuit$$

d) $f(x) = \lg(3x-1)$

Megoldás.
A logaritmus függvény argumentumában csak pozitív kifejezés állhat, ezért

$$3x-1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{1}{3},$$

így

$$\mathscr{D}_f = \{x | x \in \mathbb{R},\ x \geq \frac{1}{3}\}. \qquad \diamondsuit$$

e) $f(x) = \log_{x-1} 5$

Megoldás.
A logaritmus alapszámának a következő két feltételt kell kielégítenie:

1) pozitív
2) nem egyenlő 1-gyel.

Vagyis $x-1>0 \Leftrightarrow x>1 \quad x-1 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 2$.
Tehát $\mathscr{D}_f = \{x | x \in \mathbb{R},\ x>1 \text{ és } x \neq 2\}$. ♢

8.1. Megjegyzés. *Az értelmezési tartomány vizsgálat során elegendő a következő három problémás függvényosztályhoz tartozó kikötést megtenni, amennyiben a függvény tartalmaz valamelyik tipusú függvényrészletet:*

1) törtfüggvény $\frac{a}{b} \quad \Rightarrow b \neq 0$.

2) gyök-függvény $\sqrt[2k]{a} \quad (k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}) \qquad \Rightarrow a \geq 0$.

3) logaritmus függvény $\log_a b \quad \Rightarrow a>0,\ a \neq 1,$ *és* $b>0$.

8.2. Megjegyzés. *Az* $f(x) = \mathrm{tg} x$ *függvény nincs a felsorolt függvények között és látszólag nem is tartalmaz a fenti függvények közül egyet sem, de ha a* $\mathrm{tg} x$ *függvény definícióját felírjuk, könnyen megkaphatjuk az* $f(x) = \mathrm{tg} x$ *függvény esetén jól ismert* $\mathscr{D}_f = \{x | x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\ k \in \mathbb{Z}\}$ *értelmezési tartományt, hiszen*

$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Ezen az alakon már látható, hogy hányados-függvénnyel van dolgunk és így a kikötés $\cos x \neq 0$ *és ez valóban egybeesik a fenti értelmezési tartománnyal.*

Függvények ábrázolása lineáris transzformációval

Az $f(x) = A \cdot f_0(a(x+b)) + B$ függvényt öt lépésben ábrázolhatjuk:

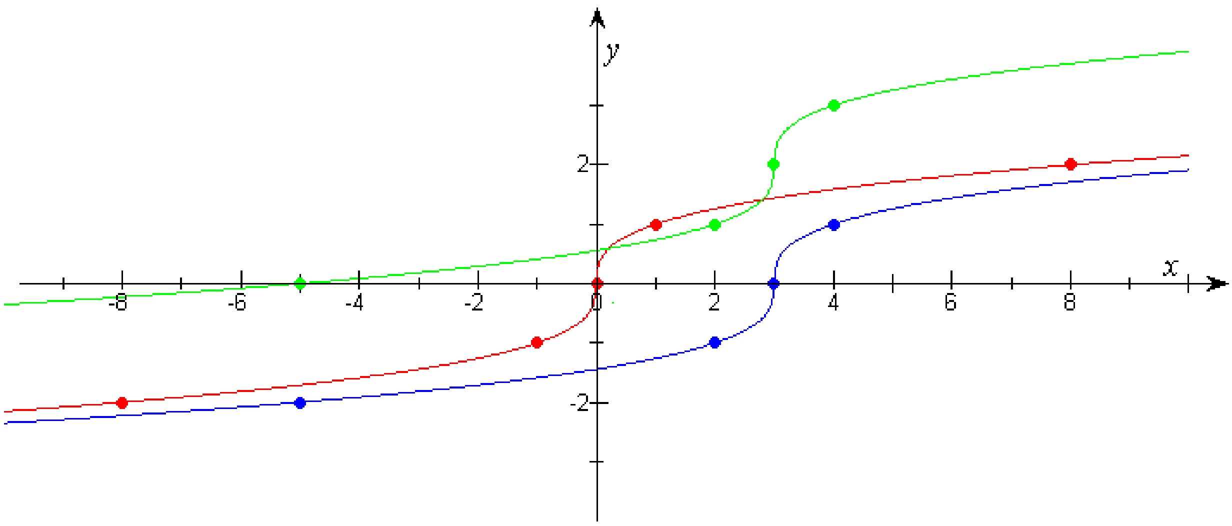
1. Ábrázoljuk az $f_0(x)$ nevezetes függvényt.
2. Az $f_1(x) = f(ax)$ függvény grafikonját az $f_0(x)$ grafikonjának x-tengely menti $\frac{1}{a}$-szoros nyújtásával kaphatjuk, azaz
   - Az y-tengely pontjai fixen maradnak
   - A függvény azon pontjainak, melyek nem esnek az y-tengelyre úgy kapható a képe, hogy az y-tengelytől mért távolságukat $\frac{1}{a}$-szorosra változtatjuk. ($a<0$ esetben egy tengelyes tükrözést is elvégzünk az y tengelyre)
3. Az $f_2(x) = f_0(a(x+b))$ függvény grafikonját az $f_1(x)$ grafikonjának x-tengely menti eltolásával kapjuk, az eltolás mértéke $-b$. (Azaz, ha $b>0$, akkor balra, ha $b<0$, akkor pedig jobbra tolunk.)
4. Az $f_3(x) = A \cdot f_2(x)$ függvény grafikonját az $f_2(x)$ grafikonjának y-tengely menti A-szoros nyújtásával kapjuk.
5. Az $f(x) = f_3(x) + B$ függvény grafikonját az $f_3(x)$ grafikonjának y-tengely menti eltolásával kapjuk, az eltolás mértéke B.

8.3. Feladat. *Ábrázoljuk a következő függvényeket nevezetes függvények grafikonjából kiindulva lineáris transzformációt alkalmazva.*

a) $f(x) = \sqrt[3]{x-3}+2$

Megoldás.
A függvényt három lépésben ábrázoljuk:

$$\begin{array}{lcll} f_1(x) & = & \sqrt[3]{x} & \text{piros} \\ f_2(x) & = & \sqrt[3]{x-3} & \text{kék} \\ f_3(x) & = & f(x) = \sqrt[3]{x-3}+2 & \text{zöld} \end{array}$$



$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \quad \mathscr{R}_f = \mathbb{R}.$$ ♢

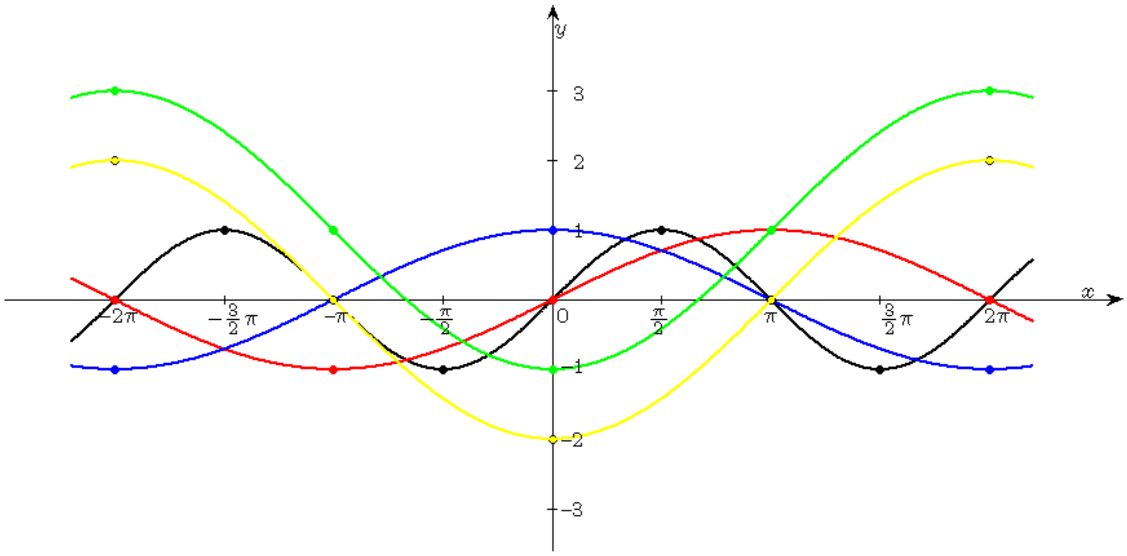
b) $f(x) = -2\sin\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 1$

Megoldás.

$$f(x) = -2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = -2\sin\left(\frac{1}{2}(x+\pi)\right) + 1$$

A függvényt öt lépésben ábrázoljuk:

$$\begin{array}{lcll} f_1(x) & = & \sin x & \text{fekete} \\ f_2(x) & = & \sin\left(\frac{1}{2}x\right) & \text{piros} \\ f_3(x) & = & \sin\left(\frac{1}{2}(x+\pi)\right) & \text{kék} \\ f_4(x) & = & -2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{sárga} \\ f_5(x) & = & f(x) = -2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 & \text{zöld} \end{array}$$



$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \quad \mathscr{R}_f = \{y | y \in \mathbb{R} - 1 \leq y \leq 3\}. \qquad \diamondsuit$$

Az értékkészlet a grafikon nélkül az alábbi módszerrel határozható meg

$$\begin{array}{rcll} -1 \leq & \sin\alpha & \leq 1 & \forall\alpha \in \mathbb{R} \\ -1 \leq & \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) & \leq 1 & \forall x \in \mathbb{R} \\ 2 \geq & -2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) & \geq -2 & \forall x \in \mathbb{R} \\ 3 \geq & -2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 & \geq -1 & \forall x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

8.3. Megjegyzés.

1) A függvény periodikus és periódusa 4π, hiszen

$$f(x+4\pi) = -2\sin\left(\frac{1}{2}(x+4\pi) + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = -2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} + 2\pi\right) + 1 = f(x)$$

Belátható az is, hogy $p = 4\pi$ a legkisebb pozitív p, amelyre

$$f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2) Álatalánosságban megmutatható, hogy a periódust csak az argumentumban szereplő együttható, az úgynevezett dilatációs konstans befolyásolja (vagyis nem változtatja a periódust a moduláció és a transzláció.) A dilatáció hatása a következőképpen írható fel: $f(ax)$ periódusa $\frac{1}{a} \cdot p$, ha p az $f(x)$ periódusa.

3) Az előző feladat során az ábrázolásnál kihasználhattuk volna, hogy $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$, így

$$f(x) = -2\cos(\frac{1}{2}x) + 1.$$

A bemutatott módszer előnye, hogy általánosan alkalmazható eljárást kaptunk, még ha több lépést is kellett végrehajtanunk.

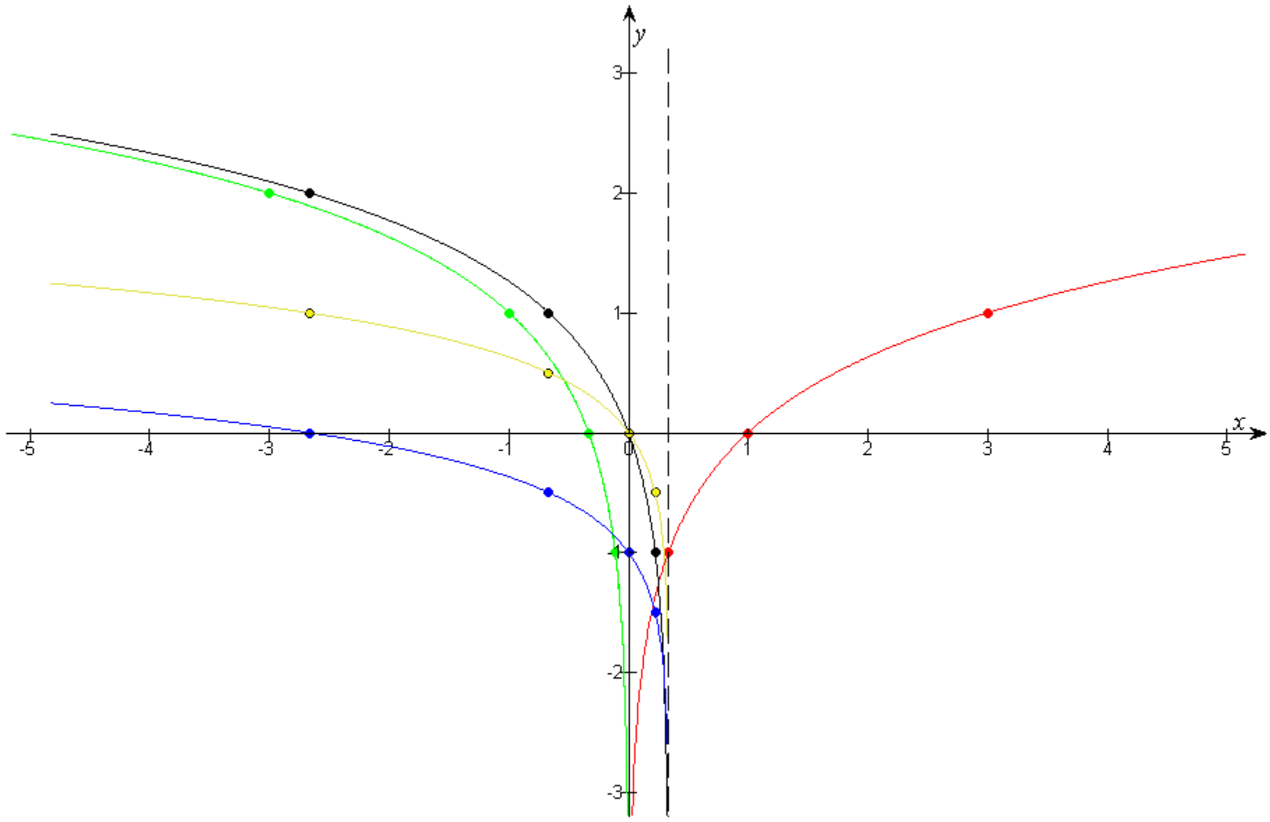
c) $f(x) = \dfrac{1}{2}\log_3(-3x+1)-1$

Megoldás.

$$f(x) = \frac{1}{2}\log_3(-3x+1)-1 = \frac{1}{2}\log_3\left(-3\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)-1$$

A függvényt öt lépésben ábrázoljuk:

$$\begin{array}{lcll} f_1(x) & = & \log_3 x & \text{piros} \\ f_2(x) & = & \log_3(-3x) & \text{zöld} \\ f_3(x) & = & \log_3\left(-3\left(x-\frac{1}{3}\right)\right) & \text{fekete} \\ f_4(x) & = & \frac{1}{2}\log_3\left(-3\left(x-\frac{1}{3}\right)\right) & \text{sárga} \\ f_5(x) & = & f(x) = \frac{1}{2}\log_3(-3x+1)-1 & \text{kék} \end{array}$$



$$\mathscr{D}_f = \{x|x\in\mathbb{R},\ x<\frac{1}{3}\} \quad \mathscr{R}_f = \mathbb{R}.$$

Az értelmezési tartomány a grafikonról is leolvasható, ugyanehhez a halmazhoz jutunk, ha a szokásos módon vizsgáljuk az értelmezési tartományt:

$$-3x+1>0 \quad \Leftrightarrow \quad 1>3x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}>x.$$

$\diamondsuit$

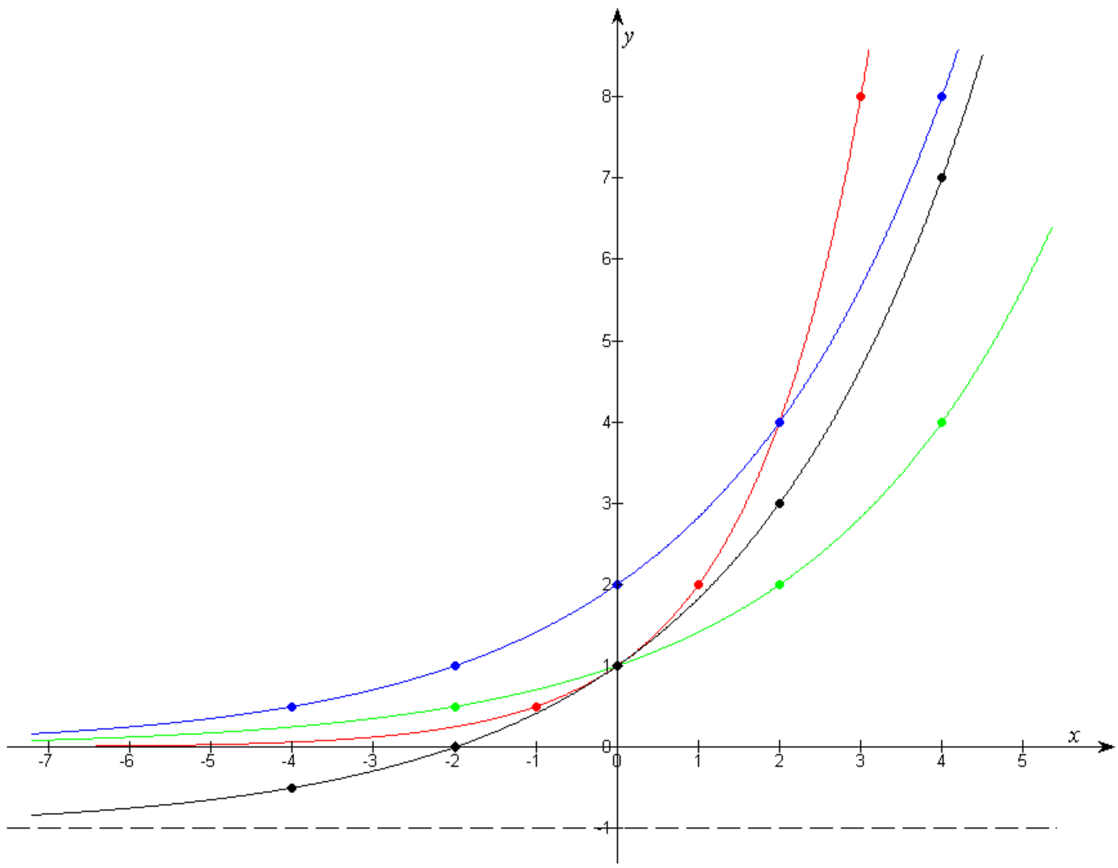
d) $f(x)=2^{\frac{1}{2}x+1}-1$

Megoldás.

$$f(x)=2^{\frac{1}{2}x+1}-1=2^{\frac{1}{2}(x+2)}-1$$

A függvényt négy lépésben ábrázoljuk:

$$\begin{array}{lcll} f_1(x) & = & 2^x & \text{piros} \\ f_2(x) & = & 2^{\frac{1}{2}x} & \text{zöld} \\ f_3(x) & = & 2^{\frac{1}{2}(x+2)} & \text{kék} \\ f_4(x) & = & f(x)=2^{\frac{1}{2}x+1}-1 & \text{fekete} \end{array}$$



$$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}, \quad \mathscr{R}_f=\{y|y\in\mathbb{R},\ y>-1\}.$$ ◊

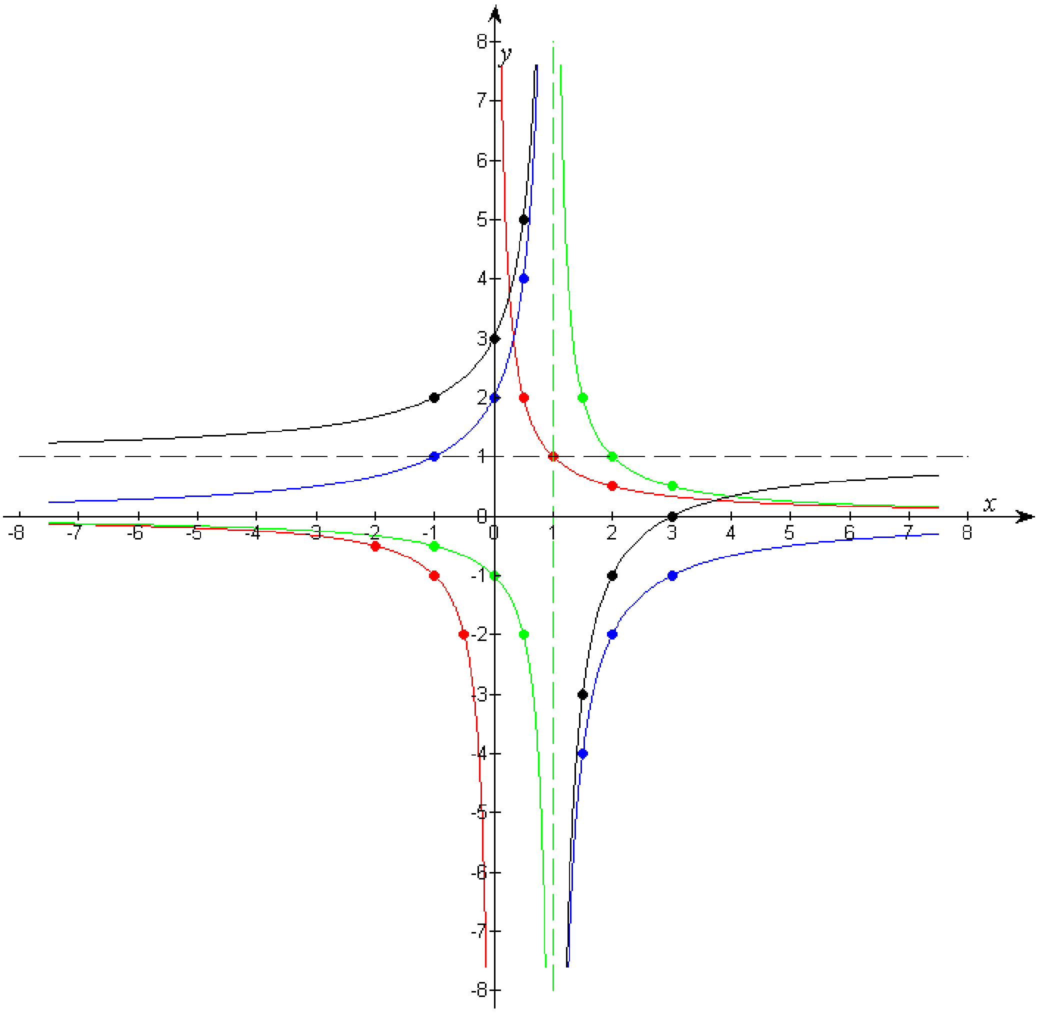
A grafikonról olvastuk le az értékkészletet, de felírhatjuk a szokásos módon, becsléssel:

$$\begin{array}{rcl} 0 & < & 2^{\alpha} \\ -1 & < & 2^{\alpha}-1 \\ -1 & < & 2^{\frac{1}{2}x+1}-1=f(x) \end{array}$$

e) $f(x) = -2\dfrac{1}{x-1} + 1$

Megoldás.
A függvényt négy lépésben ábrázoljuk:

$$\begin{array}{rcll} f_1(x) & = & \frac{1}{x} & \text{piros} \\ f_2(x) & = & \frac{1}{x-1} & \text{zöld} \\ f_3(x) & = & -2\frac{1}{x-1} & \text{kék} \\ f_4(x) & = & f(x) = -2\frac{1}{x-1} + 1 & \text{fekete} \end{array}$$



$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \mathscr{R}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}.$$ ◊

8.4. Megjegyzés. *A lineáris transzformáció eltolásai természetesen a függvény aszimptotáit hasonlóképen mozgatják. Így az új függvényt egyből rajzolhatjuk az új aszimptotákhoz viszonyítva, de ne feledkezzünk el a modulációról és a dilatációról, ezek az aszimptotákra nem, de a függvény képére természetesen hatással vannak.*

8.2. Házi Feladatok

8.1. Házi Feladat. *Ábrázoljuk az alábbi nevezetes függvényeket! A grafikon felhasználásával vizsgáljuk a függvénytulajdonságokat! Érdemes a grafikonokat egy-egy miliméterpapírra megrajzolni.*

$$\begin{array}{lllll}
f(x)=x^2 & f(x)=x^3 & f(x)=x^4 & f(x)=x^5 & f(x)=\sqrt{x} \\
f(x)=\sqrt[3]{x} & f(x)=\frac{1}{x} & f(x)=|x| & f(x)=\operatorname{sgn} x & f(x)=[x] \\
f(x)=\{x\} & f(x)=\sin x & f(x)=\cos x & f(x)=\operatorname{tg} x & f(x)=\operatorname{ctg} x \\
f(x)=\arcsin x & f(x)=\arccos x & f(x)=\operatorname{arctg} x & f(x)=arcctgx & f(x)=2^x \\
f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x & \underset{(a>0,\ a\neq 1)}{f(x)=a^x} & f(x)=\log_2 x & f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x & \underset{(a>0,\ a\neq 1)}{f(x)=\log_a x}
\end{array}$$

Az arkusz-függvények ábrázolása a 12. gyakorlat anyagához kapcsolódik, de úgy gondoltam, könnyebben áttekinthető, ha az összes nevezetes függvény egy helyen megtalálható.

8.2. Házi Feladat. *Határozzuk meg a valós számok azon legbővebb részhalmazát, melyen a következő hozzárendelésekkel adott függvények értelmezhetők.*

a) $\log_3 \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+5}}$ *megoldás*

b) $\operatorname{tg}\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)+2$ *megoldás*

c) $\sqrt[4]{x^2+x-6}$ *megoldás*

d) $\dfrac{\sqrt{3x-1}}{x^2+1}$ *megoldás*

8.3. Házi Feladat. *Ábrázoljuk a következő függvényeket nevezetes függvények grafikonjából kiindulva lineáris transzformációt alkalmazva, majd a grafikon felhasználásával vizsgáljuk a függvénytulajdonságokat!*

a) $f(x)=\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)+1$ *megoldás*

b) $f(x)=\dfrac{3}{2}\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)-1$ *megoldás*

c) $f(x)=\dfrac{1}{2}3^{x-2}+2$ *megoldás*

d) $f(x)=3\sqrt{\dfrac{1}{2}x-1}+3$ *megoldás*

8.3. Megoldások

8.2. Házi Feladat. *Határozzuk meg a valós számok azon legbővebb részhalmazát, melyen a következő hozzárendelésekkel adott függvények értelmezhetők.*

a) $\log_3 \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+5}}$

Megoldás.
Legyen $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $h(x) = \frac{x-1}{x+5}$, ekkor

$$\log_3 \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+5}} = f(g(h(x)))$$

Az értelmezési tartomány meghatározásánál a kiindulási halmaz tehát $\mathscr{D}_h$.

$$x+5 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \; x \neq -5$$

$$\mathscr{D}_h = \mathbb{R} \backslash \{-5\}$$

A $g \circ h$ összetétel értelmezési tartománya az előbbi halmaz szűkítéseként kapható, de mivel $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$

$$\mathscr{D}_{g \circ h} = \mathscr{D}_h = \mathbb{R} \backslash \{-5\}$$

Az utolsó lépés, hogy megkeressük $\mathscr{D}_{g \circ h}$ azon elemeit, melyekre $g(h(x)) \in \mathscr{D}_f$, vagyis a

$$g(h(x)) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+5}} > 0$$

feltételt vizsgáljuk:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+5}} &> 0 \\ \frac{x-1}{x+5} &> 0 \end{aligned}$$

Vagy

$$\begin{array}{rclcrcl} x-1 & > & 0 & \text{és} & x+5 & > & 0 \\ x & > & 1 & \text{és} & x & > & -5 \\ & & & x > 1, & & & \end{array}$$

vagy

$$\begin{array}{rclcrcl} x-1 & < & 0 & \text{és} & x+5 & < & 0 \\ x & < & 1 & \text{és} & x & < & -5 \\ & & & x < -5. & & & \end{array}$$

$$\mathscr{D}_{f \circ g \circ h} = \{x | x \in \mathbb{R},\; x < -5, \; \text{vagy } 1 < x\}$$ ♢

vissza a feladathoz

b) $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+2$

Megoldás.
A $\operatorname{tg}\alpha$ kifejezés akkor értelmezett, ha $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$. Tehát

$$\begin{aligned} 3x-\frac{\pi}{2} &\neq \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi \\ 3x &\neq \pi+k\cdot\pi=(k+1)\cdot\pi \\ x &\neq (k+1)\cdot\frac{\pi}{3}=m\cdot\frac{\pi}{3}, \quad \text{ahol } m=k+1\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\mathscr{D}_f=\{x|x\in\mathbb{R},\ x\neq m\cdot\frac{\pi}{3},\ m=\in\mathbb{Z}\}$$

Természetesen ugyanehhez az eredményhez jutunk a $\cos(3x-\frac{\pi}{2})\neq 0$ feltételből kiindulva.$\diamondsuit$

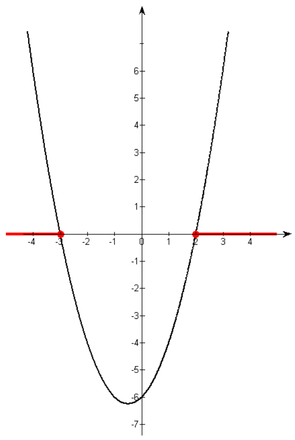
vissza a feladathoz

c) $\sqrt[4]{x^2+x-6}$

Megoldás.
A „páros-gyök” miatt

$$x^2+x-6\geq 0$$

kikötést kell tenni. Ezt az egyenlőtlenséget legkönnyebben grafikusan oldhatjuk meg. A másodfokú kifejezés gyökei $x_1=-3$ és $x_2=2$ így az alábbi parabolát kell vizsgálni:



$$\mathscr{D}_f=\{x|x\in\mathbb{R},\ x<-3,\ \text{vagy } 2<x\} \quad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

d) $\dfrac{\sqrt{3x-1}}{x^2+1}$

Megoldás.
A fenti függvény $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ alakú, így az értelmezési tartománya

$$\mathscr{D}_f=\mathscr{D}_g\cap\mathscr{D}_h\setminus\{x|x\in\mathscr{D}_h,\ h(x)=0\}.$$

A nevező egy polinom, így $\mathscr{D}_h=\mathbb{R}$ és az is könnyen látható, hogy $x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, ezért $\mathscr{D}_f=\mathscr{D}_g$.

A számláló „páros-kitevős” gyökfüggvény így $3x-1\geq 0$ kikötést kell tenni, így az értelmezési tartomány:

$$\mathscr{D}_f=\mathscr{D}_g=\left\{x|x\in\mathbb{R},\ x\geq\frac{1}{3}\right\}.$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

8.3. Házi Feladat. *Ábrázoljuk a következő függvényeket nevezetes függvények grafikonjából kiindulva lineáris transzformációt alkalmazva, majd a grafikon felhasználásával vizsgáljuk a függvénytulajdonságokat!*

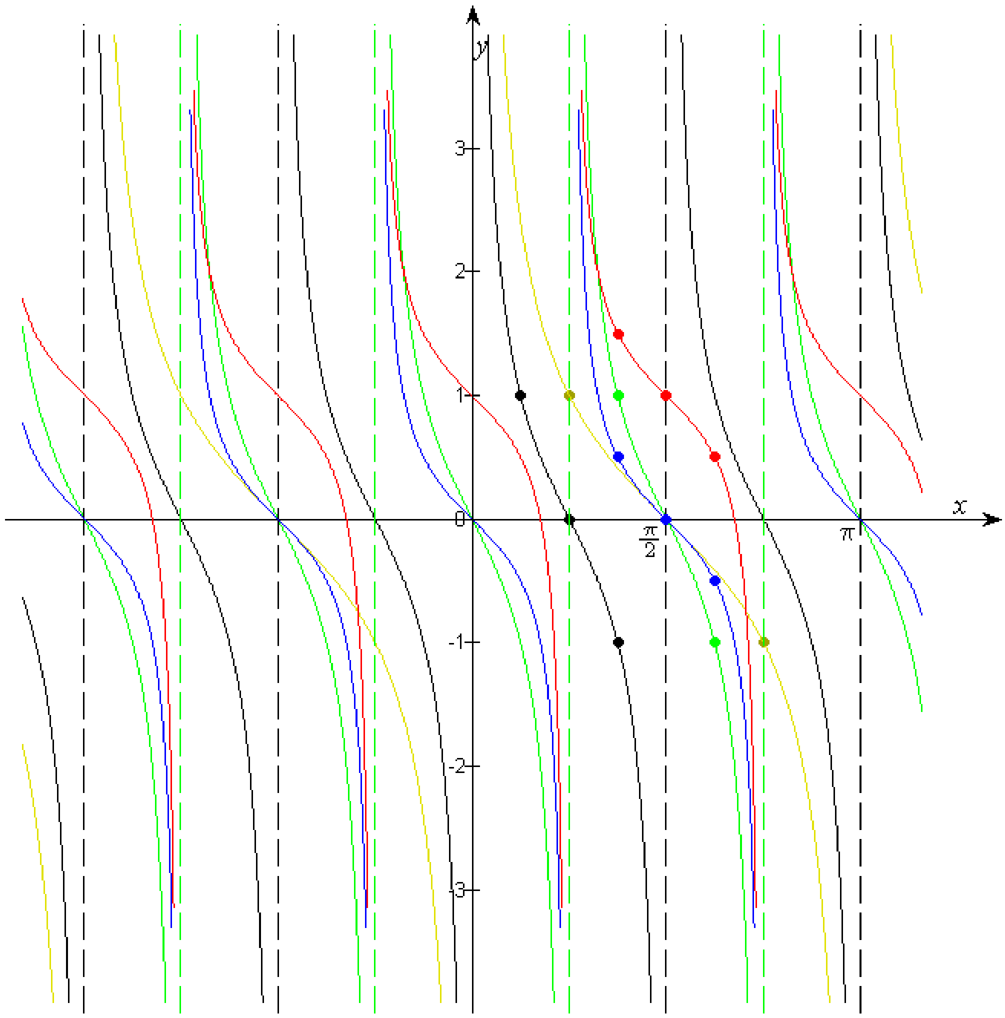
a) $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

Megoldás.

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + 1$$

A függvényt öt lépésben ábrázoljuk:

$$\begin{array}{lcll}
f_1(x) & = & \mathrm{ctg} x & \text{sárga} \\
f_2(x) & = & \mathrm{ctg}(2x) & \text{fekete} \\
f_3(x) & = & \mathrm{ctg}\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) & \text{zöld} \\
f_4(x) & = & \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) & \text{kék} \\
f_5(x) & = & f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 & \text{piros}
\end{array}$$



A függvénytulajdonságok részletezésétől eltekintünk. ♢

vissza a feladathoz

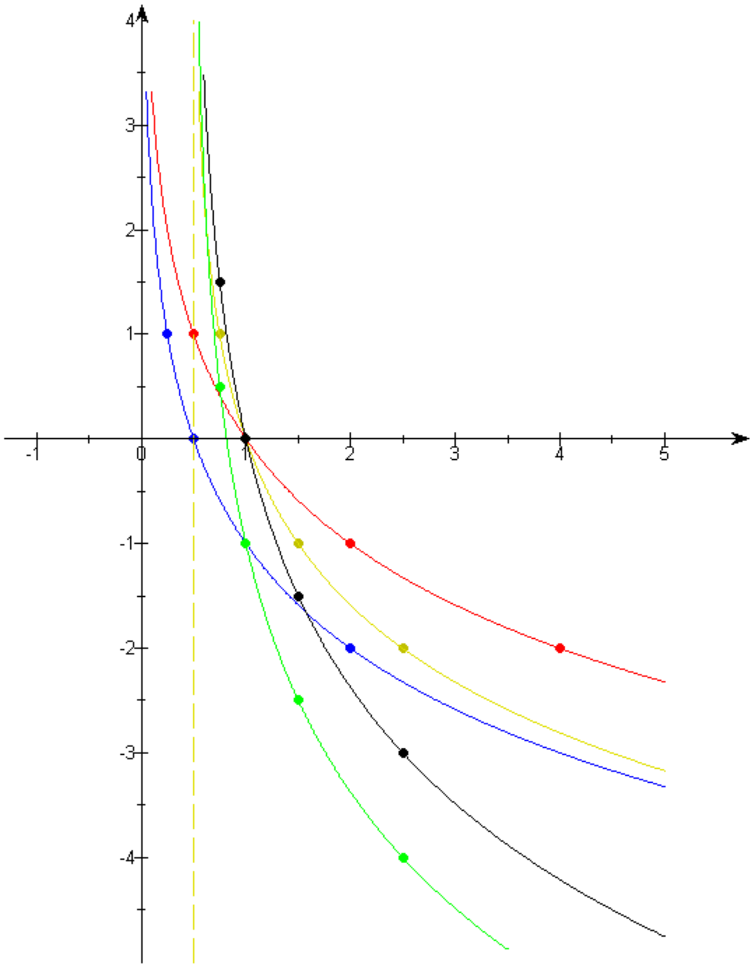
b) $f(x) = \dfrac{3}{2}\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)-1$

Megoldás.

$$f(x) = \frac{3}{2}\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)-1 = \frac{3}{2}\log_{\frac{1}{2}}\left(2\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\right)-1$$

A függvényt öt lépésben ábrázoljuk:

$f_1(x)$	$=$	$\log_{\frac{1}{2}} x$	piros
$f_2(x)$	$=$	$\log_{\frac{1}{2}}(2x)$	kék
$f_3(x)$	$=$	$\log_{\frac{1}{2}}\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$	sárga
$f_4(x)$	$=$	$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{2}}\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$	fekete
$f_5(x)$	$=$	$f(x) = \frac{3}{2}\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)-1$	zöld



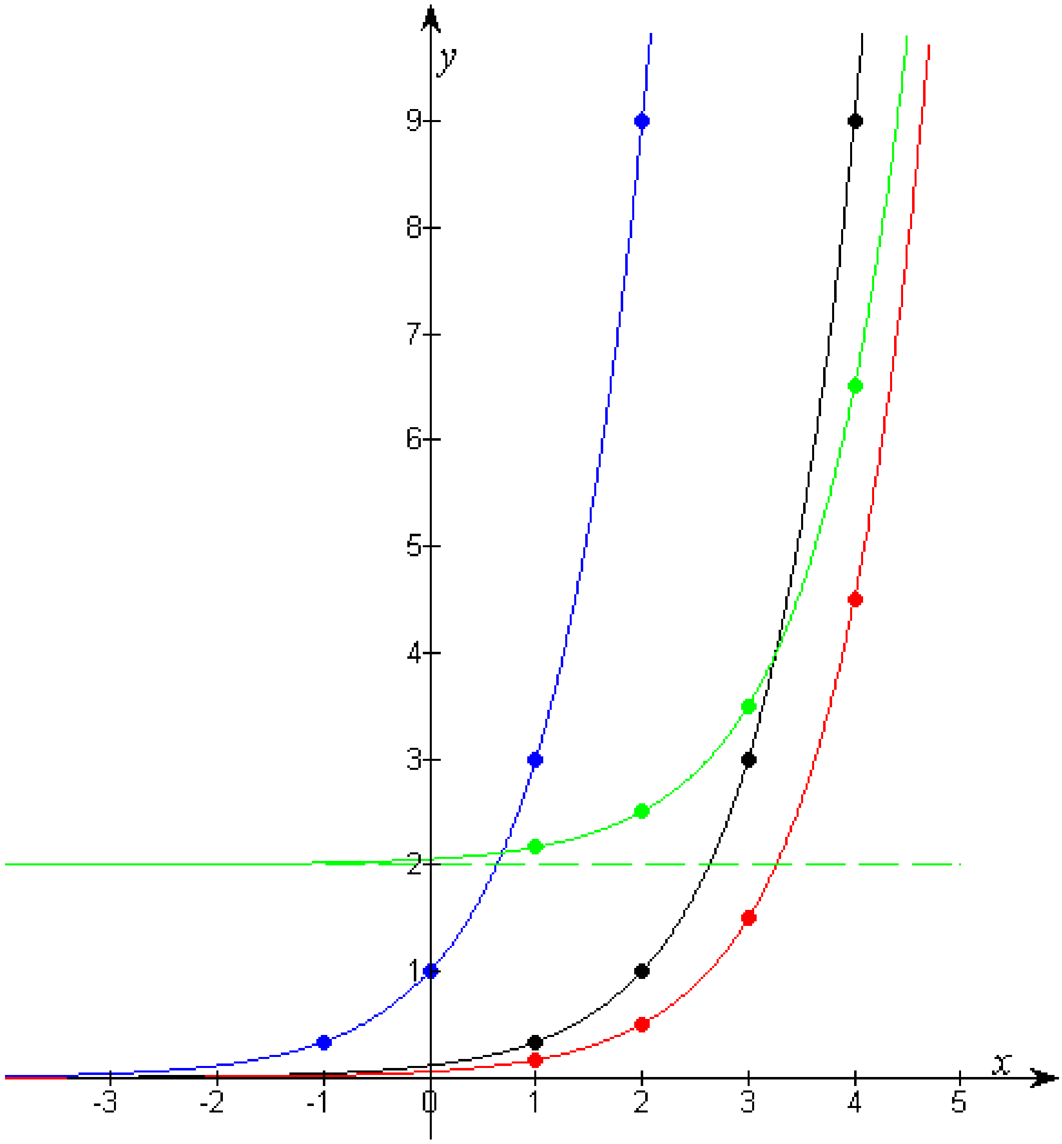
◊

vissza a feladathoz

c) $f(x) = \dfrac{1}{2}3^{x-2} + 2$

Megoldás.
A függvényt négy lépésben ábrázoljuk:

$$\begin{array}{lcll} f_1(x) & = & 3^x & \text{kék} \\ f_2(x) & = & 3^{x-2} & \text{fekete} \\ f_3(x) & = & \frac{1}{2} \cdot 3^{x-2} & \text{piros} \\ f_4(x) & = & f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{x-2} + 2 & \text{zöld} \end{array}$$



◊

vissza a feladathoz

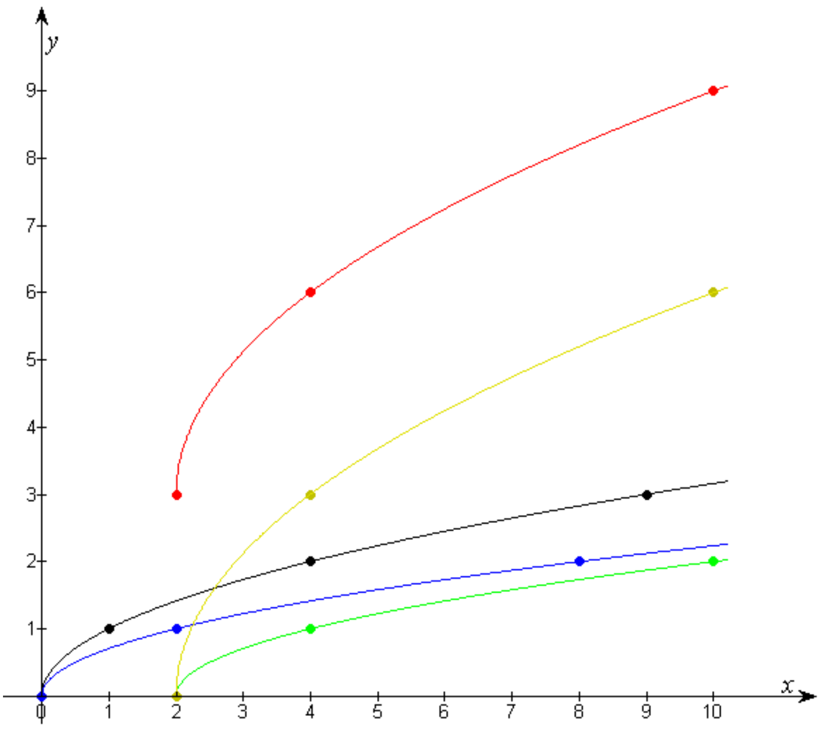
d) $f(x) = 3\sqrt{\frac{1}{2}x-1}+3$

Megoldás.

$$f(x) = 3\sqrt{\frac{1}{2}x-1}+3 = 3\sqrt{\frac{1}{2}(x-2)}+3$$

A függvényt öt lépésben ábrázoljuk:

$$\begin{array}{lcll} f_1(x) & = & \sqrt{x} & \text{fekete} \\ f_2(x) & = & \sqrt{\frac{1}{2}x} & \text{kék} \\ f_3(x) & = & \sqrt{\frac{1}{2}(x-2)} & \text{zöld} \\ f_4(x) & = & 3\sqrt{\frac{1}{2}x-1} & \text{sárga} \\ f_5(x) & = & f(x) = 3\sqrt{\frac{1}{2}x-1}+3 & \text{piros} \end{array}$$



◇

vissza a feladathoz

9. fejezet

Függvények határértéke

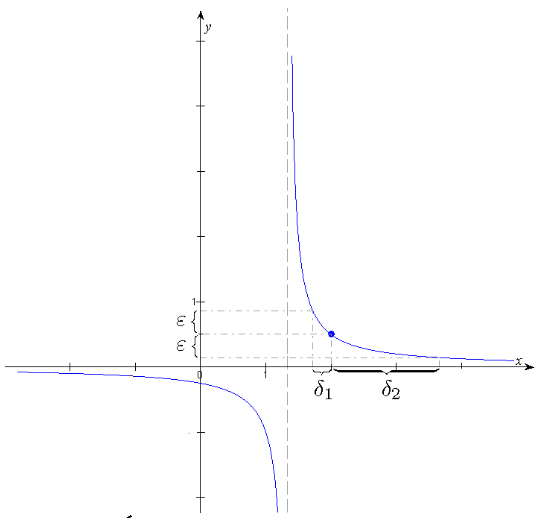
9.1. Gyakorlat

9.1. Feladat. *A definíció alapján igazoljuk a következő határértékeket!*

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{3x-4} = \dfrac{1}{2}$

Megoldás.
„Végesben véges határérték”, $a = 2, \quad A = \frac{1}{2}$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in H\ 0 < |x-a| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon$$



A függvény ezen a szakaszon szigorúan monoton csökkenő, ezért ha $\varepsilon < \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{3(2-\delta_1)-4} &=& \frac{1}{2}+\varepsilon \\
\frac{1}{3(2-\delta_1)-4} &=& \frac{1+2\varepsilon}{2} \\
3(2-\delta_1)-4 &=& \frac{2}{1+2\varepsilon} \\
3(2-\delta_1) &=& \frac{2}{1+2\varepsilon}+4 \\
2-\delta_1 &=& \frac{2}{3(1+2\varepsilon)}+\frac{4}{3} \\
\frac{2}{3}-\frac{2}{3(1+2\varepsilon)} &=& \delta_1
\end{array}
\qquad \text{és} \qquad
\begin{array}{rcl}
\frac{1}{3(2+\delta_2)-4} &=& \frac{1}{2}-\varepsilon \\
\frac{1}{3(2+\delta_2)-4} &=& \frac{1-2\varepsilon}{2} \\
3(2+\delta_2)-4 &=& \frac{2}{1-2\varepsilon} \\
3(2+\delta_2) &=& \frac{2}{1-2\varepsilon}+4 \\
\frac{2}{3(1-2\varepsilon)}+\frac{4}{3} &=& 2+\delta_2 \\
\frac{2}{3(1-2\varepsilon)}-\frac{2}{3} &=& \delta_2
\end{array}$$

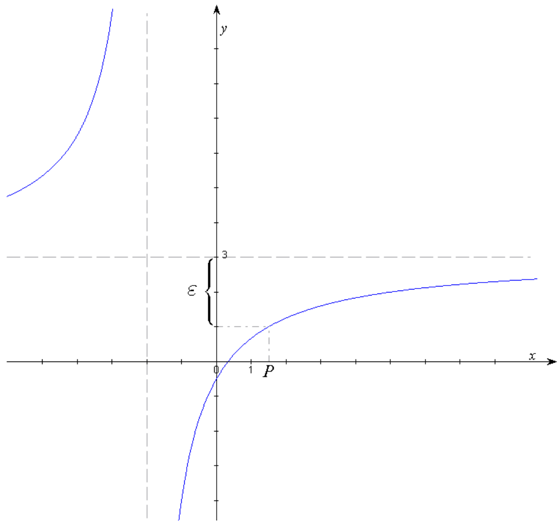
Legyen $\delta := \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$
Ha $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$, akkor $\delta_2 := \infty$ így $\delta = \delta_1$.

Így a megadott δ választása mellett a definíció teljesül. ♢

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x-1}{x+2} = 3$

Megoldás.
„végtelenben véges határérték” $A = 3$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists P = P(\varepsilon) > 0\ \forall x \in H,\ x > P\ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon.$$



$\frac{3x-1}{x+2}=\frac{3x+6-7}{x+2}=3-\frac{7}{x+2}$

Mivel a függvény a $(-2,\ +\infty)$ intervallumon szigorúan monoton növő

$$\begin{aligned}
\frac{3P-1}{P+2} &= 3-\varepsilon\\
3P-1 &= (3-\varepsilon)(P+2)\\
3P-1 &= (3-\varepsilon)P+2(3-\varepsilon)\\
\varepsilon P &= 2(3-\varepsilon)+1\\
P &= \frac{2(3-\varepsilon)+1}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

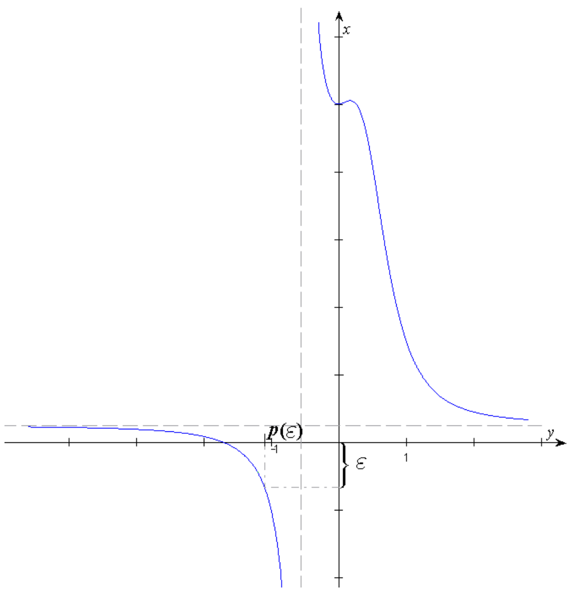
Ha $0<\varepsilon<\frac{7}{2}$, akkor $P(\varepsilon):=\frac{2(3-\varepsilon)+1}{\varepsilon}$, ha $\frac{7}{2}\le\varepsilon$, akkor $\forall P\in\mathbb{R}_+$ érték megfelelő.

$\diamondsuit$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+5}{4x^3-x^2+1}=\dfrac{1}{4}$

Megoldás.
„Végtelenben véges”

$$\forall\varepsilon>0\ \exists p=p(\varepsilon)<0\ \forall x\in H,\ x<p\ \Rightarrow\ |f(x)-\frac{1}{4}|<\varepsilon$$



$$\begin{aligned}
\left|f(x)-\frac{1}{4}\right| &< \varepsilon\\
\left|\frac{x^3+5}{4x^3-x^2+1}-\frac{1}{4}\right| &< \varepsilon\\
\left|\frac{4x^3+20-(4x^3-x^2+1)}{4(4x^3-x^2+1)}\right| &< \varepsilon\\
\left|\frac{x^2+19}{4(4x^3-x^2+1)}\right| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Ha $x\le-1$, akkor a nevező mindig negatív. Ezt kihasználva felbonthatjuk a kifejezésben az abszolútértéket.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+19}{-4(4x^3-x^2+1)} &< \varepsilon\\
0<\frac{x^2+19}{-16x^3+4x^2-4} &< \varepsilon
\end{aligned}$$

A grafikont csak a szemléltetés céljából rajzoltuk meg, a feladat megoldása során nem szükséges a függvény menetének ismerete.

Mivel $x\le-1$, ezért igazak a következők $19\le19x^2$, $4x^2>0$, $-4>4x^3$. Ezeket a becsléseket használva a fenti tört növelhető, de nem szabad elfelejteni, hogy a relációk csak akkor igazak, ha $x\le-1$.

Az előző becslések felhasználásával:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+19}{-16x^3+4x^2-4)} &\le \frac{x^2+19x^2}{-16x^3+0+4x^3} < \varepsilon \\
\frac{20x^2}{-12x^3} = -\frac{5}{3}\frac{1}{x} &< \varepsilon \\
-\frac{5}{3} &> \varepsilon x \\
-\frac{5}{3\varepsilon} &> x
\end{aligned}$$

Ekkor legyen $p(\varepsilon) := \min\{-\frac{5}{3\varepsilon},\ -1\}$. (Itt kellett figyelni arra, hogy a becsléseink csak akkor igazak, ha $x \le -1$.)

Ez a módszer azokban az esetekben is működik, amelyeknél a grafikon egyszerűen felrajzolható, de szemmel láthatóan itt nehézkesebb a becslés. Érdemes otthon az előző feladatokat megoldani a grafikon ismerete nélkül. $\diamondsuit$

9.2. Feladat. *Az átviteli-elv segítségével igazoljuk a következő határértékeket.*

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+2x}{3x-2} = \dfrac{15}{7}$

Megoldás.

$$\forall x_n \in H,\ x_n \ne a\ (n \in \mathbb{N})\ \lim_{n\to\infty} x_n = a\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

Legyen $x_n \in H,\ x_n \ne a,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2+2x_n}{3x_n-2} \overset{*}{=} \frac{9+2\cdot 3}{3\cdot 3-2} = \frac{15}{7}.$$

* A sorozatok határértékére vonatkozó műveletei szabályok miatt. $\diamondsuit$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-5}{-2x+7} = -\dfrac{3}{2}$

Megoldás.

$$\forall x_n \in H,\ (n \in \mathbb{N})\ \lim_{n\to\infty} x_n = \infty\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\frac{3}{2}.$$

Legyen $x_n \in H,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{3x_n-5}{-2x_n+7} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{5}{x_n}}{-2+\frac{7}{x_n}} = -\frac{3}{2}.$$

$\diamondsuit$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\nexists$

Megoldás.
Legyen $x_n := 2-\frac{1}{n}$, ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ $(x_n \neq 2)$.

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2-\frac{1}{n})-2} = \lim_{n\to\infty} -n = -\infty.$$

Legyen $y_n := 2+\frac{1}{n}$, ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 2$ $(y_n \neq 2)$.

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2+\frac{1}{n})-2} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Tehát találtunk két olyan változó sorozatot, melyek $a=2$-be tartanak, mégis a hozzájuk tartozó függvényérték-sorozatok határértéke különböző. Így a függvény határértéke az adott pontban nem létezik. (A jobb- illetve a bal-oldali határérték természetesen értelmezhető.) ♢

9.1. Megjegyzés.

1.) Az átviteli-elv egyik nagy előnye, hogy segítségével a függvényhatárérték számítása a már jól ismert sorozatok határérték számítására vezethető vissza. A fenti feladatokból jól látható, hogy a bizonytalansági esetek hasonlóan szüntethetők meg, mint a sorozatok esetében.

2.) A c feladat során tapasztalhattuk, hogy olyan esetekben, mikor azt kell bizonyítani, hogy az adott pontban nem létezik a függvény határértéke, elegendő találni két különböző változó sorozatot, melyek határértéke az adott pont, de a függvényértékek sorozata különböző.

9.3. Feladat. *Határozzuk meg a következő határértékeket a műveleti tulajdonságok alapján, ha léteznek!*

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+4}{5x+7}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+4}{5x+7} = \frac{3\cdot 2+4}{5\cdot 2+7} = \frac{10}{17}$$ ♢

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+5x-2}{-2x^3+4x^2-1}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+5x-2}{-2x^3+4x^2-1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{3x+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{-2+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}} = -\infty$$ ♢

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^2+3x-1}{2x-3}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{7x^2+3x-1}{2x-3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{7x+3-\frac{1}{x}}{2-\frac{3}{x}} = -\infty \qquad \diamond$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4\cdot 5^{x+1}+7\cdot 2^x+1}{3\cdot 2^{2x-1}+6\cdot 5^x+2}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4\cdot 5^{x+1}+7\cdot 2^x+1}{3\cdot 2^{2x-1}+6\cdot 5^x+2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{20\cdot 5^x+7\cdot 2^x+1}{\frac{3}{2}\cdot 4^x+6\cdot 5^x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{20+7\cdot\frac{2^x}{5^x}+\frac{1}{5^x}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{4^x}{5^x}+6+\frac{2}{5^x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{20+7\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x+\frac{1}{5^x}}{\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^x+6+\frac{2}{5^x}} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \qquad \diamond$$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4\cdot 5^{x+1}+7\cdot 2^x+1}{3\cdot 2^{2x-1}+6\cdot 5^x+2}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4\cdot \overbrace{5^{x+1}}^{\to 0}+7\cdot \overbrace{2^x}^{\to 0}+1}{3\cdot \underbrace{2^{2x-1}}_{\to 0}+6\cdot \underbrace{5^x}_{\to 0}+2} = \frac{1}{2} \qquad \diamond$$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x+7\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{x-1}}{3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x+6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^x}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x+7\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{x-1}}{3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x+6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x+7\cdot\frac{9}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^x}{3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x+6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4\cdot 1+7\cdot\frac{9}{2}\frac{\left(\frac{2}{9}\right)^x}{\left(\frac{1}{4}\right)^x}}{3\cdot 1+6\cdot\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^x}{\left(\frac{1}{4}\right)^x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{63}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^x}{3+6\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^x} = \frac{4}{3}. \qquad \diamond$$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^4+1}}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^4+1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = 1. \qquad \diamond$$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-2x}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-2x}\right)\frac{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-2x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+5x)-(x^2-2x)}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-2x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=\frac{7}{2}.$$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{x+1}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{x+1}\overset{1^\infty}{=}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{x}\cdot(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2x+2}{x}}\overset{*}{=}e^2$$

*Vizsgáljuk meg a kitevő határértékét:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{1}=2$ ♢

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-2}{x^2-4x+1}\right)^{x+2}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-2}{x^2-4x+1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x+1+6x-3}{x^2-4x+1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6x-3}{x^2-4x+1}\right)^{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-4x+1}{6x-3}}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-4x+1}{6x-3}}\right)^{\frac{x^2-4x+1}{6x-3}\cdot\frac{6x-3}{x^2-4x+1}\cdot(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-4x+1}{6x-3}}\right)^{\frac{x^2-4x+1}{6x-3}}\right]^{\frac{6x-3}{x^2-4x+1}\cdot(x+2)}\overset{*}{=}e^6$$

*Vizsgáljuk meg a kitevő határértékét:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+3x-6}{x^2-4x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6+\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=6$ ♢

k) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2-x-6} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to -2} \frac{x-1}{x-3} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5} \qquad \diamondsuit$$

l) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-2x^2-9x+18}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-2x^2-9x+18} \overset{\frac{0}{0}*}{=}$$

A „$\frac{0}{0}$" alakból látható, hogy mind a számláló, mind a nevező osztható az $x-3$ kifejezéssel:

$$\begin{array}{rrrrl}
x^3 & -3x^2 & -x & +3 & :(x-3) = \quad x^2-1 \\
x^3 & -3x^2 & & & \\
\hline
 & & -x & +3 & \\
 & & -x & +3 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl}
x^3 & -2x^2 & -9x & +18 & :(x-3) = \quad x^2+x-6 \\
x^3 & -3x^2 & & & \\
\hline
 & x^2 & -9x & +18 & \\
 & x^2 & -3x & & \\
\hline
 & & -6x & +18 & \\
 & & -6x & +18 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

így

$$^* = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2-1)}{(x-3)(x^2+x-6)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-1}{x^2+x-6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \qquad \diamondsuit$$

m) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4} = \lim_{x\to 16} \frac{(x-16)(\sqrt{x}+4)}{x-16} = \lim_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}+4}{1} = 8 \qquad \diamondsuit$$

9.2. Megjegyzés. *A „$\frac{0}{0}$" alak most is megszüntethető lenne egyszerű szorzattá alakítással is, de úgy véltük, hogy a $x-16 = (\sqrt{x}-4)\cdot(\sqrt{x}+4)$ felbontási lehetőség nehezebben felfedezhető. Szintén széleskörűen alkalmazható megoldási módszer az új változó bevezetése. Jelen feladatnál $y = \sqrt{x}$ helyettesítés után a $\lim\limits_{y\to 4} \frac{y^2-16}{y-4}$ határértéket kellene vizsgálni.*

n) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+1}{1-x^2}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{1-x^2}\overset{\frac{2}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^1}\cdot\frac{x^3+1}{1+x}=\nexists$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(1-x)^1}\cdot\frac{x^3+1}{1+x}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(1-x)^1}\cdot\frac{x^3+1}{1+x}=-\infty$$

Mivel az $x=1$ pontban nem egyezik meg a jobb- és a baloldali határérték, ezért itt nem létezik határérték. ♢

o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-3x+1}{2x^3+x^2}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2-3x+1}{2x^3+x^2}\overset{\frac{1}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x-0)^2}\cdot\frac{5x^2-3x+1}{2x+1}=+\infty$$ ♢

p) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^3+5x^2+7x+3}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^3+5x^2+7x+3}\overset{\frac{0}{0}\,**}{=}$$

$$x^2-1=(x-1)(x+1),$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +5x^2 & +7x & +3 & :(x+1)= \quad x^2+4x+3\\
x^3 & +x^2 & & & \\
\hline
 & 4x^2 & 7x & +3 & \\
 & 4x^2 & +4x & & \\
\hline
 & & 3x & +3 & \\
 & & 3x & +3 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$$**=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2+4x+3)}==\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x^2+4x+3}\overset{\frac{-2}{0}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x+3}=\nexists$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x+3}=+\infty\qquad\lim_{x\to -1+}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x+3}=-\infty$$

Mivel az $x=-1$ pontban nem egyezik meg a jobb- és a baloldali határérték, ezért itt nem létezik határérték. ♢

9.3. Tétel. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Bizonyítás.

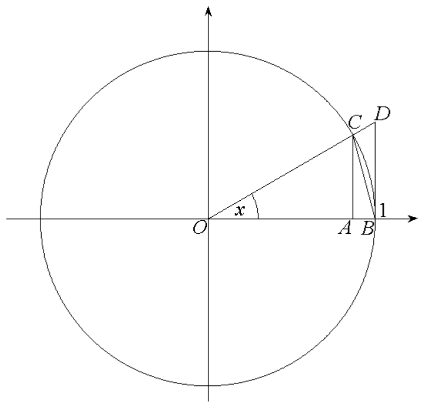
i) Mivel $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ és

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x) \quad \forall x \in \mathscr{D}_f,$$

ezért a függvény páros, így elég belátnunk, hogy $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, hiszen a paritás miatt

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x}.$$

ii) Legyen $0 < x < \frac{\pi}{2}$



Az ábra jelöléseivel:

$$\begin{aligned} OB &= OC = 1 \\ AC &= \sin x \\ BD &= \mathrm{tg} x \end{aligned}$$

Az ábra alapján nyilvánvaló, hogy

$$T_{OBC_\triangle} < T_{OBC_{\text{körcikk}}} < T_{OBD_\triangle}$$

$$\begin{aligned} T_{OBC_\triangle} &= \frac{1 \cdot \sin x}{2} \\ T_{OBC_{\text{körcikk}}} &= \frac{r^2\pi}{2\pi} \cdot x = \frac{1 \cdot x}{2} = \frac{x}{2} \\ T_{OBD_\triangle} &= \frac{1 \cdot \mathrm{tg} x}{2} \end{aligned}$$

Így

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1 \cdot \sin x}{2} < & \frac{x}{2} & < \dfrac{1 \cdot \mathrm{tg} x}{2} \\ \sin x < & x & < \mathrm{tg} x \\ \sin x < & x & < \dfrac{\sin x}{\cos x} \\ \dfrac{1}{\sin x} > & \frac{1}{x} & > \dfrac{\cos x}{\sin x} \\ 1 \leftarrow 1 > & \frac{\sin x}{x} & > \cos x \to 1 \end{array}$$

Így a rendőrelv alapján $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$ □

9.4. Megjegyzés. *Igazolható, hogy* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin g(x)}{g(x)} = 1,$ *ha* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \quad (a \in \overline{\mathbb{R}}).$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{3x}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3} \qquad \diamondsuit$$

r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sin 7x}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{7x}{\sin 7x} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin 7x}{7x}} = \frac{2}{7} \qquad \diamondsuit$$

s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg} 3x}{\sin 4x}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} 3x}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \cdot \frac{1}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 3x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 4x}{4x}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \qquad \diamondsuit$$

t) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \\ &= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

9.2. Házi Feladatok

9.1. Házi Feladat. *A definíció alapján igazoljuk a következő határértékeket!*

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{x-5} = 2$ *megoldás*

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^4-5x+7}{2x^2+x+1} = \infty$ *megoldás*

c) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{2}{(x-3)^2} = \infty$ *megoldás*

9.2. Házi Feladat. *Az átviteli-elv segítségével igazoljuk a következő határértékeket.*

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^2+3x-1}{2x-3} = -\infty$ *megoldás*

b) $\lim\limits_{x\to-1} (5x+2) = -3$ *megoldás*

c) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{-2}{x+3} = \nexists$ *megoldás*

9.3. Házi Feladat. *Határozzuk meg a műveleti tulajdonságok alapján következő határértékeket, ha léteznek!*

a) $\lim\limits_{x\to-3} (3x+7)^5$ *megoldás*

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x+5}{-3x^2+2x-1}$ *megoldás*

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-4x^2+2}{-5x^2+7x}$ *megoldás*

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{x+1}-3\cdot4^{x-1}+2}{3^x-2\cdot2^{2x-1}+1}$ *megoldás*

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2^{x+1}-3\cdot4^{x-1}+2}{3^x-2\cdot2^{2x-1}+1}$ *megoldás*

f) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2-\sqrt{x^4-2x})$ *megoldás*

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x-2}\right)^x$ *megoldás*

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-2x}{x^2+1}\right)^{2x}$ *megoldás*

i) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-2x+1}{3x-3}$ *megoldás*

j) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3-3x^2-10x+24}{x^3-4x^2+x+6}$ *megoldás*

k) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2}{x-2}$ *megoldás*

l) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2}{(x-2)^2}$ *megoldás*

m) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{tg}3x}{\sin 4x}$ *megoldás*

n) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos 3x}{x}$ *megoldás*

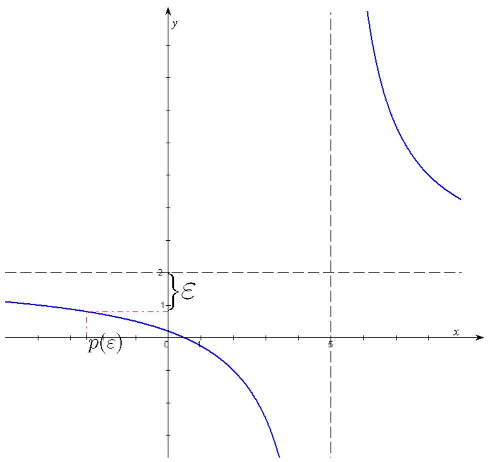
9.3. Megoldások

9.1. Házi Feladat. *A definíció alapján igazoljuk a következő határértékeket!*

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x-5}=2$

Megoldás.
„Végtelenben véges”

$$\forall\varepsilon>0\ \exists p=p(\varepsilon)<0\ \forall x<p\ \Rightarrow\ |f(x)-2|<\varepsilon.$$



$\frac{2x-1}{x-5}=\frac{2x-10+9}{x-5}=2+\frac{9}{x-5}$

$$\begin{aligned} f(p) &= 2-\varepsilon\\ \frac{2p-1}{p-5} &= 2-\varepsilon\\ 2p-1 &= (2-\varepsilon)p-5(2-\varepsilon)\\ \varepsilon\cdot p &= 1-5(2-\varepsilon)\\ p &= \frac{9-5\varepsilon}{\varepsilon}\end{aligned}$$

Ha $\varepsilon<\frac{9}{5}$, akkor

$$p:=\frac{9-5\varepsilon}{\varepsilon},$$

ha $\varepsilon\geq\frac{9}{5}$, akkor minden $p\in\mathbb{R}_-$ megfelelő.

Természetesen ez a feladat is megoldható a függvény menetének ismerete nélkül:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists p=p(\varepsilon)<0,\ \forall x<p\ \Rightarrow\ |f(x)-2|<\varepsilon.$$

$$\begin{aligned} |f(x)-2| &< \varepsilon\\ \left|\frac{2x-1}{x-5}-\frac{2x-10}{x-5}\right| &< \varepsilon\\ \left|\frac{9}{x-5}\right| &< \varepsilon\end{aligned}$$

Az abszolútérték feloldásához a következő két esetet külön kell tárgyalni:

Ha $x<5$

$$\begin{aligned} \frac{9}{5-x} &< \varepsilon\\ \frac{9}{\varepsilon} &< 5-x\\ x &< 5-\frac{9}{\varepsilon}\end{aligned}$$

Ha $x\geq 5$
Érdektelen eset, mert $\nexists p<0\ \ 5<x<p$ teljesül valamely a tartományba eső x-ekre.

Ekkor ha $\varepsilon<\frac{9}{5}$, akkor $p:=5-\frac{9}{\varepsilon}$, ha $\varepsilon\geq\frac{9}{5}$, akkor minden $p\in\mathbb{R}_-$ megfelelő, ami egybeesik az előző megoldásnál kapott eredménnyel. Ez nem szükségszerű, hiszen az eredmény függ attól is, milyen becslést használunk. $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^4-5x+7}{2x^2+x+1} = \infty$

Megoldás.
„Végtelenben végtelen”

$$\forall R>0\ \exists p=p(R)<0\ \forall x\in H,\ x<p\ \Rightarrow\ f(x)>R$$

Vizsgáljuk tehát, hogy a

$$\frac{3x^4-5x+7}{2x^2+x+1} > R > 0$$

egyenlőtlenség mely x-ek esetén teljesül. Mivel $x<p<0$ igazak a következő becslések:

$$-5x>0, \quad 7>0, \quad x<0, \quad 1<x^2.$$

Ezeket felhasználva becsülhetjük $f(x)$-et alulról:

$$\frac{3x^4-5x+7}{2x^2+x+1} > \frac{3x^4+0+0}{2x^2+0+x^2} = x^2 > R\ \Rightarrow x>\sqrt{R} \text{ vagy } x<-\sqrt{R}.$$

Mivel az $x>\sqrt{R}$ esethez tartozó x-ekhez nem található olyan negatív p, amelynél kisebbek lennének, csak az $x<-\sqrt{R}$ tartomány az érdekes. Legyen

$$p(R) := -\sqrt{R}.$$

Ezzel megtaláltuk a szükséges küszöbszámot. ♢

vissza a feladathoz

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2}{(x-3)^2} = \infty$

Megoldás.
„Végesben végtelen”

$$\forall R>0\ \exists\delta=\delta(R)>0\ \forall x\in H\ 0<|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ f(x)>R.$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{(x-3)^2} &> R \\ 2 &> R(x-3)^2 \\ \frac{2}{R} &> (x-3)^2 \end{aligned}$$

Ami az $y=(x-3)^2$ parabola menetét figyelembe véve ekvivalens a

$$-\sqrt{\frac{2}{R}} < x-3 < \sqrt{\frac{2}{R}}$$

összefüggéssel. Amelyből az abszolútérték definíciója alapján adódik:

$$|x-a| = |x-3| < \sqrt{\frac{2}{R}},$$

azaz

$$\delta(R) := \sqrt{\frac{2}{R}}$$

valóban megfelelő választás. ♢

vissza a feladathoz

9.2. Házi Feladat. *Az átviteli-elv segítségével igazoljuk a következő határértékeket.*

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^2+3x-1}{2x-3} = -\infty$

Megoldás.

$$\forall x_n \in H \ (n\in\mathbb{N}) \ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \text{ ekkor } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$$

Legyen $x_n \in H$ $(n\in\mathbb{N})$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, ekkor

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{7x_n^2+3x_n-1}{2x_n-3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{7x_n+3-\frac{1}{x_n}}{2-\frac{3}{x_n}} = -\infty$$

♢

vissza a feladathoz

b) $\lim\limits_{x\to-1} (5x+2) = -3$

Megoldás.

$$\forall x_n \in H \ x_n \neq -1 \ (n\in\mathbb{N}) \ \lim_{n\to\infty} x_n = -1, \text{ ekkor } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -3$$

Legyen $x_n \in H$ $x_n \neq -1$ $(n\in\mathbb{N})$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$, ekkor

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (5x_n+2) = 5\cdot(-1)+2 = -3$$

♢

vissza a feladathoz

c) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{-2}{x+3} = \nexists$

Megoldás.
Legyen $x_n := -3+\frac{1}{n}$ $x_n \in H$ $x_n \neq -3$ $(n\in\mathbb{N})$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -3$, ekkor

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{x_n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{-3+\frac{1}{n}+3} = \lim_{n\to\infty} -2n = -\infty$$

Legyen $y_n := -3-\frac{1}{n}$ $y_n \in H$ $y_n \neq -3$ $(n\in\mathbb{N})$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -3$, ekkor

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{y_n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{-3-\frac{1}{n}+3} = \lim_{n\to\infty} 2n = \infty$$

Tehát találtunk két olyan (nem stacionárius) argumentum-sorozatot, melyek $a=-3$-ba tartanak, mégis a hozzájuk tartozó függvényérték-sorozatok határértéke különböző. Így a függvény határértéke az adott pontban nem létezik. ♢

vissza a feladathoz

9.3. Házi Feladat. *Határozzuk meg a műveleti tulajdonságok alapján következő határértékeket, ha léteznek!*

Megoldás.

vissza a feladathoz

a) $\lim\limits_{x\to-3}(3x+7)^5=(-2)^5=-32.$

vissza a feladathoz

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+5}{-3x^2+2x-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{-3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=-\dfrac{2}{3}.$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-4x^2+2}{-5x^2+7x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-4+\frac{2}{x^2}}{-5+\frac{7}{x}}=+\infty.$

vissza a feladathoz

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{x+1}-3\cdot4^{x-1}+2}{3^x-2\cdot2^{2x-1}+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot2^x-\frac{3}{4}\cdot4^x+2}{3^x-4^x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot\frac{2^x}{4^x}-\frac{3}{4}+\frac{2}{4^x}}{\frac{3^x}{4^x}-1+\frac{1}{4^x}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^x-\frac{3}{4}+\frac{2}{4^x}}{\left(\frac{3}{4}\right)^x-1+\frac{1}{4^x}}=\frac{3}{4}.$$

vissza a feladathoz

vissza a feladathoz

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^{x+1}-3\cdot4^{x-1}+2}{3^x-2\cdot2^{2x-1}+1}=\dfrac{2}{1}=2.$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-\sqrt{x^4-2x})\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-\sqrt{x^4-2x})\dfrac{x^2+\sqrt{x^4-2x}}{x^2+\sqrt{x^4-2x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-(x^4-2x)}{x^2+\sqrt{x^4-2x}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+\sqrt{x^4-2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x^3}}}=0.$$

vissza a feladathoz

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x-2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-2+1}{2x-2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x-2}\right)^x=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x-2}\right)^{(2x-2)\cdot\frac{1}{2x-2}\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x-2}\right)^{2x-2}\right]^{\frac{x}{2x-2}}=$$

* Vizsgáljuk meg külön a kitevő határértékét:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2-\frac{2}{x}}=\dfrac{1}{2}.$

$$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

vissza a feladathoz

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x}{x^2+1}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1-2x-1}{x^2+1}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2x-1}{x^2+1}\right)^{2x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{-2x-1}}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{-2x-1}}\right)^{\frac{x^2+1}{-2x-1}\cdot\frac{-2x-1}{x^2+1}\cdot2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{-2x-1}}\right)^{\frac{x^2+1}{-2x-1}}\right]^{\frac{-2x-1}{x^2+1}\cdot2x}=$$

* Vizsgáljuk meg külön a kitevő határértékét:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^2-2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=-4.$

$$=e^{-4}=\frac{1}{e^4}.$$

vissza a feladathoz

vissza a feladathoz

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{3x-3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{(3x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{3} = 0.$

j) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2-10x+24}{x^3-4x^2+x+6} \overset{\frac{0}{0}*}{=}$

A „$\frac{0}{0}$” alakból látható, hogy mind a számláló, mind a nevező osztható az $x-2$ kifejezéssel:

$$\begin{array}{rrrr}
x^3 & -3x^2 & -10x & +24 \\
x^3 & -2x^2 & & \\ \hline
 & -x^2 & -10x & +24 \\
 & -x^2 & +2x & \\ \hline
 & & -12x & +24 \\
 & & -12x & +24 \\ \hline
 & & & 0
\end{array} \; : (x-2) = \; x^2 \; -x-12$$

$$\begin{array}{rrrr}
x^3 & -4x^2 & +x & +6 \\
x^3 & -2x^2 & & \\ \hline
 & -2x^2 & +x & +6 \\
 & -2x^2 & +4x & \\ \hline
 & & -3x & +6 \\
 & & -3x & +6 \\ \hline
 & & & 0
\end{array} \; : (x-2) = \; x^2-2x-3$$

A szorzatalakokat visszaírva az eredeti törtbe:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2-10x+24}{x^3-4x^2+x+6} \overset{\frac{0}{0}*}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x^2-x-12)}{(x-2)\cdot(x^2-2x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-12}{x^2-2x-3} = \frac{-10}{-3} = \frac{10}{3}.$$

vissza a feladathoz

k) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{x-2} = \nexists$, hiszen

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2}{x-2} = -\infty \neq \lim_{x\to 2^+} \frac{2}{x-2} = +\infty.$$

vissza a feladathoz

vissza a feladathoz

l) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{(x-2)^2} = +\infty$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos 3x} \cdot \dfrac{\sin 3x}{3x} \cdot \dfrac{1}{\frac{\sin 4x}{4x}} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}.$

vissza a feladathoz

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x} \cdot \dfrac{1+\cos 3x}{1+\cos 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 3x}{x} \cdot \dfrac{1}{1+\cos 3x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos 3x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1} \cdot \frac{3\cdot \overbrace{\sin 3x}^{\to 0}}{1+\cos 3x} = 0.$$

◊

vissza a feladathoz

10. fejezet

Függvények folytonossága, a szakadás típusai. Függvények invertálása

10.1. Gyakorlat

10.1. Feladat. *Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából a következő függvényeket! Ahol nem folytonosak, adjuk meg a szakadás típusát!*

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{ha } x < 2 \\ -x+3 & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$

Megoldás.
Az $f(x)$ függvény két polinom függvény összefűzésével keletkezett, melyek az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak, ezért csak a csatlakozási pontban kell vizsgálni.

$x_0 = 2$

1.) $x_0 \in \mathscr{D}_f$ és x_0 torlódási pont.

2.) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = ?$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} 2x-3 = 1 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} -x+3 = 1 \end{aligned}$$

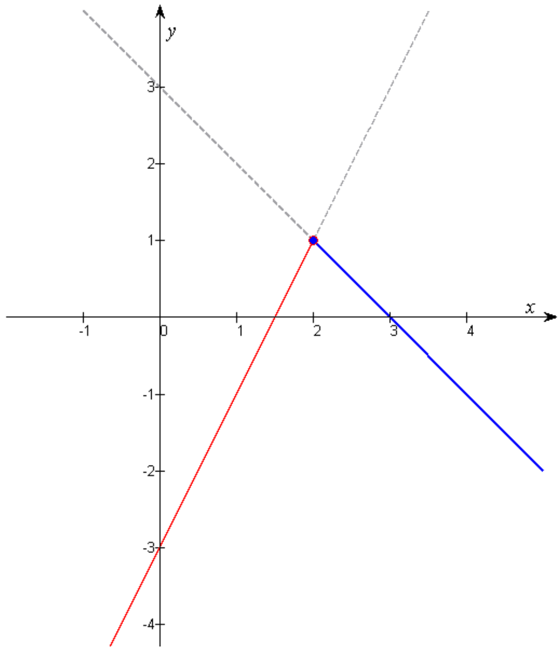
Mivel a jobb és a balodali határérték az $x_0 = 2$ pontban megegyezik, a határérték létezik és

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1 = A.$$

3.) $f(2) = -2+3 = 1 = A$

Az 1.) 2.) 3.) pontok állításából következik, hogy az $f(x)$ függvény folytonos az $x_0 = 2$ pontban. Mivel a többi pontban örökölte a folytonosságot a polinom függvényektől, elmondható, hogy $f(x)$ minden valós helyen (az értelmezési tartományának minden pontjában) folytonos.

Könnyebben el tudjuk képzelni az előbb vizsgált problémát, ha ábrázoljuk a függvényt:



◊

10.1. Megjegyzés. *A függvény ábrázolása nem helyettesíti a részletes folytonosság vizsgálatot! Nem elégséges tehát az ábráról leolvasni a folytonosságot, de az ábra segíthet.*

b) $f(x) = \begin{cases} 3x+4 & \text{ha } x \leq -2 \\ x^2-1 & \text{ha } -2 < x < 1 \\ -2x+2 & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$

Megoldás.
Az f függvény három polinom függvény összefűzésével keletkezett, melyek az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak, ezért csak a csatlakozási pontokban kell vizsgálni.

$x_0 = -2$

1.) $x_0 \in \mathscr{D}_f$ és x_0 torlódási pont.

2.) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = ?$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -2^-} f(x) &= \lim_{x\to -2^-} 3x+4 = -2 \\ \lim_{x\to -2^+} f(x) &= \lim_{x\to -2^+} x^2-1 = 3 \\ \lim_{x\to -2} f(x) &= \nexists \end{aligned}$$

Az egyoldali határértékek léteznek, de nem egyeznek meg, ezért a függvénynek az x_0 helyen ugrása van (elsőfajú szakadás). Az ugrás mértéke:

$$\left| \lim_{x\to -2^-} f(x) - \lim_{x\to -2^+} f(x) \right| = |-2-3| = 5.$$

$x_0 = 1$

1.) $x_0 \in \mathscr{D}_f$ és x_0 torlódási pont.

2.) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = ?$

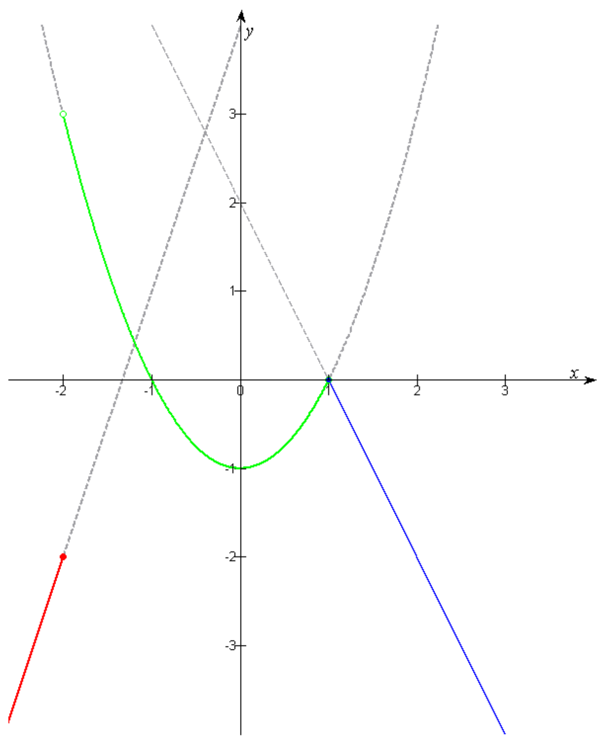
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} x^2 - 1 = 0 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} -2x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Mivel a jobb és a balodali határérték az $x_0 = 1$ pontban megegyezik, a határérték létezik és
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0 = A.$$

3.) $f(1) = -2 \cdot 0 + 2 = 0 = A$

Az 1.) 2.) 3.) pontok állításából következik, hogy az $f(x)$ függvény folytonos az $x_0 = 1$ pontban.

Mivel a többi pontban örökölte a folytonosságot a polinom függvényektől, elmondható, hogy $f(x)$ az $x_0 = -2$ pont kivételével minden valós helyen folytonos.



◊

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} & \text{ha } x \neq -1, x \neq 2 \\ 5 & \text{ha } x = -1 \\ 0 & \text{ha } x = 2 \end{cases}$

Megoldás.
Az f egy racionális törtfüggvény és két pont összekapcsolásával keletkezett, melyek az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak. Ezért elegendő csak a csatlakozási pontokban vizsgálni.

$x_0 = -1$

1.) $x_0 \in \mathscr{D}_f$ és x_0 torlódási pont.

2.)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} f(x) &= \lim_{x\to -1} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to -1} \frac{x+3}{x+1} \overset{\frac{2}{0}}{=} \nexists \\
\lim_{x\to -1^-} \frac{x+3}{x+1} &= -\infty \\
\lim_{x\to -1^+} \frac{x+3}{x+1} &= +\infty
\end{aligned}$$

Mivel $x_0 = -1$-ben az egyoldali határértékek nem végesek, ezért a függvénynek $x_0 = -1$-ben másodfajú szakadása van.

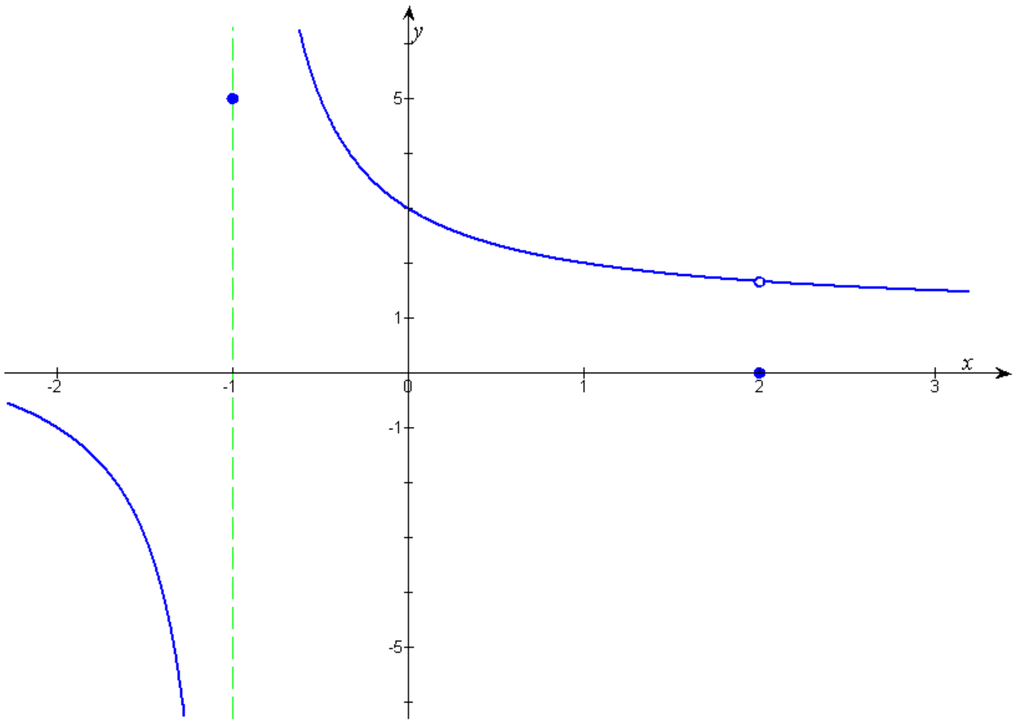
$x_0 = 2$

1.) $x_0 \in \mathscr{D}_f$ és x_0 torlódási pont.

2.)

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3} = A$$

3.) $f(2) = 0 \neq \frac{5}{3} = A$ Mivel $x_0 = 2$-ben létezik a határérték, de nem egyezik meg a helyettesítési értékkel, ezért $x_0 = 2$-ben a függvénynek megszüntethető szakadása van (elsőfajú szakadás).



◊

10.2. Feladat. *Adjuk meg a következő függvények inverzét. Ha a függvény nem invertálható, szűkítsük le egy olyan halmazra, amelyen már létezik inverze. Adjuk meg az eredeti és az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét.*

a) $f(x) = 2\cdot 3^{2x-1}+1$

Megoldás.
$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcll} 3^{\alpha} & > & 0 & \forall\alpha\in\mathbb{R} \\ 3^{2x-1} & > & 0 & \forall x\in\mathbb{R}\ /\cdot 2 \\ 2\cdot 3^{2x-1} & > & 0 & \qquad\quad /+1 \\ 2\cdot 3^{2x-1}+1 & > & 1 & \end{array}$$

Ebből következik, hogy az értékkészlet:

$$\mathscr{R}_f = \{y | y\in\mathbb{R},\ y>1\}.$$

Az f függvény szigorúan monoton növő függvény, így kölcsönösen egyértelmű leképezéssel keletkezett, ezért invertálható.

$$\begin{array}{rcl} y & = & 2\cdot 3^{2x-1}+1 \\ y-1 & = & 2\cdot 3^{2x-1} \\ \dfrac{y-1}{2} & = & 3^{2x-1} \\ \log_3\dfrac{y-1}{2} & = & \log_3 3^{2x-1} = 2x-1 \\ \log_3\dfrac{y-1}{2}+1 & = & 2x \\ \dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{y-1}{2}+\dfrac{1}{2} & = & x = \overline{f}(y) \end{array}$$

Formális betűcsere után kapható a függvény inverze:

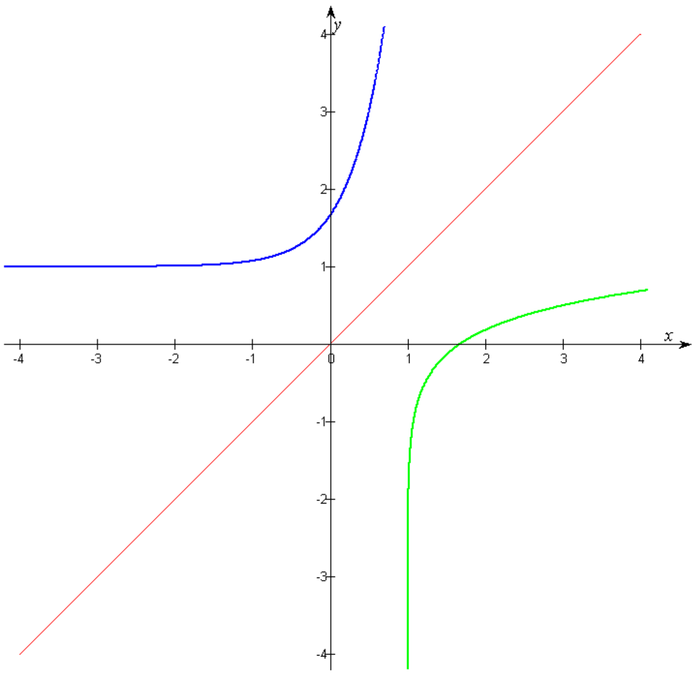
$$\overline{f}(x) = y = \frac{1}{2}\log_3\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2}.$$

Írjuk fel az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x-1}{2} & > & 0 \\ x-1 & > & 0 \\ x & > & 1 \end{array}$$

$\mathscr{D}_{\overline{f}} = \{x | x\in\mathbb{R}, x>1\} = \mathscr{R}_f$
$\mathscr{R}_{\overline{f}} = \mathbb{R} = \mathscr{D}_f$ ♢

10.2. Megjegyzés. *Ábrázoljuk közös koordináta rendszerben az f függvényt és $\overline{f}$ inverzét. Észrevehető, hogy az inverz függvény grafikonja az eredeti függvény grafikonjának $y{=}x$ egyenesre vonatkozó tükörképe. Az alábbi ábrán kék színnel látjuk az f és zölddel az $\overline{f}$ függvényt. Segítségül berajzoltuk az $y=x$ egyenest is (pirossal).*



b) $f(x) = 27x^2 - 36x + 10$

Megoldás.
Mivel f egy polinom, ezért $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. Az érték készlet és az invertálhatóság vizsgálatához alakítsuk a másodfokú kifejezést teljes-négyzetté:

$$\begin{aligned} f(x) &= 27x^2 - 36x + 10 = \left(\sqrt{27}x - \frac{18}{\sqrt{27}}\right)^2 - 12 + 10 = \left(\sqrt{3}\cdot 3x - \frac{18}{\sqrt{3}\cdot 3}\right)^2 - 2 = \\ &= \left(\sqrt{3}\cdot 3x - \frac{18}{9}\sqrt{3}\right)^2 - 2 = (\sqrt{3})^2(3x-2)^2 - 2 = 3\cdot(3x-2)^2 - 2 \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \alpha^2 &\geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ (3x-2)^2 &\geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \ / \cdot 3 \\ 3\cdot(3x-2)^2 &\geq 0 \qquad\qquad / -2 \\ 3\cdot(3x-2)^2 - 2 &\geq -2 \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy az értékkészlet:

$$\mathscr{R}_f = \{y | y \in \mathbb{R},\ y \geq -2\}.$$

Az f függvény a $g(x) = x^2$ függvény lineáris transzformációjával keletkezett. Mivel g páros függvény, ezért f több-egyértelmű leképezéssel keletkezett, így a teljes értelmezési tartományán nem invertálható.

10.3. Megjegyzés. *A fenti eszmefuttatás helyett elegendő lenne mutatni két olyan értelmezési tartománybeli elemet* $(x_1,\ x_2)$, *ahol a függvény ugyazt az értéket veszi fel.* $(f(x_1) = f(x_2))$. *Például most* $x_1 = 0$ *és* $x_2 = \frac{4}{3}$, *mert ekkor* $f(x_1) = 3\cdot(3\cdot 0 - 2)^2 - 2 = 10 = 3\cdot(3\cdot\frac{4}{3} - 2)^2 - 2$. *Ekkor azonban nehezebben látható, hogy milyen szűkített értelmezési tartományt érdemes választani.*

Le kell szűkíteni az értelmezési tartományt. A függvény grafikonja egy parabola, melynek talppontja az $x_0 = \frac{2}{3}$ helyen van. A leszűkített értelmezési tartomány tehát vagy $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ vagy $\left[\frac{2}{3}, \infty\right)$.

Legyen $\mathscr{D}_{fsz} = \{x | x \in \mathbb{R},\ x \le \frac{2}{3}\}$, ekkor

$\mathscr{R}_{fsz} = \mathscr{R}_f$.

Az f függvény a $\mathscr{D}_{fsz}$ halmazon szigorúan monoton csökkenő, így kölcsönösen egyértelmű. Ezen a halmazon már invertálható.

10.4. Megjegyzés. *Igyekszünk olyan új értelmezési tartományt választani, melyen a függvény kölcsönösen egyértelmű és felveszi a teljes értékkészletét.*

Most már elvégezhető az invertálás:

$$\begin{aligned} y &= 3\cdot(3x-2)^2 - 2 \\ \frac{y+2}{3} &= (3x-2)^2 \\ \pm\sqrt{\frac{y+2}{3}} &= 3x-2 \end{aligned}$$

Mivel minden $x \in \mathscr{D}_{fsz}$ elem esetén $3x-2$ negatív, ezért a fenti több-értelmű leképezés negatív ágát választjuk:

$$\begin{aligned} -\sqrt{\frac{y+2}{3}} &= 3x-2 \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{y+2}{3}} &= x = \overline{f}(y) \end{aligned}$$

Formális betűcsere után kapható a függvény inverze:

$$\overline{f}(x) = y = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{x+2}{3}}$$

Az inverz függvény értelmezés tartománya és értékkészlet meghatározható önálló feladatként is, vagy származtathatók a

$$\mathscr{D}_{\overline{f}} = \mathscr{R}_{fsz} \quad \mathscr{R}_{\overline{f}} = \mathscr{D}_{fsz}$$

összefüggések alapján:

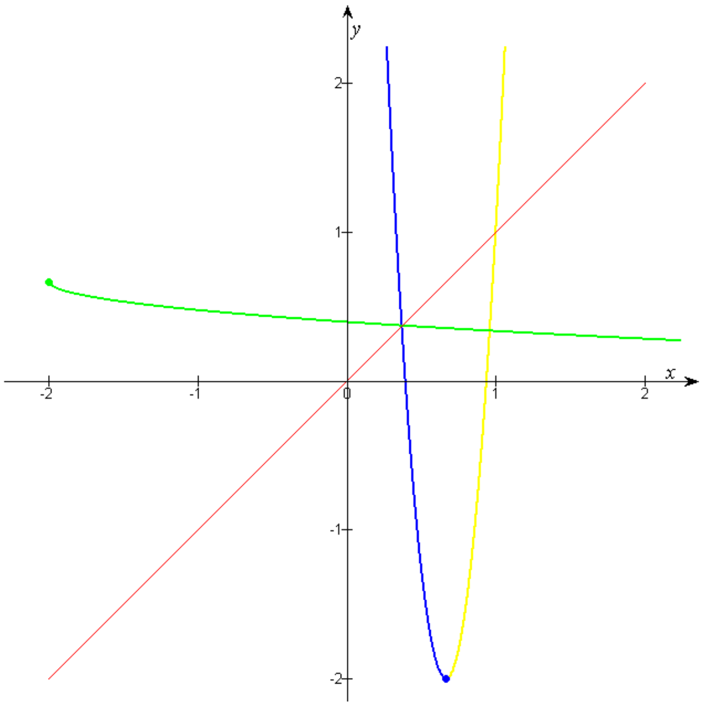
$$\begin{aligned} \frac{x+2}{3} &\ge 0 \\ x &\ge -2 \end{aligned}$$

$\mathscr{D}_{\overline{f}} = \{x | x \in \mathbb{R} x \ge -2\} = \mathscr{R}_{fsz}$

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha} &\ge 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \\ \sqrt{\frac{x+2}{3}} &\ge 0 \\ -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{x+2}{3}} &\le 0 \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{x+2}{3}} &\le \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

$\mathscr{R}_{\overline{f}} = \{y | y \in \mathbb{R},\ y \le \dfrac{2}{3}\} = \mathscr{D}_{fsz}$. ♢

10.5. Megjegyzés. *Ábrázoljuk közös koordináta rendszerben az f függvényt és $\overline{f}$ inverzét. Az alábbi ábrán kék színnel látjuk az f azon ágát, melyen az inverziót végrehajtottuk ($x \leq \frac{2}{3}$) és sárgával az ($x > \frac{2}{3}$) ágat, zölddel rajzoltuk az $\overline{f}$ függvényt és segítségül berajzoltuk az $y = x$ egyenest is (pirossal).*



c) $f(x) = 2\cos(\pi x + \dfrac{\pi}{4}) - 1$

Megoldás.
Mivel az f a $\cos x$ függvény lineáris transzformáltja, ezért minden valós helyen értelmezett, így $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. Az értékkészlet meghatározásakor a cos függvény ismert korlátaiból indulhatunk ki:

$$\begin{array}{rcll}
-1 \leq & \cos\alpha & \leq 1 & \forall \alpha \in \mathbb{R} \\
-1 \leq & \cos(\pi x + \frac{\pi}{4}) & \leq 1 & \forall x \in \mathbb{R} \ / \cdot 2 \\
-2 \leq & 2\cos(\pi x + \frac{\pi}{4}) & \leq 2 & \qquad\quad / -1 \\
-3 \leq & 2\cos(\pi x + \frac{\pi}{4}) - 1 & \leq 1. &
\end{array}$$

Ebből következik, hogy az értékkészlet:

$$\mathscr{R}_f = \{y | y \in \mathbb{R}, \ -3 \leq y \leq 1\}.$$

Az f függvény periodikus függvény, ezért több-egyértelmű leképezéssel keletkezett, így a teljes értelmezési tartományán nem invertálható.

A $\cos\alpha$ függvényt a $0 \le \alpha \le \pi$ feltétel mellett szűkítjük le:

$$\begin{array}{rcl} 0 \le & \pi x + \frac{\pi}{4} & \le \pi \\ -\dfrac{\pi}{4} \le & \pi x & \le \dfrac{3\pi}{4} \\ -\dfrac{1}{4} \le & x & \le \dfrac{3}{4} \end{array}$$

Legyen tehát $\mathscr{D}_{fsz} = \{x | x \in \mathbb{R},\ -\frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}\}$. Ezen az intervallumon az f függvény szigorúan monoton csökkenő és az eredeti értékkészletének minden elemét felveszi: $\mathscr{R}_{fsz} = \mathscr{R}_f$.

Mivel a $\mathscr{D}_{fsz}$ halmazon f kölcsönösen egyértelmű, ezért itt már invertálható:

$$\begin{array}{rcl} y & = & 2\cos(\pi x + \dfrac{\pi}{4}) - 1 \\ \dfrac{y+1}{2} & = & \cos(\pi x + \dfrac{\pi}{4}) \\ \arccos(\dfrac{y+1}{2}) & = & \arccos(\cos(\pi x + \dfrac{\pi}{4})) \end{array}$$

Könnyen látható, hogy minden $x \in \mathscr{D}_{fsz}$ elem esetén $\arccos(\cos(\pi x + \frac{\pi}{4})) = \pi x + \frac{\pi}{4}$, így

$$\begin{array}{rcl} \arccos(\dfrac{y+1}{2}) & = & \pi x + \dfrac{\pi}{4} \\ \arccos(\dfrac{y+1}{2}) - \dfrac{\pi}{4} & = & \pi x \\ \dfrac{1}{\pi}\arccos(\dfrac{y+1}{2}) - \dfrac{1}{4} & = & x = \overline{f}(y) \end{array}$$

Formális betűcsere után megkapható a függvény inverze:

$$\overline{f}(x) = y = \frac{1}{\pi}\arccos(\frac{x+1}{2}) - \frac{1}{4}.$$

Határozzuk meg $\overline{f}$ értelmezési tartományát:

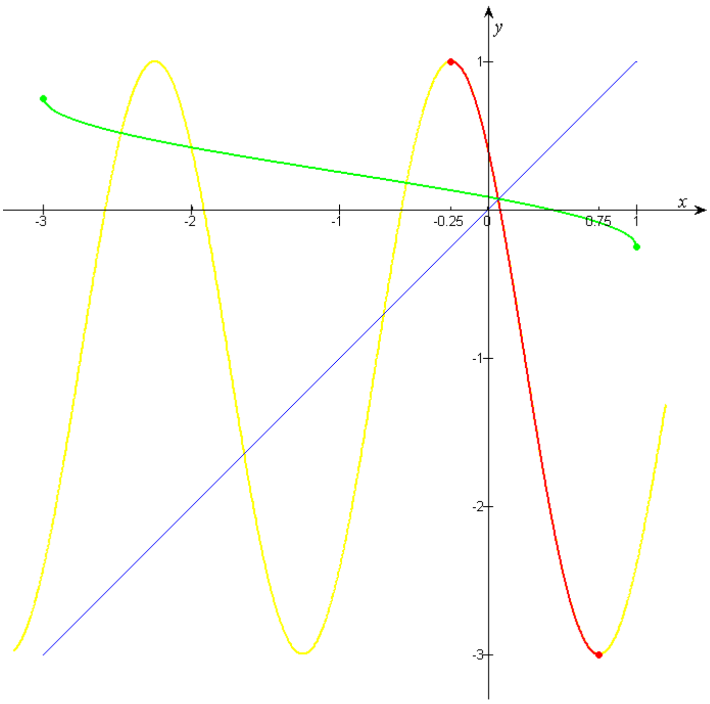
$$\begin{array}{rcl} -1 \le & \frac{x+1}{2} & \le 1 \\ -2 \le & x+1 & \le 2 \\ -3 \le & x & \le 1 \end{array} \qquad \mathscr{D}_{\overline{f}} = \{x | x \in \mathbb{R} - 3 \le x \le 1\} = \mathscr{R}_{fsz}$$

és értékkészletét:

$$\begin{array}{rcl} 0 \le & \arccos\alpha & \le \pi \\ 0 \le & \arccos\frac{x+1}{2} & \le \pi \\ 0 \le & \frac{1}{\pi}\arccos\frac{x+1}{2} & \le 1 \\ -\dfrac{1}{4} \le & \frac{1}{\pi}\arccos\frac{x+1}{2} - \frac{1}{4} & \le \dfrac{3}{4} \end{array} \qquad \mathscr{R}_{\overline{f}} = \left\{ y | y \in \mathbb{R} - \frac{1}{4} \le y \le \frac{3}{4} \right\} = \mathscr{D}_{fsz}.$$

◊

10.6. Megjegyzés. *Ábrázoljuk közös koordináta rendszerben az f függvényt és $\overline{f}$ inverzét. Az alábbi ábrán sárga színnel látjuk az f függvényt és pirossal kiemeltük azt a darabot, melyen az inverziót végrehajtottuk ($-\frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}$), zölddel rajzoltuk az $\overline{f}$ függvényt és segítségül berajzoltuk az $y = x$ egyenest is (kékkel).*



10.7. Megjegyzés. *Az alábbi táblázatban összefoglaljuk, hogy a trigonometrikus függvényeket melyik intervallumra érdemes leszűkíteni:*

$\sin\alpha$	$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$	$\mathrm{tg}\ \alpha$	$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	$0 \leq \alpha \leq \pi$	$\mathrm{ctg}\ \alpha$	$0 < \alpha < \pi.$

10.2. Házi Feladatok

10.1. Házi Feladat. *Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából a következő függvényeket! Ahol nem folytonosak, adjuk meg a szakadás típusát!*

a) $f(x) = \begin{cases} -3x+1, & ha\ x < -1 \\ -x^2-1, & ha\ -1 \le x < 1 \\ \ \ 3x-5, & ha\ 1 \le x \end{cases}$

megoldás

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-6x+4}{(x-1)(x+1)(x-2)}, & ha\ x \ne \pm 1,\ x \ne 2 \\ \ \ 1, & ha\ x = \pm 1 \\ -1, & ha\ x = 2 \end{cases}$

megoldás

c) $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & ha\ x \le -1 \\ \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}, & ha\ -1 < x,\ x \ne 1 \\ 2, & ha\ x = 1 \end{cases}$

megoldás

10.2. Házi Feladat. *Adjuk meg a következő függvények inverzét. Ha a függvény nem invertálható, szűkítsük le egy olyan halmazra, amelyen már létezik inverze. Adjuk meg az eredeti és az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. A függvényábrázolás gyakorlására ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a függvényt és inverzét.*

a) $f(x) = \frac{1}{3}\log_2(-x+3)+1$

megoldás

b) $f(x) = \frac{1}{2}\arcsin(2x+1) - \frac{\pi}{2}$

megoldás

c) $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}x-2\right)^3 - 1$

megoldás

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2+2x+5$

megoldás

e) $f(x) = 2\mathrm{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1$

megoldás

f) $f(x) = -3\sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)+2$

megoldás

10.3. Megoldások

10.1. Házi Feladat. *Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából a következő függvényeket! Ahol nem folytonosak, adjuk meg a szakadás típusát!*

a) $f(x) = \begin{cases} -3x+1, & \text{ha } x < -1 \\ -x^2-1, & \text{ha } -1 \leq x < 1 \\ 3x-5, & \text{ha } 1 \leq x \end{cases}$

Megoldás.
Az f függvény három polinom függvény összefűzésével keletkezett, melyek az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak, ezért csak a csatlakozási pontokban kell vizsgálni.

$x_0 = -1$

1.) $x_0 \in \mathscr{D}_f$ és x_0 torlódási pont.

2.) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = ?$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} -3x+1 = 4 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^+} -x^2-1 = 0 \\ \lim_{x \to -1} f(x) &= \nexists \end{aligned}$$

Az egyoldali határértékek léteznek, de nem egyeznek meg, ezért a függvénynek az x_0 helyen ugrása van (elsőfajú szakadás). Az ugrás mértéke:

$$\left| \lim_{x \to -1^-} f(x) - \lim_{x \to -1^+} f(x) \right| = |4-0| = 4.$$

$x_0 = 1$

1.) $x_0 \in \mathscr{D}_f$ és x_0 torlódási pont.

2.) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = ?$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} -x^2-1 = 0 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^+} = 3x-5 = -2 \\ \lim_{x \to -1} f(x) &= \nexists \end{aligned}$$

Az egyoldali határértékek léteznek, de nem egyeznek meg, ezért a függvénynek az x_0 helyen ugrása van (elsőfajú szakadás). Az ugrás mértéke:

$$\left| \lim_{x \to 1^-} f(x) - \lim_{x \to 1^+} f(x) \right| = |0-(-2)| = 2.$$

Mivel a többi pontban örökölte a folytonosságot a polinom függvényektől, elmondható, hogy f az $x_0 = \pm 1$ pontok kivételével minden valós helyen folytonos. $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

b) $f(x)=\begin{cases} \frac{2x^2-6x+4}{(x-1)(x+1)(x-2)}, & \text{ha } x\neq\pm1,\ x\neq 2\\ 1, & \text{ha } x=\pm1\\ -1, & \text{ha } x=2\end{cases}$

Megoldás.
Az f egy racionális törtfüggvény és három pont összekapcsolásával keletkezett, melyek az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak. Ezért elegendő csak a csatlakozási pontokban vizsgálni.

$x_0=-1$

1.) $x_0\in\mathscr{D}_f$ és x_0 torlódási pont.

2.)
$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-6x+4}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to-1}\frac{2(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to-1}\frac{2}{x+1}\overset{\frac{2}{0}}{=}\nexists$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1^-}\frac{2}{x+1}&=+\infty\\ \lim_{x\to-1^+}\frac{2}{x+1}&=-\infty\end{aligned}$$

Mivel $x_0=-1$-ben az egyoldali határértékek nem végesek, ezért a függvénynek itt másodfajú szakadása van.

$x_0=1$

1.) $x_0\in\mathscr{D}_f$ és x_0 torlódási pont.

2.)
$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{2x^2-6x+4}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{2}{x+1}=1=A$$

3.) $f(1)=1=A$

Az 1.) 2.) 3.) pontok állításából következik, hogy az $f(x)$ függvény folytonos az $x_0=1$ pontban.

$x_0=2$

1.) $x_0\in\mathscr{D}_f$ és x_0 torlódási pont.

2.)

$$\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\frac{2x^2-6x+4}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{2(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{2}{x+1}=\frac{2}{3}=A$$

3.) $f(2)=-1\neq\frac{2}{3}=A$ Mivel $x_0=2$-ben létezik a határérték, de nem egyezik meg a helyettesítési értékkel, ezért $x_0=2$-ben a függvénynek megszüntethető szakadása van (elsőfajú szakadás).

Az f függvény tehát az $x_0=-1$ és az $x_0=2$ pontok kivételével mindenhol folytonos. ♢

vissza a feladathoz

c) $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{ha } x \leq -1 \\ \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}, & \text{ha } -1 < x,\ x \neq 1 \\ 2, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$

Megoldás.
Az f egy racionális törtfüggvény, egy polinom és egy pont összekapcsolásával keletkezett, melyek az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak. Ezért elegendő csak a csatlakozási pontokban vizsgálni.

$x_0 = -1$

1.) $x_0 \in \mathscr{D}_f$ és x_0 torlódási pont.

2.) $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = ?$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-1^-} f(x) &= \lim_{x\to-1^-} 2x-3 = -5 \\
\lim_{x\to-1^+} f(x) &= \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to-1^+} \frac{(x+3)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} = \lim_{x\to-1^+} \frac{x+3}{x+1} \overset{\frac{2}{0^+}}{=} \infty \\
\lim_{x\to-1} f(x) &= \nexists
\end{aligned}$$

Mivel x_0-ban a jobboldali határérték nem véges, ezért itt a függvénynek másodfajú szakadása van

$x_0 = 1$

1.) $x_0 \in \mathscr{D}_f$ és x_0 torlódási pont.

2.) $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{(x+3)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} = \dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{4}{2} = 2 = A$

3.) $f(1) = 2 = A$

Az 1.) 2.) 3.) pontok állításából következik, hogy az $f(x)$ függvény folytonos az $x_0 = 2$ pontban.
◊

vissza a feladathoz

10.2. Házi Feladat. *Adjuk meg a következő függvények inverzét. Ha a függvény nem invertálható, szűkítsük le egy olyan halmazra, amelyen már létezik inverze. Adjuk meg az eredeti és az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. A függvényábrázolás gyakorlására ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a függvényt és inverzét.*

a) $f(x) = \dfrac{1}{3}\log_2(-x+3)+1$

Megoldás.
Értelmezési tartomány meghatározása:

$$\begin{aligned} -x+3 &> 0 \\ 3 &> x \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R} |\ x < 3\}$$

Mivel f a $\log_2 x$ függvény lineáris transzformáltja, ezért minden valós értéket felvesz, azaz $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$.

Mivel f szigorúan monoton csökkenő (vagy mert a $\log_2 x$ függvény lineáris transzformáltja), ezért kölcsönösen egyértelmű leképezéssel keletkezett, így a teljes értelmezési tartományon invertálható:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}\log_2(-x+3)+1 \\ 3(y-1) &= \log_2(-x+3) \\ 2^{3(y-1)} &= -x+3 \\ -2^{3(y-1)}+3 &= x = \overline{f}(y) \end{aligned}$$

Formális betűcsere után kapható a függvény inverze:

$$\overline{f}(x) = y = -2^{3(x-1)}+3.$$

Az inverz függvény értelmezési tartománya és értékkészlete:

$$\mathscr{D}_{\overline{f}} = \mathscr{R}_f = \mathbb{R}, \qquad \mathscr{R}_{\overline{f}} = \mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R} |\ x < 3\} \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

b) $f(x) = \frac{1}{2}\arcsin(2x+1) - \frac{\pi}{2}$

Megoldás.
Értelmezési tartomány meghatározása:

$$\begin{array}{rcccl} -1 & \leq & 2x+1 & \leq & 1 \\ -2 & \leq & 2x & \leq & 0 \\ -1 & \leq & x & \leq & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \mathscr{D}_f = [-1,\ 0]$$

Értékkészlet meghatározása:

$$\begin{array}{rcccl} -\frac{\pi}{2} & \leq & \arcsin\alpha & \leq & \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & \leq & \arcsin(-x+3) & \leq & \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{4} & \leq & \frac{1}{2}\arcsin(-x+3) & \leq & \frac{\pi}{4} \\ -\frac{3}{4}\pi & \leq & \frac{1}{2}\arcsin(-x+3)-\frac{\pi}{2} & \leq & -\frac{\pi}{4} \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{R}_f = \left[-\frac{3}{4}\pi,\ -\frac{\pi}{4}\right]$$

Mivel f szigorúan monoton növő, ezért kölcsönösen egyértelmű leképezéssel keletkezett, így a teljes értelmezési tartományon invertálható:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\arcsin(2x+1) - \frac{\pi}{2} \\ 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right) &= \arcsin(2x+1) \\ \sin(2y+\pi) &= 2x+1 \\ \frac{1}{2}\sin(2y+\pi)-1 &= x = \overline{f}(y) \end{aligned}$$

Formális betűcsere után kapható a függvény inverze:

$$\overline{f}(x) = y = \frac{1}{2}\sin(2x+\pi)-1.$$

Az inverz függvény értelmezési tartománya és értékkészlete:

vissza a feladathoz

$$\mathscr{D}_{\overline{f}} = \mathscr{R}_f = \left[-\tfrac{3}{4}\pi,\ -\tfrac{\pi}{4}\right], \qquad \mathscr{R}_{\overline{f}} = \mathscr{D}_f = [-1,\ 0] \qquad \diamondsuit$$

c) $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3 - 1$

Megoldás.
Mivel f egy polinom függvény, ezért minden valós helyen értelmezett és mivel az x^3 függvény lineáris transzformációjával származtatható, ezért minden valós értéket fel is vesz, így

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}, \quad \mathscr{R}_f = \mathbb{R}.$$

Mivel f szigorúan monoton növő (vagy mert az $\arcsin x$ függvény lineáris transzformáltja), ezért kölcsönösen egyértelmű leképezéssel keletkezett, így a teljes értelmezési tartományon invertálható:

$$\begin{aligned} y &= 3\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3 - 1 \\ \frac{1}{3}(y+1) &= \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3 \\ \sqrt[3]{\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}} &= \frac{1}{2}x - 2 \\ 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}} + 4 &= x = \overline{f}(y) \end{aligned}$$

Formális betűcsere után kapható a függvény inverze:

$$\overline{f}(x) = y = 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}} + 4.$$

◊

Az inverz függvény értelmezési tartománya és értékkészlete:

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_{\overline{f}} &= \mathscr{R}_f = \mathbb{R} \\ \mathscr{R}_{\overline{f}} &= \mathscr{D}_f = \mathbb{R} \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

Megoldás.
Mivel f egy polinom függvény, ezért minden valós helyen értelmezett, így $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

Az értékkészlet leolvasásához érdemes a kifejezést teljes négyzetté alakítani:

$$\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) + 3 = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$$

Mivel $\alpha^2 \geq 0$, ezért $\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3 \geq 3$, így $\mathscr{R}_f = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}$.

A függvény több-egyértelmű leképezéssel keletkezett, így a teljes értelmezési tartományán nem invertálható. Mivel a függvény grafikonja egy parabola, melynek talppontja $x_0 = -2$-ben van, ezért a függvényt a $(-\infty, -2]$ vagy a $[-2, \infty)$ intervallumra érdemes szűkíteni. Most válasszuk ez utóbbit:

$$\mathscr{D}_{f_{sz}} = \{x | x \in \mathbb{R},\ x \geq -2\}, \quad \text{és ekkor} \quad \mathscr{R}_{f_{sz}} = \mathscr{R}_f = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}.$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x+2)^2+3 \\ 2(y-3) &= (x+2)^2 \\ \pm\sqrt{2y-6} &= x+2 \end{aligned}$$

Mivel minden $x \in \mathscr{D}_{fsz}$ elem esetén $x+2$ pozitív, ezért a fenti több-értelmű leképezés pozitív ágát választjuk:

$$\sqrt{2y-6}-2 = x = \overline{f}(y)$$

Formális betűcsere után kapható a függvény inverze:

$$\overline{f}(x) = y = \sqrt{2x-6}-2. \qquad \diamondsuit$$

Az inverz függvény értelmezési tartománya és értékkészlete:

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_{\overline{f}} &= \mathscr{R}_{fsz} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\} \\ \mathscr{R}_{\overline{f}} &= \mathscr{D}_{fsz} = \{x | x \in \mathbb{R},\ x \geq -2\} \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

e) $f(x) = 2\mathrm{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1$

Megoldás.

Értelmezési tartomány meghatározásakor induljunk ki abból, hogy ctgα kifejezés argumentumára $\alpha \neq k\cdot\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} 2x-\tfrac{\pi}{3} &\neq k\cdot\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ 2x &\neq \tfrac{\pi}{3}+k\cdot\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ x &\neq \tfrac{\pi}{6}+k\cdot\tfrac{\pi}{2} \quad (k\in\mathbb{Z}) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{R} |\ x = \frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\}$$

Mivel f a ctg függvény lineáris transzformációjával kapható, ezért minden való értéket felvesz, azaz $\mathscr{R}_f = \mathbb{R}$.

Mivel a függvény periodikus, ezért több-egyértelmű leképezéssel keletkezett, így a teljes értelmezési tartományán nem invertálható.

A ctgα függvényt a $0<\alpha<\pi$ feltétel mellett szűkítjük le:

$$\begin{aligned} 0 < \ & 2x-\tfrac{\pi}{3} < \pi \\ \frac{\pi}{3} \leq \ & 2x \leq \frac{4}{3}\pi \\ \frac{\pi}{6} \leq \ & x \leq \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

Legyen tehát $\mathscr{D}_{fsz} = \left(\frac{\pi}{6},\ \frac{2}{3}\pi\right)$.

Ezen az intervallumon az f függvény szigorúan monoton csökkenő és az eredeti értékkészletének minden elemét felveszi: $\mathscr{R}_{fsz} = \mathscr{R}_f = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y &= 2\mathrm{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1 \\ \frac{y+1}{2} &= \mathrm{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \\ \mathrm{arcctg}\frac{y+1}{2} &= 2x-\frac{\pi}{3} \\ \frac{1}{2}\mathrm{arcctg}\frac{y+1}{2}+\frac{\pi}{6} &= x\overline{f}(y) \end{aligned}$$

Formális betűcsere után kapható a függvény inverze:

$$\overline{f}(x) = y = \frac{1}{2}\text{arcctg}\frac{x+1}{2} + \frac{\pi}{6}. \qquad \diamondsuit$$

Az inverz függvény értelmezési tartománya és értékkészlete:

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_{\overline{f}} &= \mathscr{R}_{fsz} = \mathbb{R} \\ \mathscr{R}_{\overline{f}} &= \mathscr{D}_{fsz} = \left(\frac{\pi}{6},\ \frac{2}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

f) $f(x) = -3\sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$

Megoldás.
Mivel az f a $\sin x$ függvény lineáris transzformáltja, ezért minden valós helyen értelmezett, így $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. Az értékkészlet meghatározásakor a sin függvény ismert korlátaiból indulhatunk ki:

$$\begin{array}{rcll} -1 \le & \sin\alpha & \le 1 & \forall\alpha\in\mathbb{R} \\ -1 \le & \sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right) & \le 1 & \forall x\in\mathbb{R} \\ 3 \ge & -3\sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right) & \ge -3 & \\ 5 \ge & -3\sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)+2 & \ge -1. & \end{array}$$

Ebből következik, hogy az értékkészlet:

$$\mathscr{R}_f = \{y | y \in \mathbb{R},\ -1 \le y \le 5\}.$$

Az f függvény periodikus függvény, ezért több-egyértelmű leképezéssel keletkezett, így a teljes értelmezési tartományán nem invertálható.

A $\sin\alpha$ függvényt a $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ feltétel mellett szűkítjük le:

$$\begin{array}{rcl} -\dfrac{\pi}{2} \le & -x+\frac{\pi}{4} & \le \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{3}{4}\pi \le & -x & \le \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{3}{4}\pi \ge & x & \ge -\dfrac{\pi}{4} \end{array}$$

Legyen tehát $\mathscr{D}_{fsz} = \left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\right)$.

Ezen az intervallumon az f függvény szigorúan monoton növő és az eredeti értékkészletének minden elemét felveszi: $\mathscr{R}_{fsz} = \mathscr{R}_f = (-1,\ 5)$.

Mivel a $\mathscr{D}_{fsz}$ halmazon f kölcsönösen egyértelmű, ezért itt már invertálható:

$$\begin{aligned} y &= -3\sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)+2 \\ \frac{y-2}{-3} &= \sin(-x+\frac{\pi}{4}) \\ \arcsin\left(\frac{2-y}{3}\right) &= -x+\frac{\pi}{4} \\ -\arcsin\left(\frac{2-y}{3}\right)+\frac{\pi}{4} &= x = \overline{f}(y) \end{aligned}$$

Formális betűcsere után megkapható a függvény inverze:

$$\overline{f}(x) = y = -\arcsin\left(\frac{2-x}{3}\right) + \frac{\pi}{4}.$$

$\diamondsuit$

Az inverz függvény értelmezési tartománya és értékkészlete:

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_{\overline{f}} &= \mathscr{R}_{fsz} = (-1,\ 5) \\ \mathscr{R}_{\overline{f}} &= \mathscr{D}_{fsz} = \left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\right) \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

Második rész

Analízis II.

11. fejezet

Differenciálszámítás

11.1. Gyakorlat

11.1. Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az f függvény differenciálható az $x_0 \in \mathcal{D}_f$ belső-pontban, ha létezik a*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*határérték. A fenti határértéket az f függvény x_0 pontbeli **differenciálhányados**ának nevezzük és $f'(x_0)$-lal jelöljük.*

11.2. Megjegyzés. *A fenti definícióval ekvivalens az alábbi írásmód és sokszor könnyebben alkalmazható:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

11.1. Feladat. *Definíció alapján határozzuk meg a következő függvények differenciálhányadosát a megadott pontokban!*

a) $f(x) = x^2, \quad x_0 = 2,\ -3,\ a$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \to 2} x + 2 = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \to -3} \frac{x^2 - (-3)^2}{x + 3} = \\ &= \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)(x+3)}{x + 3} = \lim_{x \to -3} x - 3 = -6. \end{aligned}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x - a} = \lim_{x \to a} x + a = 2a$$

11.3. Megjegyzés. *Látható, hogy a fenti megoldások során rendre ugyanazokat a lépéseket végeztük el. A feladat tehát megoldható lenne úgy is, hogy a határértéket először valamely általános a pontban írjuk fel, majd a kérdéses pontokat behelyettesítjük.*

b) $f(x) = \sqrt{3x+1}, \quad x_0 = 5,\ 0,\ a\left(> -\frac{1}{3}\right)$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x_0+1}}{x-x_0} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x_0+1}}{x-x_0} \cdot \frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x_0+1}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x_0+1}} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{3x+1-(3x_0+1)}{(x-x_0)\cdot(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x_0+1})} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{3(x-x_0)}{(x-x_0)\cdot(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x_0+1})} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{3}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x_0+1}} = \frac{3}{2\cdot\sqrt{3x_0+1}}. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} f'(5) &= \frac{3}{2\cdot\sqrt{3\cdot 5+1}} = \frac{3}{8}, \\ f'(0) &= \frac{3}{2\cdot\sqrt{3\cdot 0+1}} = \frac{3}{2}, \\ f'(a) &= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3\cdot a+1}}, \quad a > -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

11.4. Megjegyzés. *Jól látható, hogy az f függvénynek az $x_0 = -\frac{1}{3}$ pontban nem létezik a jobboldali deriváltja sem, hiszen*

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}^+} \frac{3}{\sqrt{3x+1}+\underbrace{\sqrt{3\cdot(-\frac{1}{3})+1}}_{=0}} \stackrel{\frac{3}{0^+}}{=} +\infty.$$

11.2. Feladat. *Adjuk meg az alábbi elemi függvények deriváltját a definíció alapján*

a) $f(x) = C$, ahol $C \in \mathbb{R}$.

Megoldás.
$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{C-C}{x-x_0} = 0.$
Azaz $f'(x_0) = 0$, minden $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén. ♢

b) $f(x) = x$.

Megoldás.
$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x-x_0}{x-x_0} = 1.$
Azaz $f'(x_0) = 1$, minden $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén. ♢

c) $f(x) = x^n$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x_0+\dots+x\cdot x_0^{n-2}+x_0^{n-1})}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x_0+\dots+x\cdot x_0^{n-2}+x_0^{n-1} = n\cdot x_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Azaz $f'(x_0) = n\cdot x_0^{n-1}$, minden $x_0 \in \mathbb{R}$ $\diamondsuit$

d) $f(x) = \sin x$

Megoldás.
$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \ominus$
Felhasználjuk a

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

addíciós összefüggést, valamint a $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$ nevezetes határértéket:

$$\ominus \lim_{x\to x_0} \frac{2\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\sin\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\underbrace{\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}}_{\to 1} = \lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2} = \cos\frac{x_0+x_0}{2} = \cos x_0.$$

Azaz $f'(x_0) = \cos x_0$ minden $x_0 \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ esetén. $\diamondsuit$

e) $f(x) = \ln x$, ahol $x \in \mathbb{R}_+$.

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x_0+\Delta x)-\ln x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\frac{x_0+\Delta x}{x_0} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x_0}\cdot\frac{x_0}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x_0}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{\Delta x}}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}} = \\ &= \frac{1}{x_0}\cdot\ln\left(\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{\Delta x}}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}}}_{*=e}\right) = \frac{1}{x_0}. \end{aligned}$$

* Ha $x_0 > 0$ és $\Delta x > 0$, akkor $\frac{x_0}{\Delta x} \to \infty$, így $\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{\Delta x}}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}} \to e$,
ha $x_0 > 0$ és $\Delta x < 0$, akkor $\frac{x_0}{\Delta x} \to -\infty$, így $\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{\Delta x}}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}} \to e$.

Azaz $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$ minden $x_0 \in \mathcal{D}_f$ esetén. $\diamondsuit$

11.1.1. Műveleti szabályok

11.5. Tétel. *Legyen* $f, g : H \to \mathbb{R}$, *H nyílt és* $f, g \in \mathcal{D}_H$

i) $C \cdot f \in \mathcal{D}_H$, *ha* $C \in \mathbb{R}$ *és* $(C \cdot f)' = C \cdot f'$,

ii) $f \pm g \in \mathcal{D}_H$ *és* $(f \pm g)' = f' \pm g'$,

iii) $f \cdot g \in \mathcal{D}_H$ *és* $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$,

iv) $\frac{f}{g} \in \mathcal{D}_H$, *ha* $g \neq 0$ *és* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$,

11.6. Tétel. *Legyen* $g : H \to K$ *és* $f : K \to \mathbb{R}$, H, K *nyílt és* $g \in \mathcal{D}_H$, $f \in \mathcal{D}_K$, *ekkor* $f \circ g \in \mathbb{D}_H$ *és*

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

11.7. Tétel. *Legyen* $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *szigorúan monoton, így invertálható függvény. Ha* $f \in \mathcal{D}_{x_0}$ $x_0 \in (\alpha, \beta)$*és* $f'(x_0) \neq 0$, *akkor* $\overline{f} \in \mathcal{D}_{y_0}$, *ahol* $y_0 = f(x_0)$ *és*

$$\overline{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(\overline{f}(y_0)\right)}.$$

11.8. Következmény. *A fenti műveleti szabályok, a konstans-függvény és az* x^n*-függvény deriválhatósága alapján nyilvánvaló, hogy a polinom-függvények illetve a racionális törtfüggvények a teljes értelmezési tartományukon differenciálhatók.*

11.3. Feladat. *Hol differenciálhatók az alábbi függvények?*

a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & x \leq 0 \\ x^3 + x^2 - 1 & x > 0. \end{cases}$

Megoldás.
A függvény két polinom-függvény összeragasztásával keletkezett, melyek a teljes értelmezési tartományukon differenciálhatók, ezért elegendő a csatlakozási pontban vizsgálni.

I.) A csatlakozási pontban ($x_0 = 0$) a függvény nem folytonos, mivel

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^3 + x^2 - 1 = -1 \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2x^2 + 1 = 1,$$

így a függvény nem differenciálható az $x_0 = 0$ pontban, mert nem teljesíti a differenciálhatóság szükséges feltételét.

Azaz a függvény az $x_0 = 0$ pont kivételével minden valós helyen differenciálható. $\diamondsuit$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1. \end{cases}$

Megoldás.
A függvény két polinom-függvény összeragasztásával keletkezett, melyek a teljes értelmezési tartományukon differenciálhatók, ezért elegendő a csatlakozási pontban vizsgálni.

I.) A csatlakozási pontban ($x_0 = 1$) a függvény folytonos, így teljesíti a differenciálhatóság szükséges feltételét.

II.) Vizsgáljuk az egyoldali-deriváltakat!

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+1-(1^3+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=\\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}x^2+x+1=3.\\
\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to 1^-}\frac{3x-1-(1^3+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x-3}{x-1}=\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{3(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}3=3.
\end{aligned}$$

Mivel az egyoldali-deriváltak megegyeznek, ezért a függvény differenciálható az $x_0=1$ pontban is és $f'(1)=3$.

Azaz a függvény minden valós helyen differenciálható. ♢

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} & x>1\\ 2x & x\le 1.\end{cases}$

Megoldás.
A függvény egy racionális törtfüggvény és egy polinom-függvény összeragasztásával keletkezett, melyek a teljes értelmezési tartományukon differenciálhatók, ezért elegendő a csatlakozási pontban vizsgálni.

I.) A csatlakozási pontban ($x_0=1$) a függvény folytonos, mert

1.) $x_0\in\mathcal{D}_f$ és torlódási pont.

2.) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}2x=2=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+3}{x+1}=$
$=2=:A$

3.) $f(1)=2\cdot 1=2=A$.

így teljesíti a differenciálhatóság szükséges feltételét.

II.) Vizsgáljuk az egyoldali-deriváltakat!

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to 1^-}\frac{2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)}{x-1}=\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{2}{1}=2.\\
\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x^2+2x-3-2x^2+2}{x^2-1}}{x-1}=\\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{(x-1)(1-x)}{(x-1)(x+1)}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{x+1}=\frac{-1}{2}.
\end{aligned}$$

Mivel az egyoldali-deriváltak nem egyeznek meg, ezért a függvény az $x_0=1$ pontban nem differenciálható.

Azaz a függvény az $x_0=1$ pont kivételével minden valós helyen differenciálható. ♢

Elemi függvények és inverzeik deriváltja

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	x	1
x^n $n \in \mathbb{Q}$	$n \cdot x^{n-1}$	e^x	e^x
a^x $\quad a>0,\ a\neq 1$	$a^x \cdot \ln a$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$ $\quad a>0,\ a\neq 1$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathrm{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$		

11.2. Házi Feladatok

11.1. Házi Feladat. *Definíció alapján határozzuk meg a következő függvények differenciálhányadosát a megadott pontokban!*

a) $f(x) = \dfrac{5x-1}{3x+2}, \quad x_0 = -1,\ -\dfrac{1}{3},\ 1$ *megoldás*

b) $f(x) = x^2 - 3x + 1, \quad x_0 = -5,\ 0,\ 3$ *megoldás*

c) $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = -1,\ 0,\ 1$ *megoldás*

d) $f(x) = \cos x, \quad x_0 = -\dfrac{\pi}{2},\ 0,\ a$ *megoldás*

11.2. Házi Feladat. *Hol differenciálhatók a következő függvények?*

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 1 & x < 1 \\ x^2 - 1 & x \geq 1. \end{cases}$ *megoldás*

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} & -1 < x < 1, \\ -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} & x \geq 1, \\ 0 & x \leq -1. \end{cases}$ *megoldás*

11.3. Megoldások

11.1. Házi Feladat. *Definíció alapján határozzuk meg a következő függvények differenciálhányadosát a megadott pontokban!*

a) $f(x) = \dfrac{5x-1}{3x+2}, \quad x_0 = -1,\ -\dfrac{1}{3},\ 1$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{5x-1}{3x+2} - \frac{5x_0-1}{3x_0+2}}{x-x_0} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{(5x-1)(3x_0+2)-(5x_0-1)(3x+2)}{(3x+2)(3x_0+2)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{15xx_0+10x-3x_0-2-(15xx_0+10x_0-3x-2)}{(3x+2)(3x_0+2)}}{x-x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{10(x-x_0)-3(x_0-x)}{(3x+2)(3x_0+2)(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{13(x-x_0)}{(3x+2)(3x_0+2)(x-x_0)} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{13}{(3x+2)(3x_0+2)} = \frac{13}{(3x_0+2)^2}
\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
f'(-1) &= \frac{13}{(3\cdot(-1)+2)^2} = 13, \\
f'(-\tfrac{1}{3}) &= \frac{13}{\left(3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+2\right)^2} = 13, \\
f'(1) &= \frac{13}{(3\cdot 1+2)^2} = \frac{13}{25},
\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

b) $f(x) = x^2 - 3x + 1, \quad x_0 = -5,\ 0,\ 3$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-3x+1-(x_0^2-3x_0+1)}{x-x_0} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2-3(x-x_0)}{x-x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)-3(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0-3)}{x-x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} x+x_0-3 = 2x_0-3.
\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
f'(-5) &= 2\cdot(-5)-3 = -13, \\
f'(0) &= 2\cdot 0-3 = -3, \\
f'(3) &= 2\cdot 3-3 = 3.
\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

c) $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = -1,\ 0,\ 1$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^3+2x-(x_0^3+2x_0)}{x-x_0} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{x^3-x_0^3+2(x-x_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)+2(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2+2)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} x^2+xx_0+x_0^2+2 = 3\cdot x_0^2+2 \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 3\cdot(-1)^2+2 = 5, \\ f'(0) &= 3\cdot 0^2+2 = 2, \\ f'(1) &= 3\cdot 1^2+2 = 5. \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

d) $f(x) = \cos x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{2},\ 0,\ a$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(x_0+\Delta x)-\cos(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos x_0\cdot\cos\Delta x-\sin x_0\cdot\sin\Delta x-\cos(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \cos x_0\cdot\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}-\sin x_0\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \cos x_0\cdot\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\cdot\frac{\cos\Delta x+1}{\cos\Delta x+1}-\sin x_0\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \cos x_0\cdot\frac{\cos^2\Delta x-1}{\Delta x\cdot(\cos\Delta x+1)}-\sin x_0\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \cos x_0\cdot\frac{-\sin^2\Delta x}{\Delta x\cdot(\cos\Delta x+1)}-\sin x_0\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \cos x_0\cdot\frac{-\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{\sin\Delta x}{\cos\Delta x+1}-\sin x_0\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = -\sin x_0. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ f'(0) &= -\sin(0) = 0, \\ f'(a) &= -\sin(a). \end{aligned}$$

Azaz az $f(x) = \cos x$ függvény minden valós helyen differenciálható és $f'(a) = -\sin(a)$ $a\in\mathbb{R}$. $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

11.2. Házi Feladat. *Hol differenciálhatók a következő függvények?*

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 1 & x < 1 \\ x^2 - 1 & x \geq 1. \end{cases}$

Megoldás.
A függvény két polinom-függvény összeragasztásával keletkezett, melyek a teljes értelmezési tartományukon differenciálhatók, ezért elegendő a csatlakozási pontban vizsgálni.

I.) A csatlakozási pontban ($x_0 = 1$) a függvény folytonos, így teljesíti a differenciálhatóság szükséges feltételét.

II.) Vizsgáljuk az egyoldali deriváltakat!

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 2x^2 + 1 - (1^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x - 1} \stackrel{*}{=} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x^2 - x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} x^2 - x - 1 = -1. \end{aligned}$$

* Mivel a számláló helyettesítési értéke $x_0 = 1$-ben 0, ezért a szorzattá-alakításában szerepel az $(x-1)$ elsőfokú tényező:

$$\begin{array}{rrrrl} x^3 & -2x^2 & +0x & +1 & :(x-1) = \quad x^2 - x - 1. \\ x^3 & -x^2 & & & \\ \hline & -x^2 & +0x & +1 & \\ & -x^2 & +x & & \\ \hline & & -x & +1 & \\ & & -x & +1 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} x + 1 = 2.$$

Mivel az egyoldali-deriváltak nem egyeznek meg, ezért a függvény az $x_0 = 1$ pontban nem differenciálható.

Így a függvény az $x_0 = 1$ pont kivételével minden valós helyen differenciálható. ♢

vissza a feladathoz

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} & -1 < x < 1, \\ -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} & x \geq 1, \\ 0 & x \leq -1. \end{cases}$

Megoldás.
A függvény egy racionális törtfüggvény, egy polinom és egy konstans-függvény összeragasztásával keletkezett, melyek a teljes értelmezési tartományukon differenciálhatók, ezért elegendő a csatlakozási pontokban vizsgálni.

$x_0 = -1$

I.) A csatlakozási pontban ($x_0 = -1$) a függvény nem folytonos, mert bár $x_0 \in \mathcal{D}_f$ és torlódási pont, de

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} 0 = 0,\\
\lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} =\\
&= \lim_{x\to -1^+} \frac{x+3}{x+1} \overset{\frac{2}{0^+}}{=} +\infty,
\end{aligned}$$

így $x_0 = -1$-ben a függvény nem folytonos, tehát nem teljesíti a differenciálhatóság szükséges feltételét.

$x_0 = 1$

I.) A csatlakozási pontban ($x_0 = 1$) a függvény folytonos, mert

1.) $x_0 \in \mathcal{D}_f$ és torlódási pont.

2.) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+3}{x+1} = 2 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2 := A$

3.) $f(1) = -\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{5}{2} = 2 = A.$

tehát a függvény teljesíti a differenciálhatóság szükséges feltételét.

II.) Vizsgáljuk az egyoldali-deriváltakat!

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} - 2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{x^2+2x-3-2x^2+2}{x^2-1}}{x-1} =\\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{(x-1)(1-x)}{(x-1)(x+1)}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x+1} = \frac{-1}{2}\\
\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - 2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-\frac{1}{2}(x-1)}{x-1} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Mivel az egyoldali-deriváltak megegyeznek, ezért a függvény az $x_0 = 1$ pontban differenciálható.

A függvény tehát az $x_0 = -1$ pont kivételével mindenhol differenciálható. ♢

vissza a feladathoz

12. fejezet

Derivált számítása műveleti szabályok alapján

12.1. Gyakorlat

12.1. Feladat. *Adjuk meg az alábbi függvények deriváltfüggvényét.*

a) $f(x) = 3 \cdot x^5 + 2 \cdot x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - x + 8$

Megoldás.
$f'(x) = 3 \cdot 5x^4 + 2 \cdot 4x^3 - 3 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x^1 - 1 + 0 = 15x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 4x - 1$ ♢

b) $f(x) = 2x + \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x} + 2$

Megoldás.
Írjuk át a függvényt tört- illetve negatív kitevős hatványok összegére:

$$f(x) = 2x + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x} + 2 = 2x + x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{4}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 0 = \\ &= 2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

c) $f(x) = x \cdot \sin x$

Megoldás.
$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x$ ♢

d) $f(x) = \mathrm{tg} x \cdot \arcsin x$

Megoldás.
$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \arcsin x + \mathrm{tg} x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ♢

e) $f(x) = \underbrace{2^x \cdot \ln x}_{=g(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{=h(x)}$

Megoldás.
$f'(x) = (g(x) \cdot h(x))' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln x + 2^x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot \cos x + (2^x \cdot \ln x) \cdot (-\sin x) = \\ &= 2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln x \cdot \cos x + 2^x \cdot \frac{1}{x} \cdot \cos x - 2^x \ln x \cdot \sin x. \end{aligned}$$

12.1. Megjegyzés. *A fenti eredményből is látható, de általánosan is levezethető, hogy háromtényezős szorzat esetén*

$$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$

Továbbá n-tényezős szorzatra teljes indukcióval igazolható az alábbi összefüggés:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \prod_{j \neq i} f_j,$$

azaz n-tényezős szorzat deriváltját úgy kaphatjuk, ha képezzük az összes olyan n-tényezős szorzat összegét, amelyekben mindig pontosan egy tényezőt deriválunk, a többit változatlanul hagyjuk. (Nyilvánvaló, hogy ilyen szorzatból éppen n darab van.)

f) $f(x) = \dfrac{\mathrm{arctg} x}{\log_2 x}$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot \log_2 x - \mathrm{arctg} x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2}}{\log_2^2 x}$$ ♢

g) $f(x) = \dfrac{x^2 \ln 3 + \sqrt[3]{e^3 - 5}}{e^x}$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{2x \ln 3 \cdot e^x - \left(x^2 \ln 3 + \sqrt[3]{e^3 - 5}\right) \cdot e^x}{e^{2x}}$$ ♢

h) $f(x) = \sin(2x+3)$

Megoldás.
$f'(x) = \cos(2x+3) \cdot 2$ ♢

i) $f(x) = e^{3(x^2-2x)} = e^{3x^2-6x}$

Megoldás.
$f'(x) = e^{3x^2-6x} \cdot (6x-6)$ ♢

j) $f(x) = \mathrm{tg} \ln \dfrac{1}{x}$

Megoldás.
$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2\left(\ln \frac{1}{x}\right)} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{x}} \cdot (-1)\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{-1}{x \cdot \cos^2 \ln \frac{1}{x}}$ ♢

k) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\left(x+\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

Megoldás.
Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazzuk, többször egymás után:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\left(x+\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(x+\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(x+\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)'\right)=\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(x+\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\right)=\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right).
\end{aligned}$$

l) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$

Megoldás.
Kétszer alkalmazva az összetett függvény deriválási szabályát:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1))}{(1-x)^2}=\\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1+x)(1-x)}=\frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}$$

12.2. Feladat. *A műveleti szabályok felhasználásával határozzuk meg az alábbi elemi függvények deriváltjait!*

a) $f(x)=x^n,\quad n\in\mathbb{N}^*,\ x\in\mathbb{R}$

12.2. Tétel. *Ha* $f(x)=x^n$*, akkor* $f'(x)=n\cdot x^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathbb{R}$.

Bizonyítás. A Bizonyítást n-szerinti teljes indukcióval végezzük.

i) $n=1$ esetén a múlt órán igazolt, $x'=1\cdot x^0=1$ összefüggéshez jutunk.

ii) Tegyük fel, hogy valamely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén az állítás igaz, azaz

$$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

iii) Igazoljuk az állítást $n+1$-re

$$\left(x^{n+1}\right)'=(x\cdot x^n)'=1\cdot x^n+x\cdot n\cdot x^{n-1}=(n+1)\cdot x^n.$$ □

b) $f(x) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$

12.3. Tétel. *Ha* $f(x) = \cos x$, *akkor* $f'(x) = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás.

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = -\sin x. \qquad \square$$

c) $f(x) = \log_a x, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathcal{D}_f$

12.4. Tétel. $f(x) = \mathrm{tg} x$, *akkor* $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Bizonyítás.

$$(\mathrm{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad \square$$

12.5. Tétel. $f(x) = \log_a x$, *akkor* $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathcal{D}_f$

Bizonyítás.

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x} \qquad \square$$

d) $f(x) = a^x, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}$

12.6. Tétel. $f(x) = a^x$, *akkor* $f'(x) = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}$

Bizonyítás.

Az $y = a^x$ függvény inverze az $x = \log_a y,\ y > 0$ függvény. Ha $y > 0$, akkor $(\log_a y)' \neq 0$, így az inverz függvény differenciálási szabálya miatt az a^x függvény minden valós x helyen differenciálható és

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'\big|_{y=a^x}} = \frac{1}{\frac{1}{y \cdot \ln a}\big|_{y=a^x}} = y \cdot \ln a\big|_{y=a^x} = a^x \cdot \ln a. \qquad \square$$

12.7. Megjegyzés. *Az* $f(x) = e^x$ *deriváltja a fenti állítás speciális eseteként adódik:*

$$f'(x) = e^x \cdot \ln e = e^x.$$

e) $f(x) = \arcsin x, \quad x \in (-1,\ 1)$

12.8. Tétel. *Az* $f : [-1,\ 1] :\to [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ $f(x) = \arcsin x$ *függvény a* $(-1,\ 1)$ *intervallumon differenciálható és* $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Bizonyítás. Az $y = \arcsin x$, $-1 \leq x \leq 1$ függvény inverze az $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ függvény. Ha $y \in (-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$, akkor $(\sin y)' \neq 0$, ezért az $\arcsin x$ differenciálható a $(-1,\ 1)$ intervallumon és

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{(\sin y)'\big|_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{\cos y|_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}\big|_{y=\arcsin x}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

12.9. Megjegyzés. *A fenti levezetés során is látszik, hogy a függvény valóban nem differenciálható az* $x = -1$ *illetve az* $x = 1$ *pontban.*

12.1.1. Logaritmikus deriválás

Legyen $g(x)$ és $h(x)$ függvény differenciálható a H halmazon, továbbá $g(x)>0$.
Ekkor $f(x)=[g(x)]^{h(x)}$ is differenciálható a H-n és $f'(x)$ az alábbi módokon határozható meg.

1. Megoldás:
Ha $g(x)>0$, akkor $f(x)>0$. Ekkor

$$\ln(f(x))=\ln\left(g(x)^{h(x)}\right)=h(x)\cdot\ln(g(x))$$

Deriváljuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) &= h'(x)\cdot\ln(g(x))+h(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)\\ f'(x) &= f(x)\cdot\left[h'(x)\cdot\ln(g(x))+h(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)\right].\end{aligned}$$

2. Megoldás:
Ugyanehhez az eredményhez jutunk, ha az

$$f(x)=e^{\ln(f(x))}=e^{\ln\left(g(x)^{h(x)}\right)}=e^{h(x)\cdot\ln(g(x))}$$

átalakításból indulunk ki. Ekkor

$$f'(x)=\left(e^{h(x)\cdot\ln(g(x))}\right)'=\underbrace{e^{h(x)\cdot\ln(g(x))}}_{=f(x)}\cdot\left(h'(x)\cdot\ln g(x)+h(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)\right).$$

12.10. Megjegyzés. *A következő feladatok megoldása során a fenti két módszer egyformán hatásos. Mindenki maga döntheti el, melyik úton szeretne elindulni. A* ***2. Megoldás****nak mégis van egy kis előnye, a későbbiekben a L'Hospital szabály alkalmazásakor ehhez a módszerhez meglehetősen hasonlító eljárásra van szükség.*

12.3. Feladat. *Adjuk meg az alábbi függvények deriváltfüggvényét.*

a) $f(x)=(3x)^{x^2}$

Megoldás.
Ha $3x>0$, akkor $f(x)>0$. Ekkor elvégezhetők a szükséges átalakítások:

$$\begin{aligned}\ln(f(x)) &= \ln(3x)^{x^2}=x^2\cdot\ln 3x\\ \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) &= 2x\cdot\ln 3x+x^2\cdot\frac{1}{3x}\cdot 3\\ f'(x) &= f(x)\cdot(2x\cdot\ln 3x+x)=(3x)^{x^2}\cdot(2x\cdot\ln 3x+x).\end{aligned}$$

b) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

Megoldás.
Ha $\sin x > 0$, akkor $f(x) > 0$. Ekkor elvégezhetők a szükséges átalakítások:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\ln(\sin x)^{\cos x}} = e^{\cos x \cdot \ln \sin x} \\
f'(x) &= \underbrace{e^{\cos x \cdot \ln \sin x}}_{=f(x)} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \right) = \\
&= (\sin x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right).
\end{aligned}$$

c) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1} \right)^{\ln x}$

Megoldás.
Ha $\frac{x+1}{x-1} > 0$, akkor $f(x) > 0$. Ekkor elvégezhetők a szükséges átalakítások:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\ln x}} = e^{\ln x \cdot \ln \frac{x+1}{x-1}} \\
f'(x) &= \underbrace{e^{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\ln x}}}_{=f(x)} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \ln \frac{x+1}{x-1} + \ln x \cdot \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} \right) = \\
&= \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \ln \frac{x+1}{x-1} + \ln x \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} \right).
\end{aligned}$$

12.2. Házi Feladatok

12.1. Házi Feladat. *Adjuk meg az alábbi függvények deriváltfüggvényét.*

1.) $f(x)=e^x\cdot(\sin x+\cos x)$

2.) $f(x)=\sqrt[5]{x^3}\cdot\ln x+3\cdot 2^x$

3.) $f(x)=3\cdot\sin x+\sqrt[3]{x}\cdot\cos x+\cos\frac{\pi}{4}$

4.) $f(x)=\dfrac{5\sin x}{1+\cos x}$

5.) $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

6.) $f(x)=\dfrac{e^x-\cos x}{x\cdot e^x}$

7.) $f(x)=\sin x^2$

8.) $f(x)=\sin^2 x$

9.) $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

10.) $f(x)=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{1+x^2}$

11.) $f(x)=\pi\cdot\cos^2 x^3-e^2\cdot\sin 2$

12.) $f(x)=e^{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$

13.) $f(x)=\log_3\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$

14.) $f(x)=\ln\ln^2 x^3$

15.) $f(x)=\operatorname{tg}x\cdot(\ln\operatorname{tg}x)^7$

16.) $f(x)=(x^2+1)(x^3+2)(x^4+3)$

17.) $f(x)=\left(\left(x^2+3x+2\right)^3+\left(x^2-5x+6\right)^5\right)^4$

18.) $f(x)=\sin^7 x^7$

19.) $f(x)=e^{e^x}$

20.) $f(x)=\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x$

21.) $f(x)=\dfrac{\sin x+2\cos x}{\sin x-2\cos x}$

22.) $f(x)=\left(\ln\dfrac{1}{\sin x}\right)^7$

23.) $f(x)=\cos\operatorname{ctg}(x^2+1)$

24.) $f(x)=\dfrac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(1-x^2)$

25.) $f(x)=\sin^2 x\cdot\cos^3 x$

26.) $f(x)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

27.) $f(x)=\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x^2}}$

28.) $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$

29.) $f(x)=\left(\sqrt{x}+7\right)^6$

30.) $f(x)=\operatorname{tg}x^3\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}$

31.) $f(x)=\arcsin(\cos x)$

32.) $f(x)=\log_3\ln x$

33.) $f(x)=\ln\dfrac{7-5x}{2x-3}$

34.) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+e^x}{1-e^x}}$

Megoldások: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34

12.2. Házi Feladat. *Adjuk meg az alábbi függvények deriváltfüggvényét.*

a) $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^{\ln\frac{1}{x}}$ megoldás

b) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ megoldás

c) $f(x)=\left(\dfrac{3}{x}\right)^{x^3}$ megoldás

d) $f(x)=\sin\left(x^{\cos x}\right)$ megoldás

12.3. Megoldások

12.1. Házi Feladat. *Adjuk meg az alábbi függvények deriváltfüggvényét.*

1.) $f(x) = e^x \cdot (\sin x + \cos x)$

Megoldás.
$f'(x) = e^x \cdot (\sin x + \cos x) + e^x \cdot (\cos x - \sin x)$ $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

2.) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \cdot \ln x + 3 \cdot 2^x = x^{\frac{3}{5}} \cdot \ln x + 3 \cdot 2^x$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{3}{5} \cdot x^{-\frac{2}{5}} \cdot \ln x + x^{\frac{3}{5}} \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot 2^x \cdot \ln 2$$ $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

3.) $f(x) = 3 \cdot \sin x + \sqrt[3]{x} \cdot \cos x + \cos \dfrac{\pi}{4} = 3 \cdot \sin x + x^{\frac{1}{3}} \cdot \cos x + \cos \dfrac{\pi}{4}$

Megoldás.
$f'(x) = 3 \cdot \cos x + \dfrac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot \cos x - x^{\frac{1}{3}} \cdot \sin x + 0$ $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

4.) $f(x) = \dfrac{5 \sin x}{1 + \cos x}$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{5 \cdot \cos x \cdot (1 + \cos x) + 5 \cdot \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2}$$ $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

5.) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2} \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

6.) $f(x) = \dfrac{e^x - \cos x}{x \cdot e^x}$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{(e^x + \sin x) \cdot (x \cdot e^x) - (e^x - \cos x) \cdot (1 \cdot e^x + x \cdot e^x)}{(x \cdot e^x)^2}$$ $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

7.) $f(x) = \sin x^2$

Megoldás.
$f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$

$\diamondsuit$
vissza a feladathoz

8.) $f(x) = \sin^2 x$

Megoldás.
$f'(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

$\diamondsuit$
vissza a feladathoz

9.) $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-1\cdot(1+x)-1\cdot(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$$

$\diamondsuit$
vissza a feladathoz

10.) $f(x) = \operatorname{ctg}\sqrt[3]{1+x^2} = \operatorname{ctg}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2\sqrt[3]{1+x^2}} \cdot \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x$$

$\diamondsuit$
vissza a feladathoz

11.) $f(x) = \pi \cdot \cos^2 x^3 - e^2 \cdot \sin 2$

Megoldás.
$f'(x) = \pi \cdot 2 \cdot \cos x^3 \cdot (-\sin x^3) \cdot 3x^2 = -6\pi x^2 \cdot \cos x^3 \cdot \sin x^3$

$\diamondsuit$
vissza a feladathoz

12.) $f(x) = e^{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$

Megoldás.
$f'(x) = e^{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} \cdot \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \cdot 1$

$\diamondsuit$
vissza a feladathoz

13.) $f(x) = \log_3 \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$

Megoldás.
$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} \cdot \ln 3} \cdot \frac{1}{1+(x^2-1)} \cdot \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$

$\diamondsuit$
vissza a feladathoz

14.) $f(x) = \ln\ln^2 x^3$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{1}{\ln^2 x^3} \cdot 2 \cdot \ln x^3 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2$$

$\diamondsuit$
vissza a feladathoz

15.) $f(x) = \mathrm{tg}x \cdot (\ln \mathrm{tg}x)^7$

Megoldás.
$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot (\ln \mathrm{tg}x)^7 + \mathrm{tg}x \cdot 7\,(\ln \mathrm{tg}x)^6 \cdot \dfrac{1}{\mathrm{tg}x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$ ♢

vissza a feladathoz

16.) $f(x) = (x^2+1)(x^3+2)(x^4+3)$

Megoldás.
$f'(x) = 2x(x^3+2)(x^4+3) + (x^2+1)3x^2(x^4+3) + (x^2+1)(x^3+2)4x^3$ ♢

vissza a feladathoz

17.) $f(x) = \left(\left(x^2+3x+2\right)^3 + \left(x^2-5x+6\right)^5 \right)^4$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\left(\left(x^2+3x+2\right)^3 + \left(x^2-5x+6\right)^5 \right)^3 \cdot \\ &\cdot \left(3\left(x^2+3x+2\right)^2 \cdot (2x+3) + 5\left(x^2-5x+6\right)^4 \cdot (2x-5) \right) \end{aligned}$$ ♢

vissza a feladathoz

18.) $f(x) = \sin^7 x^7$

Megoldás.
$f'(x) = 7\sin^6 x^7 \cdot \cos x^7 \cdot 7x^6$ ♢

vissza a feladathoz

19.) $f(x) = e^{e^x}$

Megoldás.
$f'(x) = e^{e^x} \cdot e^x$ ♢

vissza a feladathoz

20.) $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$

Megoldás.
$f'(x) = \cos x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x + 2\sin x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x + 3\sin x \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x$ ♢

vissza a feladathoz

21.) $f(x) = \dfrac{\sin x + 2\cos x}{\sin x - 2\cos x}$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{(\cos x - 2\sin x)\cdot(\sin x - 2\cos x) - (\sin x + 2\cos x)\cdot(\cos x + 2\sin x)}{(\sin x - 2\cos x)^2}$$ ♢

vissza a feladathoz

22.) $f(x) = \left(\ln \dfrac{1}{\sin x} \right)^7$

Megoldás.
$f'(x) = 7\left(\ln \dfrac{1}{\sin x} \right)^6 \cdot \sin x \cdot \dfrac{-1}{\sin^2 x} \cdot \cos x$ ♢

vissza a feladathoz

23.) $f(x) = \cos \operatorname{ctg}(x^2+1)$

Megoldás.
$f'(x) = -\sin \operatorname{ctg}(x^2+1) \cdot \dfrac{-1}{\sin^2(x^2+1)} \cdot 2x$ ♢

vissza a feladathoz

24.) $f(x) = \dfrac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(1-x^2)$

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{\left(\arcsin x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \cdot \sqrt{1-x^2} - (x \cdot \arcsin x) \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)}{1-x^2} + \\ + \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2(1-x^2)} \cdot (-2x).$$

vissza a feladathoz

25.) $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$

Megoldás.
$f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x \cdot \cos^3 x - \sin^2 x \cdot 3\cos^2 x \cdot \sin x$ ♢

vissza a feladathoz

26.) $f(x) = \ln \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} = \ln(2x-1)^{-\frac{1}{2}}$

Megoldás.
$f'(x) = \sqrt{2x-1} \cdot \dfrac{-1}{2} \cdot (2x-1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2$ ♢

vissza a feladathoz

27.) $f(x) = \sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x^2}} = \left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}$

Megoldás.
$f'(x) = \dfrac{1}{5} \cdot \left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ ♢

vissza a feladathoz

28.) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}} = \left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{4}}$

Megoldás.

$f'(x) = \dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \dfrac{x+2-(x-1)}{(x+2)^2}$ ♢

vissza a feladathoz

29.) $f(x) = \left(\sqrt{x}+7\right)^6 = \left(x^{\frac{1}{2}}+7\right)^6$

Megoldás.
$f'(x) = 6\left(x^{\frac{1}{2}}+7\right)^5 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ ♢

vissza a feladathoz

30.) $f(x) = \mathrm{tg} x^3 \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x}$

Megoldás.
$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x^3} \cdot 3x^2 \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x} + \mathrm{tg} x^3 \cdot \dfrac{1}{1+x} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ ♢

vissza a feladathoz

31.) $f(x) = \arcsin(\cos x)$

Megoldás.
$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \cdot (-\sin x) = \dfrac{1}{|\sin x|} \cdot (-\sin x) = -1 \cdot \mathrm{sgn}(\sin x)$
vagy
$f(x) = \arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(x+\dfrac{\pi}{2})) = x + \dfrac{\pi}{2}$ ha $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, és így
$f'(x) = 1.$
Ebben az esetben viszont fontos az értelmezési tartomány szűkítése. ♢

vissza a feladathoz

32.) $f(x) = \log_3 \ln x$

Megoldás.
$f'(x) = \dfrac{1}{\ln x \cdot \ln 3} \cdot \dfrac{1}{x}$ ♢

vissza a feladathoz

33.) $f(x) = \ln \dfrac{7-5x}{2x-3}$

Megoldás.

$f'(x) = \dfrac{2x-3}{7-5x} \cdot \dfrac{-5(2x-3)-2(7-5x)}{(2x-3)^2}$ ♢

vissza a feladathoz

34.) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1+e^x}{1-e^x}}$

Megoldás.

$f'(x) = \sqrt{\dfrac{1-e^x}{1+e^x}} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{e^x(1-e^x)+e^x(1+e^x)}{(1-e^x)^2}$ ♢

vissza a feladathoz

12.2. Házi Feladat. *Adjuk meg az alábbi függvények deriváltfüggvényét.*

a) $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^{\ln\frac{1}{x}}$

Megoldás.
Mivel $\sqrt{x}>0$, minden $x>0$ esetén, ezért $f(x)>0$ minden $x\in\mathcal{D}_f=\{x|x\in\mathbb{R},\ x>0\}$ esetén, ezért elvégezhetőek a megfelelő átalakítások:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\ln\left(\sqrt{x}\right)^{\ln\frac{1}{x}}}=e^{\ln\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\sqrt{x}\right)} \\ f'(x) &= \underbrace{e^{\ln\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\sqrt{x}\right)}}_{=f(x)}\cdot\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot x^{-2}\cdot(-1)\cdot\ln\sqrt{x}+\ln\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)= \\ &= \left(\sqrt{x}\right)^{\ln\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\cdot\ln\sqrt{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

b) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$

Megoldás.
Ha $x>0$, akkor $f(x)>0$, ezért elvégezhetőek a megfelelő átalakítások:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x} \\ f'(x) &= \underbrace{e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}}_{=f(x)}\cdot\left(-x^{-2}\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)=x^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-x^{-2}\ln x+\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

c) $f(x)=\left(\frac{3}{x}\right)^{x^3}$

Megoldás.
Ha $x>0$, akkor $f(x)>0$, ezért elvégezhetőek a megfelelő átalakítások:

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= \ln\left(\frac{3}{x}\right)^{x^3}=x^3\ln\frac{3}{x} \\ \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) &= 3x^2\ln\frac{3}{x}+x^3\cdot\frac{1}{\frac{3}{x}}\cdot 3\cdot(-1)\cdot\frac{1}{x^2} \\ f'(x) &= \left(\frac{3}{x}\right)^{x^3}\cdot\left(3x^2\ln\frac{3}{x}-x^2\right) \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

d) $f(x) = \sin\left(x^{\cos x}\right)$

Megoldás.
$f'(x) = \cos\left(x^{\cos x}\right) \cdot \left(x^{\cos x}\right)'$.
Ha $x > 0$, akkor $x^{\cos x} > 0$, ezért elvégezhetőek a megfelelő átalakítások:

$$\begin{aligned}\left(x^{\cos x}\right)' &= \left(e^{\ln x^{\cos x}}\right)' = \left(e^{\cos x \cdot \ln x}\right)' = e^{\cos x \cdot \ln x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x}\right) = \\ &= x^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x}\right),\end{aligned}$$

így $f'(x) = \cos\left(x^{\cos x}\right) \cdot x^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x}\right)$. ♢

vissza a feladathoz

13. fejezet

Differenciálszámítás alkalmazásai I.

13.1. Gyakorlat

13.1.1. Érintő egyenlete

13.1. Feladat. *Írjuk fel az $f(x) = \cos(\pi x) + 1$ függvény $x_0 = \frac{1}{3}$ helyhez tartozó érintőjének egyenletét, készítsünk ábrát!*

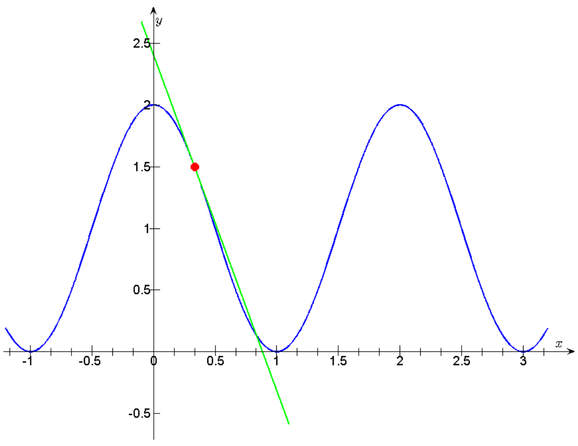
Megoldás.
Az érintő egyenlete:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0), \text{ ahol}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{3}, \\ f(x_0) &= \cos\frac{\pi}{3} + 1 = \frac{3}{2}, \\ f'(x) &= -\pi \cdot \sin(\pi x) \\ f'(x_0) &= -\pi \cdot \sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \pi. \end{aligned}$$

Így az érintő

$$\begin{aligned} y - \frac{3}{2} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \pi \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right), \\ y &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \pi \cdot x + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \pi + \frac{3}{2}}. \end{aligned}$$



◊

13.2. Feladat. *Határozzuk meg az $f(x)=\mathrm{tg}2x$ függvény görbéjének azon pontjait, ahol az érintő párhuzamos az $\frac{1}{2}y=4x-1$ egyenessel!*

Megoldás.
Az egyenes egyenletét a szokásos $y=m\cdot x+b$ alakra átírva az érintő meredeksége leolvasható:

$$y=8x-2 \quad\Leftrightarrow\quad f'(x_0)=m_e=8.$$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2$$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\cos^2 2x_0} &= 8\\
\frac{1}{4} &= \cos^2 2x_0\\
\pm\frac{1}{2} &= \cos 2x_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2x_0 &= \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z} & \qquad 2x_0 &= \pm\frac{2\pi}{3}+2\ell\pi \quad \ell\in\mathbb{Z}\\
x_0 &= \pm\frac{\pi}{6}+k\pi \quad k\in\mathbb{Z} & \qquad x_0 &= \pm\frac{\pi}{3}+\ell\pi \quad \ell\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

13.3. Feladat. *A differenciálszámítás segítségével igazoljuk az alábbi állításokat!*

a) *Az $f(x)=\mathrm{arctg}x+\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$ függvény konstans.*

Megoldás.
A függvény pontosan akkor konstans, ha differenciálható és a deriváltja azonosan 0.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Mivel $f(x)$ konstans elegendő a függvényértéket egyetlen $x_0\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ pontban kiszámolni. A függvényérték az $x_0=1$ helyen könnyen számolható:

$$f(1)=\mathrm{arctg}1+\mathrm{arctg}1=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

$\diamondsuit$

b) *Az $f(x)=\cos 2x+2\sin^2 x$ függvény konstans.*

Megoldás.
A függvény pontosan akkor konstans, ha differenciálható és a deriváltja azonosan 0.

$$f'(x)=-\sin 2x\cdot 2+2\cdot 2\sin x\cos x=-2\sin 2x+2\sin 2x=0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Mivel $f(0)=1$, ezért $f(x)\equiv 1$. $\diamondsuit$

13.1. Megjegyzés. *A fenti állítás pusztán az addíciós tételek felhasználásával is igazolható lenne, de most nem ez volt a cél.*

13.1.2. L'Hospital szabály

Legyen $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ „$\frac{0}{0}$", vagy „$\frac{\infty}{\infty}$" alakú határozatlan határérték és legyen f és g az a valamely környezetében differenciálható. Ha a $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik, akkor az eredeti határérték is létezik és

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

13.4. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket L'Hospital szabály segítségével!*

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}\overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{1}=2.$$ ♢

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(4-x)}{2x-6}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln(4-x)}{2x-6}\overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{4-x}\cdot(-1)}{2}=-\frac{1}{2}$$ ♢

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$$ ♢

d) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot e^{-x}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot e^{-x}\overset{\infty\cdot 0}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$$ ♢

e) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln x\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{\infty}\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$$ ♢

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}\overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$ ♢

g) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)\cdot \mathrm{ctg}x$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}(e^x-1)\cdot \mathrm{ctg}x \overset{0\cdot\nexists}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\mathrm{tg}x} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1. \qquad \diamondsuit$$

13.2. Megjegyzés. *A feladat megoldható a* $\mathrm{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$ *összefüggés felhasználásával is.*

h) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) &\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x\cdot(x-1)} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{1}{x}\cdot(x-1)} = \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\cdot\ln x+x-1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\cdot\ln x+x-1} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \overset{1^\infty}{=} \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}$$

A kitevő határértékét külön vizsgálva:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x} &\overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{4x\sin x+2x^2\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{4x\sin x+2x^2\cos x} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{4\sin x+4x\cos x+4x\cos x-2x^2\sin x} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{4\sin x+8x\cos x-2x^2\sin x} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-\cos x+x\sin x}{4\cos x+8\cos x-8x\sin x-4x\sin x-2x^2\cos x} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x+x\sin x}{12\cos x-12x\sin x-2x^2\cos x} = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Mivel az exponenciális függvény folytonos az $x=-\frac{1}{6}$ helyen, ezért a kérdéses határérték:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \overset{1^\infty}{=} \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

$\diamondsuit$

13.2. Házi Feladatok

13.1. Házi Feladat. *Milyen szöget zár be az x-tengely pozitív felével az $y = x \cdot \cos x$ görbéhez az $x_0 = 0$ abszcisszájú pontjában húzott érintő? Írjuk fel az érintő egyenletét!*

megoldás

13.2. Házi Feladat. *Hol metszi az x-tengelyt az $y = \ln 3x + 1$ görbe $x_0 = \frac{e}{3}$ abszcisszájú pontjához húzott érintője? Írjuk fel az érintő egyenletét, készítsünk ábrát!*

megoldás

13.3. Házi Feladat. *Keressük meg az $y = \sin x + \cos x$ görbe azon pontjait, melyekben az érintő párhuzamos az x-tengellyel!*

megoldás

13.4. Házi Feladat. *A differenciálszámítás segítségével igazoljuk az alábbi állításokat!*

a) *Az* $f(x) = \arccos(2x^2 - 1) - 2\arccos x$ *függvény konstans.* *megoldás*

b) *Az* $f(x) = \cos 2x - 2\cos^2 x$ *függvény konstans.* *megoldás*

13.5. Házi Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket L'Hospital szabály segítségével!*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$ *megoldás*

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x^2}{x - 1}$ *megoldás*

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln^2 x}{x - 1}$ *megoldás*

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\mathrm{ctg} x}$ *megoldás*

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\mathrm{ctg} 3x}{\frac{1}{x}}$ *megoldás*

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{2}x \cdot \mathrm{ctg} x^2$ *megoldás*

g) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x}$ *megoldás*

h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$ *megoldás*

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ *megoldás*

j) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2}{\pi}\mathrm{arctg} x\right)^x$ *megoldás*

13.3. Megoldások

13.1. Házi Feladat. *Milyen szöget zár be az x-tengely pozitív felével az $y = x\cdot\cos x$ görbéhez az $x_0 = 0$ abszcisszájú pontjában húzott érintő? Írjuk fel az érintő egyenletét!*

Megoldás.
Mivel $\mathrm{tg}\alpha = m = f'(x_0)$, ezért

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x - x\sin x \\ f'(x_0) &= \cos x_0 - x_0 \sin x_0 = \cos 0 - 0\cdot\sin 0 = 1 \\ \mathrm{tg}\alpha &= 1 \quad\Rightarrow\quad \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^o \end{aligned}$$

Így az érintő egyenletéhez minden szükséges adat ismert:

$$e: \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

hiszen $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 1$ és $x_0 = 0$, ezért az érintő egyenlete:

$$y = x.$$

◊

vissza a feladathoz

13.2. Házi Feladat. *Hol metszi az x-tengelyt az $y = \ln 3x + 1$ görbe $x_0 = \frac{e}{3}$ abszcisszájú pontjához húzott érintője? Írjuk fel az érintő egyenletét, készítsünk ábrát!*

Megoldás.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln 3x + 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{3x}\cdot 3 = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

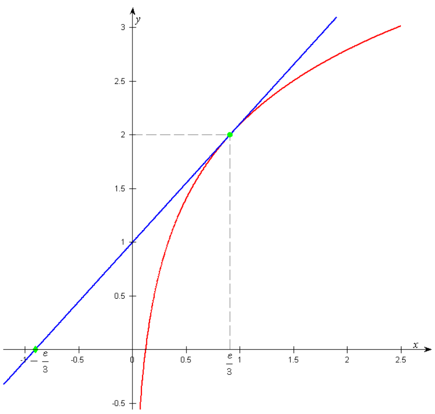
$$\begin{aligned} f(x_0) &= \ln\left(3\cdot\frac{e}{3}\right) + 1 = 2 \\ f'(x_0) &= \frac{1}{\frac{e}{3}} = \frac{3}{e} \end{aligned}$$

Az érintő egyenlete:

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0)\cdot(x - x_0) \\ y - 2 &= \frac{3}{e}\cdot(x - \frac{e}{3}) \\ y = \frac{3}{e}x + 1 & \end{aligned}$$

Az érintő akkor metszi az x-tengelyt, ha $y = 0$, azaz

$$0 = \frac{3}{e}x_0 + 1 \quad\Rightarrow\quad x_0 = -\frac{e}{3}.$$



Az érintő a $P(-\frac{e}{3},\ 0)$ pontban metszi az x-tengelyt. ◊

vissza a feladathoz

13.3. Házi Feladat. *Keressük meg az $y = \sin x + \cos x$ görbe azon pontjait, melyekben az érintő párhuzamos az x-tengellyel!*

Megoldás.
Az érintő pontosan akkor lesz párhuzamos az x-tengellyel, ha az adott pontban a derivált 0.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x - \sin x \\ f'(x_0) &= \cos x_0 - \sin x_0 = 0 \\ \cos x &= \sin x \quad (\cos x \neq 0,\ \text{mert akkor}\ \sin x = 1 \neq \cos x) \\ 1 &= \mathrm{tg} x_0 \\ x_0 &= \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

13.4. Házi Feladat. *A differenciálszámítás segítségével igazoljuk az alábbi állításokat!*

a) *Az $f(x) = \arccos(2x^2 - 1) - 2\arccos x$ függvény konstans.*

Megoldás.
A függvény pontosan akkor konstans, ha differenciálható és a deriváltja azonosan 0.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} \cdot 4x - 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2+4x-1)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{4x}{\sqrt{-4x^2+4x)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4x}{2x\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f. \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

b) *Az $f(x) = \cos 2x - 2\cos^2 x$ függvény konstans.*

Megoldás.
A függvény pontosan akkor konstans, ha differenciálható és a deriváltja azonosan 0.

$$f'(x) = = -2\sin 2x - 2 \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x) = -2\sin 2x + 2\sin 2x = 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f.$$

vissza a feladathoz

13.5. Házi Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket L'Hospital szabály segítségével!*

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$

Megoldás.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{5\cos 5x - 3\cos 3x}{\cos x} = 2$$ ♢

vissza a feladathoz

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x^2}{x-1}$

Megoldás.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x^2}{x-1} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot 2x}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{2}{x} = 2$$ ♢

vissza a feladathoz

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln^2 x}{x-1}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln^2 x}{x-1} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} = 0 \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\text{ctg}x}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\text{ctg}x} \overset{\frac{-\infty}{\infty}\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\sin x \cdot \cos x}{1} = 0 \qquad \diamondsuit$$

13.3. Megjegyzés. *Az utolsó L'Hospital lépés helyett alkalmazható az előző félévben tanult nevezetes határérték is:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0^+} -\sin x \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} = 0.$$

vissza a feladathoz

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\text{ctg}3x}{\frac{1}{x}}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\text{ctg}3x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\nexists}{\nexists}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\text{tg}3x} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2}{\frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3} = \frac{2}{3} \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{2}x \cdot \text{ctg}x^2$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{2}x \cdot \text{ctg}x^2 \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2}x}{\text{tg}x^2} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\cos^2 x^2} \cdot 2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2}\cos^2 x^2}{2x} = +\infty. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

g) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x} \cdot (-1) \cdot x^{-2}}{-2 \cdot x^{-3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot \overbrace{\cos\frac{1}{x}}^{\to 1}}{2} = +\infty. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x}{x\cdot\sin^2 x}\overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-1}{1\cdot\sin^2 x+x\cdot 2\sin x\cos x}\overset{\frac{-1}{0^+}}{=}-\infty \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0^+} x^x \overset{*}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln x} \ominus$$

* Mivel ha $x>0$, akkor $x^x>0$ is fennáll.

Vizsgáljuk meg külön a kitevő határértékét:

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Mivel az exponenciális függvény folytonos az $x_0=0$ helyen, ezért ott a határértéke megegyezik a helyettesítési értékével, így:

$$\ominus e^0 = 1. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\text{arctg}x\right)^x$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\text{arctg}x\right)^x \overset{*}{=} \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(\frac{2}{\pi}\text{arctg}x\right)^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln\left(\frac{2}{\pi}\text{arctg}x\right)} \ominus$$

* Mivel ha $x>0$, akkor $\left(\frac{2}{\pi}\text{arctg}x\right)^x>0$ is fennáll.

Vizsgáljuk meg külön a kitevő határértékét:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(\frac{2}{\pi}\text{arctg}x\right) \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\text{arctg}x\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi}\text{arctg}x}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi}\text{arctg}x}\cdot\frac{2}{\pi}}{-\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi}\text{arctg}x}\cdot\frac{2}{\pi}}{-\frac{1}{x^2}-1} = -\frac{2}{\pi}$$

Mivel az exponenciális függvény folytonos az $x_0=-\frac{2}{\pi}$ helyen, ezért ott a határértéke megegyezik a helyettesítési értékével, így:

$$\ominus e^{-\frac{2}{\pi}}. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

14. fejezet

Differenciálszámítás alkalmazásai II.

14.1. Gyakorlat

14.1.1. Taylor-formula és alkalmazásai

14.1. Feladat. *Írjuk fel az alábbi függvények adott ponthoz tartozó megadott fokszámú Taylor polinomját és a Lagrange-féle maradék tagot!*

a) $f(x) = \cos 3x, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{3}, \quad n = 4$

Megoldás.
A Taylor-tétel alapján (mivel f minden valós helyen végtelen sokszor differenciálható,) minden $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik ξ_x, x_0 és x közé eső szám, melyre

$$\cos 3x = T_4(x) + R_4(x).$$

A negyedik Taylor polinom felírásához szükség van a függvény és első négy deriváltjának helyettesítési értékére az x_0 pontban, a Lagrange-féle maradéktagban az ötödik derivált helyettesítési értéke szerepel a tételben említett közbülső ξ_x helyen. A szükséges adatokat az alábbi táblázatban számoljuk:

$$\begin{array}{rclcrcl}
f(x) &=& \cos 3x & \qquad & f(x_0) &=& \cos\pi = -1\\
f'(x) &=& -3\sin 3x && f'(x_0) &=& -3\sin\pi = 0\\
f''(x) &=& -9\cos 3x && f''(x_0) &=& -9\cos\pi = 9\\
f'''(x) &=& 27\sin 3x && f'''(x_0) &=& 27\sin\pi = 0\\
f^{(4)}(x) &=& 81\cos 3x && f^{(4)}(x_0) &=& 81\cos\pi = -81\\
f^{(5)}(x) &=& -243\sin 3x && f^{(5)}(\xi) &=& -243\sin 3\xi
\end{array}$$

◊

$$\begin{aligned}
T_4(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}\cdot(x-x_0)^4 = \\
&= -1 + \frac{9}{2}\cdot(x-\frac{\pi}{3})^2 + \frac{-81}{24}\cdot(x-\frac{\pi}{3})^4.\\
R_4(x) &= \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\cdot(x-\frac{\pi}{3})^5 = \frac{-243\sin 3\xi}{5!}\cdot(x-\frac{\pi}{3})^5, \quad \text{ahol } \xi \text{ az } x \text{ és az } x_0 \text{ között van.}
\end{aligned}$$

b) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x_0 = 0, \quad n = 5$

Megoldás.
A Taylor-tétel alapján (mivel f minden valós helyen végtelen sokszor differenciálható,) minden $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik ξ_x, x_0 és x közé eső szám, melyre

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = T_5(x) + R_5(x):$$

Az ötödik Taylor polinom felírásához szükség van a függvény és első öt deriváltjának helyettesítési értékére az x_0 pontban, a Lagrange-féle maradéktagban az hatodik derivált helyettesítési értéke szerepel a tételben említett közbülső ξ_x helyen. A szükséges adatokat az alábbi táblázatban számoljuk:

$$\begin{array}{rclrcl}
f(x) & = & \frac{e^x-e^{-x}}{2} & f(x_0) & = & \frac{1-1}{2} = 0 \\
f'(x) & = & \frac{e^x+e^{-x}}{2} & f'(x_0) & = & \frac{1+1}{2} = 1 \\
f''(x) & = & \frac{e^x-e^{-x}}{2} & f''(x_0) & = & 0 \\
f'''(x) & = & \frac{e^x+e^{-x}}{2} & f'''(x_0) & = & 1 \\
f^{(4)}(x) & = & \frac{e^x-e^{-x}}{2} & f^{(4)}(x_0) & = & 0 \\
f^{(5)}(x) & = & \frac{e^x+e^{-x}}{2} & f^{(5)}(x_0) & = & 1 \\
f^{(6)}(x) & = & \frac{e^x-e^{-x}}{2} & f^{(6)}(\xi) & = & \frac{e^\xi-e^{-\xi}}{2}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
T_5(x) &= \frac{1}{1!}\cdot x + \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{5!}\cdot x^5. \\
R_5(x) &= \frac{\frac{e^\xi-e^{-\xi}}{2}}{6!}\cdot x^6, \quad \text{ahol } \xi \text{ az } x \text{ és az } x_0 \text{ között van.}
\end{aligned}$$

◊

14.2. Feladat. *A Taylor-formula segítségével határozzuk meg az alábbi értékeket a megadott r pontossággal!*

a) e, $\quad r = 10^{-3}$ (*3 tizedesjegy pontosság.*)

Megoldás.
Az $f(x) = e^x$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor polinomjával fogunk közelíteni.

$$e = f(1) = T_n(1) + R_n(1) \quad \Rightarrow \quad e \approx T_n(1).$$

Olyan n-et kell választunk melynél a hiba:

$$|e - T_n(1)| = |R_n(1)| < 10^{-3}.$$

Ehhez írjuk fel a Lagrange-féle maradék tagot

$$|R_n(1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} \right|$$

Mivel $f^{(n+1)}(x) = e^x$ ($\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},$) és $0 < \xi < 1$, ezért $f^{(n+1)}(\xi) \le e^1 < 3$. Így

$$|R_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!} \le 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)! \ge 3000.$$

◊

Mivel $7! = 5040$, így $n+1 \geq 7$ ($n \geq 6$) esetben $T_n(1)$ már elég jó közelítést ad:

$$\begin{aligned}T_6(x) &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{720}x^6\\ T_6(1) &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720} = 2+\frac{517}{120} \approx 2{,}71806.\end{aligned}$$

b) $\lg 11, \quad r = 10^{-5}$

Megoldás.
Az $f(x) = \lg x$ függvény $x_0 = 10$ körüli Taylor polinomjával fogunk közelíteni. Írjuk fel az $f(x)$ deriváltjait egészen addig, amíg meg nem sejtjük az $n+1$-edik derivált általános alakját!

$$\begin{aligned}f(x) &= \lg x\\ f'(x) &= \frac{1}{x \ln 10} = \frac{1}{\ln 10}\cdot(-1)^0\cdot 0!\cdot\frac{1}{x^1}\\ f''(x) &= \frac{1}{\ln 10}\cdot(-1)x^{-2} = \frac{1}{\ln 10}\cdot(-1)^1\cdot 1!\cdot\frac{1}{x^2}\\ f'''(x) &= \frac{1}{\ln 10}\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot x^{-3} = \frac{1}{\ln 10}\cdot(-1)^2\cdot 2!\cdot\frac{1}{x^3}\\ &\vdots\\ f^{(n+1)}(x) &= \frac{1}{\ln 10}\cdot(-1)^n\cdot n!\cdot\frac{1}{x^{n+1}}\end{aligned}$$

A Lagrange-féle maradéktag felírásánál tehát az alábbi helyettesítési értékre van szükségünk:

$$f^{(n+1)}(\xi) = \frac{1}{\ln 10}\cdot(-1)^n\cdot n!\cdot\frac{1}{\xi^{n+1}} \quad \text{ahol } \xi \ x \text{ és } x_0 \text{ között van.}$$

Így a hiba:

$$|\lg 11 - T_n(11)| = |R_n(11)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(11-10)^{n+1}\right| = \frac{\frac{1}{\ln 10}\cdot n!\cdot\frac{1}{\xi^{n+1}}}{(n+1)!} = \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\xi^{n+1}}.$$

Mivel $10 \leq \xi \leq 11$, ezért igaz a következő becslés:

$$|R_n(11)| = \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\xi^{n+1}} \leq \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{10^{n+1}} \overset{*}{<} \frac{1}{10^{n+1}}$$

* Mivel $(n+1)\cdot\ln 10 > 1$.

Így akkor megfelelő a közelítés, ha

$$\frac{1}{10^{n+1}} \leq \frac{1}{10^5} \quad \Leftrightarrow \quad 10^{n+1} \geq 10^5 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 4.$$

Most már felírható a negyedik Taylor polinom:

$$\begin{aligned}f(x) &= \lg x & f(10) &= \lg(10) = 1\\ f'(x) &= = \tfrac{1}{\ln 10}\cdot\tfrac{1}{x^1} & f'(10) &= \tfrac{1}{\ln(10)}\cdot\tfrac{1}{10}\\ f''(x) &= -\tfrac{1}{\ln 10}x^{-2} & f''(10) &= -\tfrac{1}{\ln(10)}\cdot\tfrac{1}{100}\\ f'''(x) &= \tfrac{2}{\ln 10}\cdot x^{-3} & f'''(10) &= \tfrac{2}{\ln(10)}\cdot\tfrac{1}{1000}\\ f^{(4)}(x) &= -\tfrac{6}{\ln 10}\cdot\tfrac{1}{10000} & f^{(4)}(10) &= -\tfrac{6}{\ln(10)}\cdot\tfrac{1}{10000}\end{aligned}$$

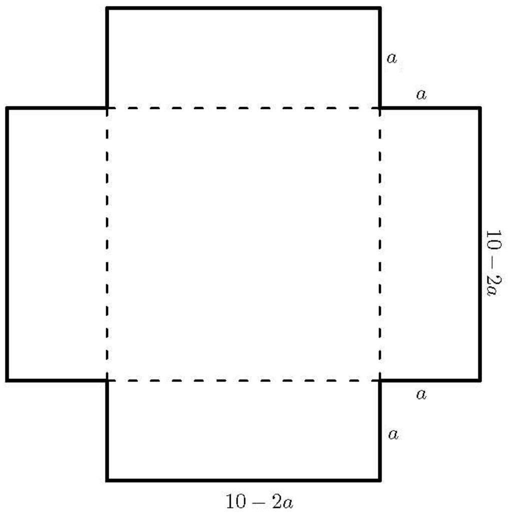
◊

$$\begin{aligned} T_4(11) &= 1+\frac{\frac{1}{\ln(10)}\cdot\frac{1}{10}}{1!}(11-10)^1+\frac{-\frac{1}{\ln(10)}\cdot\frac{1}{100}}{2!}(11-10)^2+\frac{\frac{2}{\ln(10)}\cdot\frac{1}{1000}}{3!}(11-10)^3+ \\ &+\frac{-\frac{6}{\ln(10)}\cdot\frac{1}{10000}}{4!}(11-10)^4 = 1+\frac{1}{\ln(10)}\cdot\frac{1}{10}-\frac{1}{\ln(10)}\cdot\frac{1}{200}+\frac{1}{\ln(10)}\cdot\frac{1}{3000}- \\ &-\frac{1}{\ln(10)}\cdot\frac{1}{40000}\approx 1{,}04139. \end{aligned}$$

14.1.2. Szöveges szélsőérték feladatok

14.3. Feladat. *Egy* $100cm^2$ *területű négyzet alakú lemez sarkaiból egybevágó négyzeteket vágunk le, majd a lemez széleit felhajtjuk és dobozt készítünk. Mekkora legyen a levágott négyzetek oldala, hogy a doboz térfogata maximális legyen?*

Megoldás.



$$V=(10-2a)^2\cdot a=(100-40a+4a^2)\cdot a=$$

$$=4a^3-40a^2+100a \quad 0\le a\le 5$$

A $V(a)=4a^3-40a^2+100a$ térfogatfüggvénynek akkor lehet szélsőértéke, ha a deriváltja 0 (Mivel $V\in\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$).

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=12a^2-80a+100 &= 0 \\ 3a^2-20a+25 &= 0 \end{aligned}$$

$$a_{1,2}=\frac{20\pm\sqrt{400-300}}{6}=\frac{20\pm 10}{6}= \begin{cases} a_1=5 \\ a_2=\frac{5}{3} \end{cases}$$

Hogy valóban maximum van-e az adott helyeken, az alábbi módszerekkel ellenőrizhető:

a) Második (vagy magasabbrendű) derivált segítségével. Ha az a_0 helyen $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=0$, de a $\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}$ második derivált nem 0, akkor ott a függvénynek szélsőértéke van. A második derivált előjeléből megállapítható a szélsőérték típusa is, nevezetesen, ha $\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}>0$, akkor lokális minimum, egyébként lokális maximum van az a_0 pontban.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2} &= 24a-80 \\ \left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a_1} &= 120-80=40>0 \Rightarrow \text{ lokális minimum. (Nyilvánvaló is volt.)} \\ \left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a_2} &= 24\cdot\frac{5}{3}-80=-40<0 \Rightarrow \text{ lokális maximum.} \end{aligned}$$

Mivel ez az egyetlen lokális maximum hely van a [0,5] intervallumon, ezért ez abszolút maximum is.

14.1. Megjegyzés. *Ha a második derivált is 0, akkor az első nem-nulla derivált segítségével vizsgálódhatunk. Ha ez az $f^{(n)}$ n-edik derivált és n páros, akkor f-nek a kérdéses pontban szélsőértéke van, amelynek típusát az előző módszerhez hasonlóan dönthetjük el, ha n páratlan, akkor f-nek inflexiós pontja van. Erről a jövő órán beszélünk bővebben.*

b) Táblázattal.

Ha a derivált az adott helyen 0 és előjelet vált, akkor szélsőértékhely van. Ha a derivált pozitívból válik negatívvá, akkor lokális maximum, egyébként lokális minimum van.

A derivált előjele könnyebben vizsgálható, ha szorzattá alakítjuk:

$$V'(a) = (a-5)\cdot(a-\frac{5}{3})$$

	$0 < a < a_2$	a_2	$a_2 < a < 5$
V'	$+$	0	$-$
V	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

14.2. Megjegyzés. *Általános esetben, ha a függvény zárt intervallumon értelmezett, külön meg kell vizsgálnunk az intervallum végpontjait. Most nyilvánvaló volt, hogy a végpontokban nem lehet maximum, hiszen ott a doboz térfogata 0 lenne.*

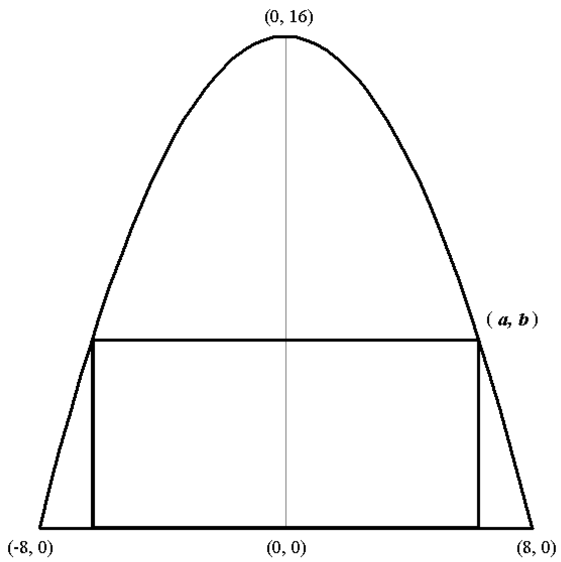
A maximális térfogatot tehát akkor kapjuk, ha a lemezből $a=\frac{5}{3}$ oldalú négyzeteket vágunk le, ekkor a térfogat:

$$V\left(\frac{5}{3}\right) = 4\cdot\frac{5^3}{3^3} - 40\cdot\frac{5^2}{3^2} + 100\cdot\frac{5}{3} = \frac{2000}{27} \approx 74{,}07(cm^3).$$

♢

14.4. Feladat. *Egy parabolaszelet alakú ablak szélessége és magassága egyaránt* $16dm$. *Mekkora az a legnagyobb területű téglalap alakú mozaiklap, amely elhelyezhető úgy az ablakban, hogy szimmetria-tengelyük közös legyen?*

Megoldás.



Először határozzuk meg a parabola egyenletét:

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

A három paraméter az alábbi egyenletekből kapható:

1.) $P_1(0,\ 16)$ pont a parabolán van:

$$16 = \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 + \gamma \ \Rightarrow\ \gamma = 16$$

2.) $P_2(-8,\ 0)$ pont a parabolán van:

$$0 = \alpha\cdot 64 - \beta\cdot 8 + 16$$

3.) $P_3(8,\ 0)$ pont a parabolán van:

$$0 = \alpha\cdot 64 + \beta\cdot 8 + 16$$

A (2) és (3) egyenletet kivonva egymásból kapható:

$$16\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0,$$

illetve összeadva a két egyenletet:

$$128\alpha + 32 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{4}.$$

Így a parabola egyenlete:

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 16$$

Az ábrán látható téglalap területe: $T(a,b) = 2\cdot a\cdot b$, ahol $0 \le a \le 8$ és $0 \le b \le 16$. De mivel az (a,b) pont szintén a parabolán van, ezért:

$$b = 16 - \frac{1}{4}a^2.$$

Ezt visszaírva a kétváltozós területfüggvénybe, a következő, most már egyváltozós függvényt kapjuk:

$$T(a) = 2\cdot a\cdot(16 - \frac{1}{4}a^2) = 32a - \frac{1}{2}a^3, \quad 0 \le a \le 8.$$

Mivel $T \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}$, ezért ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0:

$$\begin{aligned} T'(a) = 32 - \frac{3}{2}a^2 &= 0 \\ 32 &= \frac{3}{2}a^2 \\ \frac{64}{3} &= a^2 \\ \pm\frac{8}{\sqrt{3}} &= a \end{aligned}$$

A kapott eredmények közül csak az $a = \frac{8}{\sqrt{3}}$ esik az értelmezési tartományba. (A negatív gyök ugyanezen téglalap másik csúcsának x-koordinátáját adja meg.)

A „szélsőérték-gyanús” helyek további vizsgálatára az előző feladatban bemutatott két módszer bármelyike alkalmazható:

a) *Második (vagy magasabbrendű) derivált segítségével.*

$$\begin{aligned} T''(a) &= -3a \\ T''\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right) &= -3\cdot\frac{8}{\sqrt{3}} < 0. \end{aligned}$$

Így T-nek $\frac{8}{\sqrt{3}}$-ban lokális maximuma van.

b) *Táblázattal.*

A derivált előjele könnyebben vizsgálható, ha szorzattá alakítjuk:

$$T'(a) = \frac{3}{2}(\frac{8}{\sqrt{3}} - a)\cdot(\frac{8}{\sqrt{3}} + a).$$

	$0 < a < \frac{8}{\sqrt{3}}$	$a = \frac{8}{\sqrt{3}}$	$\frac{8}{\sqrt{3}} < a < 8$
T'	$+$	0	$-$
T	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

A tartományon csak egyetlen lokális maximum van, így az lesz az abszolút maximum is.

14.3. Megjegyzés. *Általános esetben, ha a függvény zárt intervallumon értelmezett, külön meg kell vizsgálnunk az intervallum végpontjait. Most nyilvánvaló volt, hogy a végpontokban nem lehet maximum, hiszen ott a terület 0 lenne, de a monotonitási viszonyok alapján is látható.*

Ha $a = \frac{8}{\sqrt{3}}$, akkor $b = 16 - \frac{a^2}{4} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$ A maximális területet tehát akkor kapjuk, ha a téglalap csúcsa az $(a,\ b) = \left(\frac{8}{\sqrt{3}},\ \frac{32}{3}\right)$ pont. Ekkor a maximális terület:

$$T = 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{32}{3} = \frac{512}{3 \cdot \sqrt{3}} \approx 98{,}53(dm^2).$$

◊

14.2. Házi Feladatok

14.1. Házi Feladat. *Írjuk fel az alábbi függvények adott ponthoz tartozó megadott fokszámú Taylor-polinomját és a Lagrange-féle maradéktagot!*

a) Az $f(x) = e^{-x}, \quad n = 5, \quad x_0 = 0$ *megoldás*

b) Az $f(x) = \sin^2 x, \quad n = 4, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$ *megoldás*

14.2. Házi Feladat. *A Taylor-formula felhasználásával határozzuk meg az alábbi értékeket a megadott r pontossággal.*

a) $\sin 1^o, \quad r = 10^{-5}$ *megoldás*

b) $\ln 3, \quad r = \frac{1}{100}$ *megoldás*

14.3. Házi Feladat. *Osszuk fel a 8-at két részre úgy, hogy a részek négyzetösszege minimális legyen!*

megoldás

14.4. Házi Feladat. *Egy vasút mellett fekvő A helységből bizonyos áruszállítmányt irányítanak a vasúttól* 9*km távolságra lévő B helységbe. B-nek a vasútvonalra való vetülete A-tól* 30*km távolságra van. Tudjuk, hogy* 1 *tonna áru vasúti szállítási költsége* α*, tehergépkocsival való szállítási költsége pedig* $\beta(> \alpha)$*. Határozzuk meg a vasútnak azt a pontját, ahonnan a B helységbe vezető egyenes útnak indulnia kell ahhoz, hogy a szállítás a lehető legolcsóbb legyen! Ha valakinek problémát okoz a paraméteres tárgyalás, először oldja meg a feladatot* $\alpha = 1$ *és* $\beta = 1{,}5$ *esetén.*

megoldás

14.5. Házi Feladat. *Egy épülő atlétika pályán két párhuzamos egyenes szakaszból és az őket összekötő félkörívekből áll a futópálya. Hogyan kell kialakítani a pálya alakját, hogy a futópálya hossza* 400*m legyen és a lehető legnagyobb területű, téglalap alakú focipálya férjen el a belsejében?*

megoldás

14.3. Megoldások

14.1. Házi Feladat. *Írjuk fel az alábbi függvények adott ponthoz tartozó megadott fokszámú Taylor-polinomját és a Lagrange-féle maradéktagot!*

a) Az $f(x) = e^{-x}$ $\quad n = 5 \quad x_0 = 0$

Megoldás.

$$\begin{array}{rclcrcl}
f(x) & = & e^{-x} & \qquad & f(x_0) & = & e^0 = 1 \\
f'(x) & = & -e^{-x} & & f'(x_0) & = & -e^0 = -1 \\
f''(x) & = & e^{-x} & & f''(x_0) & = & e^0 = 1 \\
f'''(x) & = & -e^{-x} & & f'''(x_0) & = & -e^0 = -1 \\
f^{(4)}(x) & = & e^{-x} & & f^{(4)}(x_0) & = & e^0 = 1 \\
f^{(5)}(x) & = & -e^{-x} & & f^{(5)}(x_0) & = & -e^0 = -1 \\
f^{(6)}(x) & = & e^{-x} & & f^{(6)}(\xi) & = & e^{-\xi}
\end{array}$$

◊

$$\begin{aligned}
T_5(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3 + \\
&\quad + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}\cdot(x-x_0)^4 + \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}\cdot(x-x_0)^5 \\
T_5(x) &= 1 - x + \frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{24}\cdot x^4 - \frac{1}{120}\cdot x^5 \\
R_5(x) &= \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\cdot x^6 = \frac{e^{-\xi}}{720}\cdot x^6, \quad \text{ahol } \xi \text{ az } x \text{ és az } x_0 \text{ között van.}
\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

b) Az $f(x) = \sin^2 x$ $\quad n = 4 \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

Megoldás.

$$\begin{array}{rclcrcl}
f(x) & = & \sin^2 x & \qquad & f(x_0) & = & \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 \\
f'(x) & = & 2\sin x \cos x = \sin 2x & & f'(x_0) & = & \sin \pi = 0 \\
f''(x) & = & 2\cos 2x & & f''(x_0) & = & 2\cos \pi = -2 \\
f'''(x) & = & -4\sin 2x & & f'''(x_0) & = & -4\sin \pi = 0 \\
f^{(4)}(x) & = & -8\cos 2x & & f^{(4)}(x_0) & = & -8\cos \pi = 8 \\
f^{(5)}(x) & = & 16\sin 2x & & f^{(5)}(\xi) & = & 16\sin 2\xi
\end{array}$$

◊

$$\begin{aligned}
T_4(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3 + \\
&\quad + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}\cdot(x-x_0)^4 = 1 - \frac{2}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2 + \frac{8}{24}\cdot(x-\frac{\pi}{2})^4 = 1 - (x-\frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{3}\cdot(x-\frac{\pi}{2})^4 \\
R_4(x) &= \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\cdot(x-x_0)^5 = \frac{16\sin 2\xi}{120}\cdot(x-\frac{\pi}{2})^5, \quad \text{ahol } \xi \text{ az } x \text{ és az } x_0 \text{ között van.}
\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

14.2. Házi Feladat. *A Taylor-formula felhasználásával határozzuk meg az alábbi értékeket a megadott r pontossággal.*

a) $\sin 1^o \quad r = 10^{-5}$

Megoldás.

$$1^o = \frac{\pi}{180} \quad \Rightarrow \sin\frac{\pi}{180} = ?$$

Az $f(x)$=$\sin x$ függvény x_0=0 körüli Taylor-polinomjával (MacLaurin-polinom) közelítünk. Ehhez írjuk fel a függvény deriváltjait, egészen addig, amíg fel nem tudjuk írni általánosan az $f^{(n+1)}(x)$ $(n+1)$-edik deriváltat, amelyre a maradéktag becslésénél lesz szükségünk:

$$\begin{array}{rcl} f(x) &=& \sin x \\ f'(x) &=& \cos x \\ f''(x) &=& -\sin x \\ f'''(x) &=& -\cos x \\ f^{(4)}(x) &=& \sin x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f(x_0) &=& \sin 0 = 0 \\ f'(x_0) &=& \cos 0 = 1 \\ f''(x_0) &=& -\sin 0 = 0 \\ f'''(x_0) &=& -\cos 0 = -1 \\ f^{(4)}(x_0) &=& \sin 0 = 0 \end{array}$$

Ha n páratlan, akkor

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin x \quad f^{(n+1)}(\xi) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin \xi$$

$$R_n\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin \xi}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} \quad \text{ahol } \xi \in [0, \ \frac{\pi}{180}]$$

Így a hiba:

$$\begin{aligned} \left|R_n\left(\frac{\pi}{180}\right)\right| &= \frac{|\sin \xi|}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{\pi}{180} - 0\right)^{n+1} = \frac{\sin \xi}{(n+1)!} \cdot \frac{\pi^{n+1}}{180^{n+1}} < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{4^{n+1}}{160^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{40}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{40}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|R_n\left(\frac{\pi}{180}\right)\right| < \left(\frac{1}{40}\right)^{n+1} &< 10^{-5} \\ 100\ 000 &< 40^{n+1} \end{aligned}$$

$n = 3$ már megfelelő pontosságot ad, hiszen $40^{3+1} = 2\ 560\ 000$. (Ha n páros, akkor is tekinthetjük ezt a hibabecslést, mert $f^{(n+1)}(x_0) = 0 \ \Rightarrow \ T_n(x) = T_{n+1}(x)$.)

Így

$$\sin\left(\frac{\pi}{180}\right) = 0 + \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right) + \frac{0}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \approx 0{,}01745. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

b) $\ln 3 \quad r = \dfrac{1}{100}$

Megoldás.
Az $f(x) = \ln x$ függvény $x_0 = e$ körüli Taylor-polinomjával közelítünk. Ehhez írjuk fel a függvény deriváltjait, egészen addig, amíg fel nem tudjuk írni általánosan az $f^{(n+1)}(x)$ $(n+1)$-edik deriváltat, amelyre a maradéktag becslésénél lesz szükségünk:

$$\begin{array}{rcl} f(x) &=& \ln x \\ f'(x) &=& \frac{1}{x} \\ f''(x) &=& -\frac{1}{x^2} \\ f'''(x) &=& 2\frac{1}{x^3} \\ f^{(4)}(x) &=& -\frac{3!}{x^4} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f(x_0) &=& \ln e = 1 \\ f'(x_0) &=& \frac{1}{e} \\ f''(x_0) &=& -\frac{1}{e^2} \\ f'''(x_0) &=& \frac{2}{e^3} \\ f^{(4)}(x_0) &=& -\frac{3!}{e^4} \end{array}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot \frac{1}{x^{n+1}} \qquad f^{(n+1)}(\xi) = (-1)^n \cdot n! \cdot \frac{1}{\xi^{n+1}}$$

$$R_n(3) = \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot \frac{1}{\xi^{n+1}}}{(n+1)!}(3-e)^{n+1} = \frac{(-1)^n \cdot \frac{1}{\xi^{n+1}}}{n+1}(3-e)^{n+1} \quad \text{ahol } \xi \in [3,\ e]$$

Így a hiba:

$$|R_n(3)| = \frac{\frac{1}{\xi^{n+1}}}{n+1}\underbrace{(3-e)^{n+1}}_{<1} < \frac{1}{(n+1)\xi^{n+1}} < \frac{1}{\xi^{n+1}} < \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$\begin{array}{rcl} |R_n(3)| < \dfrac{1}{3^{n+1}} &<& 10^{-2} \\ 100 &<& 3^{n+1} \end{array}$$

$n = 4$ már megfelelő pontosságot ad, hiszen $3^5 = 243$.

Így

$$\ln 3 \approx 1 + \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{e}(3-e) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^2}(3-e)^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{e^3}(3-e)^3 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{e^4}(3-e)^4 \approx 1{,}0986.$$

♢
vissza a feladathoz

14.3. Házi Feladat. *Osszuk fel a 8-at két részre úgy, hogy a részek négyzetösszege minimális legyen!*

Megoldás.
A két rész legyen x és $8-x$! Ekkor a cél, hogy az

$$f(x) = x^2 + (8-x)^2$$

függvény minimális legyen. Mivel f mindenhol differenciálható, ezért f-nek csak ott lehet szélsőértéke, ahol $f'(x) = 0$.

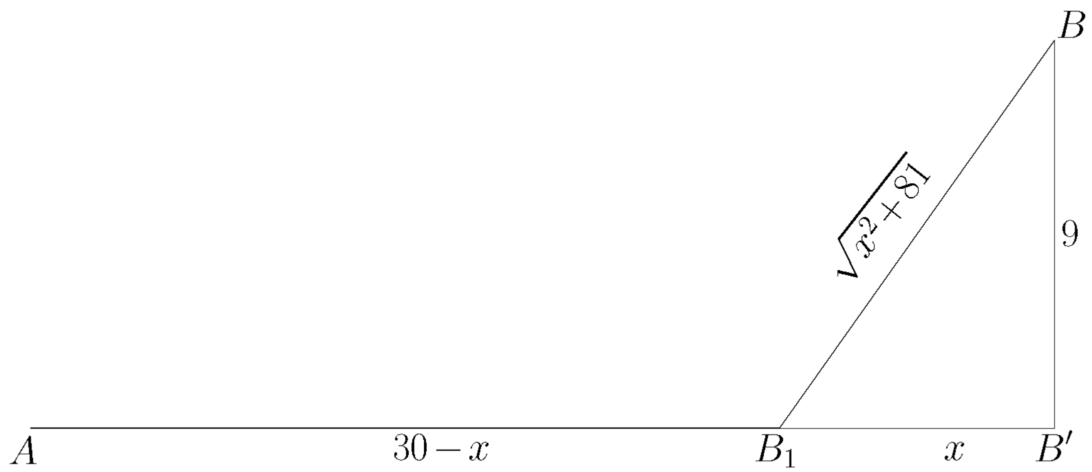
$$f'(x) = 2x + 2\cdot(8-x)\cdot(-1) = 4x - 16 = 0 \quad \Rightarrow x = 4.$$

Mivel $f''(x) = 4 > 0$, ezért $x_0 = 4$-ben valóban lokális minimum van. Mivel ez az egyetlen lokális minimum hely, ezért egyben abszolút minimum is.

♢
vissza a feladathoz

14.4. Házi Feladat. *Egy vasút mellett fekvő A helységből bizonyos áruszállítmányt irányítanak a vasúttól $9km$ távolságra lévő B helységbe. B-nek a vasútvonalra való vetülete A-tól $30km$ távolságra van. Tudjuk, hogy 1 tonna áru vasúti szállítási költsége α, tehergépkocsival való szállítási költsége pedig $\beta(>\alpha)$. Határozzuk meg a vasútnak azt a pontját, ahonnan a B helységbe vezető egyenes útnak indulnia kell ahhoz, hogy a szállítás a lehető legolcsóbb legyen! Ha valakinek problémát okoz a paraméteres tárgyalás, először oldja meg a feladatot $\alpha=1$ és $\beta=1{,}5$ esetén.*

Megoldás.



Legyen $f(x)$ a szállítási költség, ha x az átrakodási pont (B_1) távolsága B'-től:

$$f(x)=\alpha(30-x)+\beta\sqrt{x^2+81} \quad x\in[0,\ 30]$$

Akkor lehet szélsőértéke a függvénynek, ha a deriváltja 0:

$$f'(x)=-\alpha+\beta\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+81}}\cdot 2x$$

$$\begin{aligned}
-\alpha+\beta\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+81}} &= 0\\
\beta\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+81}} &= \alpha\\
\beta\cdot x &= \alpha\sqrt{x^2+81}, \qquad \alpha,\beta,x>0\\
\beta^2\cdot x^2 &= \alpha^2\cdot(x^2+81)\\
(\beta^2-\alpha^2)x^2 &= 81\alpha^2\\
x^2 &= \frac{81\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}\\
x &= \pm\frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}
\end{aligned}$$

Mivel $x>0$, ezért $x_0=\frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}$.

Vizsgáljuk most az elégséges feltételek valamelyikét:

a) Nézzük meg, hogy a derivált a pontban előjelet vált-e:

$$f'(x) = -\alpha + \beta \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+81}} = \frac{-\alpha \cdot \sqrt{x^2+81} + \beta \cdot x}{\sqrt{x^2+81}}$$

Mivel a fenti tört nevezője mindig pozitív, ezért az előjele megegyezik a számlálójának előjelével:
Legyen $g(x) := \beta \cdot x - \alpha \cdot \sqrt{x^2+81}$, $g(x)$ és így a tört is pontosan akkor negatív, ha

$$\begin{aligned} 0 < \beta \cdot x &< \alpha \cdot \sqrt{x^2+81} \\ \beta^2 x^2 &< \alpha^2 \cdot (x^2+81) \\ (\beta^2-\alpha^2)x^2 &< 81\alpha^2, \qquad \beta^2-\alpha^2 > 0 \\ x^2 &< \frac{81\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2} \\ |x| &< \frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}} \end{aligned}$$

$$-\frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}} < x < \frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}$$

A fenti eredményt összevetve az eredeti függvény értelmezési tartományával:

	$0 < x < x_0$	$x = x_0$	$x_0 < x$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Ebben a pontban tehát valóban minimuma van a költségnek, a függvény menetéből az is látszik, hogy az értelmezési tartomány végpontjaiban a függvénynek nem lehet minimuma, így az $x_0 = \frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}$ pontban abszolút minimuma van.

b) Vizsgáljuk a második deriváltat:

$$f''(x) = \beta \cdot \frac{\sqrt{x^2+81} - x \cdot \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+81}}}{x^2+81} = \beta \cdot \frac{\sqrt{x^2+81} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+81}}}{x^2+81} = \beta \cdot \frac{x^2+81-x^2}{(x^2+81)^{\frac{3}{2}}} = \frac{81\beta}{(x^2+81)^{\frac{3}{2}}} > 0 \quad \forall x.$$

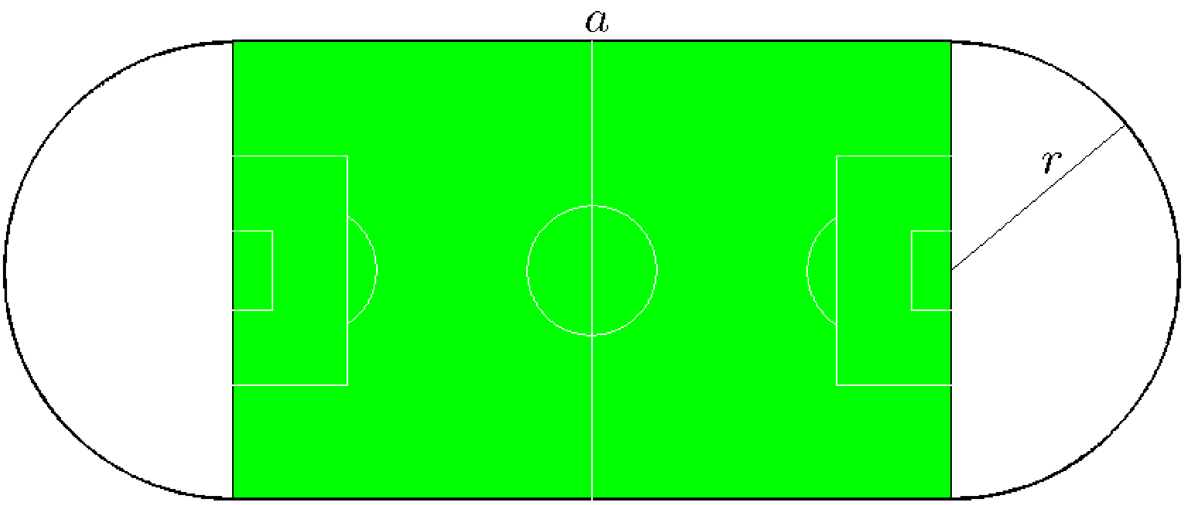
Így x_0-ban lokális minimum van, melynek értéke

$$f(x_0) = \alpha\left(30 - \frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\right) + \beta\sqrt{\frac{81\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2} + 81}.$$

Meg kell még vizsgálnunk, hogy abszolút minimum van-e a pontban. Az értelmezési tartomány belső pontjaiban máshol nem lehet szélsőérték, de a végpontokban ki kellene számítani a költséget. Ehelyett hivatkozhatunk arra, hogy a függvényünk zárt intervallumon értelmezett folytonosan differenciálható függvény, amelynek pontosan egy belső pontban van szélsőértéke. Ezek a tulajdonságok biztosítják, hogy a függvény deriváltja máshol nem válthat előjelet, így
$f(0) > f(x_0)$, mivel a $[0,\ x_0]$ intervallumon a függvény szigorúan monoton csökkenő és
$f(x_0) < f(30)$, mivel a $[x_0,\ 30]$ intervallumon a függvény szigorúan monoton növő. ♢

vissza a feladathoz

14.5. Házi Feladat. *Egy épülő atlétika pályán két párhuzamos egyenes szakaszból és az őket összekötő félkörívekből áll a futópálya. Hogyan kell kialakítani a pálya alakját, hogy a futópálya hossza* $400m$ *legyen és a lehető legnagyobb területű, téglalap alakú focipálya férjen el a belsejében?*



A pálya területe két változó függvényeként írható fel. (Ezek a kör r sugara és a futópálya egyenes szakaszának a hossza. Az értelmezési tartomány egyszerűen meggondolható.)

$$T(a,r) = 2\cdot r\cdot a, \quad 0 \le a \le 200,\ 0 \le r \le \frac{200}{\pi}$$

A $K = 2\cdot r\cdot \pi + 2\cdot a = 400$ feltétel felhasználásával egy-változós területfüggvény is írható:

$$T(r) = 2\cdot r\cdot(200 - r\cdot\pi) = 400\cdot r - 2\cdot r^2\cdot\pi, \quad 0 \le r \le \frac{200}{\pi}$$

Zárt intervallumon értelmezett folytonosan differenciálható függvény szélsőértéke vagy az értelmezési tartomány végpontjában van (most ott biztosan nincs maximum, hiszen a terület mindkét végpont esetében 0), vagy olyan közbülső helyen, ahol a derivált 0:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = 400 - 4r\pi = 0 \quad\Leftrightarrow\quad r = \frac{100}{\pi}.$$

A szükséges feltételek közül például a másodrendű feltételt felírva:

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}r^2} = -4\pi < 0.$$

Azaz a függvénynek az adott pontban maximuma van. Ekkor $a = 200 - r\cdot\pi = 100(m)$. $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

15. fejezet

Teljes függvényvizsgálat

15.1. Gyakorlat

A teljes függvényvizsgálat lépései

I. Alaptulajdonságok megállapítása:

- Értelmezési tartomány meghatározása
- Szimmetria tulajdonságok vizsgálata (paritás, periodicitás)
- Folytonosság vizsgálata
- Differenciálhatóság vizsgálata
- Tengelymetszetek meghatározása (ha lehetséges)

II. Vizsgálatok az első derivált alapján:

- Monotonitási intervallumok meghatározása
- Szélsőértékek keresése

III. Vizsgálatok a második derivált alapján:

- Konvexitási intervallumok meghatározása
- Inflexiós pontok keresése

IV. A függvény határértékei:

- Az értelmezési tartomány végpontjaiban (vagy $\pm\infty$-ben)
- A függvény szinguláris pontjaiban és szakadási helyeinél

V. A derivált határértékei:

- Ahol f folytonos, de nem differenciálható
- Ahol f nem folytonos, de létezik legalább féloldali véges határérték

VI. Aszimptoták:

- Vízszintes aszimptota van, ha $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$, vagy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$
- Függőleges aszimptota, ahol $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ (elég ha az egyoldali határérték végtelen)

- Ferde aszimptota, ha $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m,\ m \in \mathbb{R}$. Ekkor az aszimptota:

$$y = m\cdot x + \underbrace{\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - m\cdot x)}_{b}$$

VII. Ábrázolás

VIII. Értékkészlet leolvasása

15.1. Feladat. *Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az* $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-1}$ *függvényen.*

Megoldás.

I. Alaptulajdonságok megállapítása:

- Értelmezési tartomány, szinguláris helyek:

$$x^2+2x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2} = -1\pm\sqrt{2}$$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\pm\sqrt{2}\} \ \Rightarrow\ x_{1,2} = -1\pm\sqrt{2}$ szinguláris helyek.

- Szimmetria tulajdonságok:
  - Nem páros és nem páratlan, mert

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+2\cdot(-x)-1} = \frac{1}{x^2-2\cdot x-1} \begin{array}{l} \neq f(x) \\ \neq -f(x) = \frac{-1}{x^2+2x-1}. \end{array}$$

  - Nem periodikus.
- Folytonosság, differenciálhatóság:
  Mivel racionális törtfüggvény, ezért a teljes értelmezési tartományán folytonos és mindenhol differenciálható.
- Tengelymetszetek meghatározása:
  - A görbe metszi az y-tengelyt, ha $x=0$. Ekkor $y = \frac{1}{0+2\cdot 0-1} = -1$.
  - A görbe ott metszené az x-tengelyt, ahol $f(x)=0$. De $\frac{1}{x^2+2x-1} \neq 0$, így a görbe nem metszi az x-tengelyt.

II. Vizsgálatok az első derivált alapján:

$$f'(x) = \frac{-1}{(x^2+2x-1)^2}\cdot(2x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1.$$

$$\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f.$$

	$x<-1-\sqrt{2}$	$x=-1-\sqrt{2}$	$-1-\sqrt{2}<x<-1$	$x=-1$	$-1<x<-1+\sqrt{2}$	$x=-1+\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{2}<x$
$f'(x)$	$+$	nem ért.	$+$	0	$-$	nem ért.	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	nem ért.	$\nearrow$	lok. max (y_{max})	$\searrow$	nem ért.	$\searrow$

$y_{max} = \frac{1}{1-2-1} = -\frac{1}{2}$.

III. Vizsgálatok a második derivált alapján:

$$\begin{aligned} f''(x) = -\frac{2(x^2+2x-1)^2-(2x+2)2(x^2+2x-1)(2x+2)}{(x^2+2x-1)^4} &= 0 \\ 2(x^2+2x-1)^2-(2x+2)2(x^2+2x-1)(2x+2) &= 0 \\ \underbrace{2(x^2+2x-1)}_{\neq 0}\cdot\left(x^2+2x-1-(2x+2)^2\right) &= 0 \\ -3x^2-6x-5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{f''} = \mathcal{D}_f.$$

Mivel $D=36-60<0$ ezért az egyenletnek nincs megoldása, így a függvény nem rendelkezik inflexiós ponttal. Fontos megjegyezni, hogy ennek ellenére a konvexitása megváltozhat a szinguláris pontokban, ezért meg kell vizsgálni a második-derivált előjelét:

	$x<-1-\sqrt{2}$	$x=-1-\sqrt{2}$	$-1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}$	$x=-1+\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{2}<x$
$f''(x)$	$+$	nem ért.	$-$	nem ért.	$+$
$f(x)$	$\smile$	nem ért.	$\frown$	nem ért.	$\smile$

Összevont táblázat:

	$x<-1-\sqrt{2}$	$x=-1-\sqrt{2}$	$-1-\sqrt{2}<x<-1$	$x=-1$	$-1<x<-1+\sqrt{2}$	$x=-1+\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{2}<x$
$f'(x)$	$+$	nem ért.	$+$	0	$-$	nem ért.	$-$
$f''(x)$	$+$	nem ért.	$-$	$-$	$-$	nem ért.	$+$
$f(x)$	$\smile\nearrow$	nem ért.	$\frown\nearrow$	lok. max (y_{max})	$\frown\searrow$	nem ért.	$\smile\searrow$

IV. A függvény határértékei:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+2x-1} = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+2x-1} = 0 \quad \lim_{x\to x_1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_1^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to x_2^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to x_2^+} f(x) = \infty$$

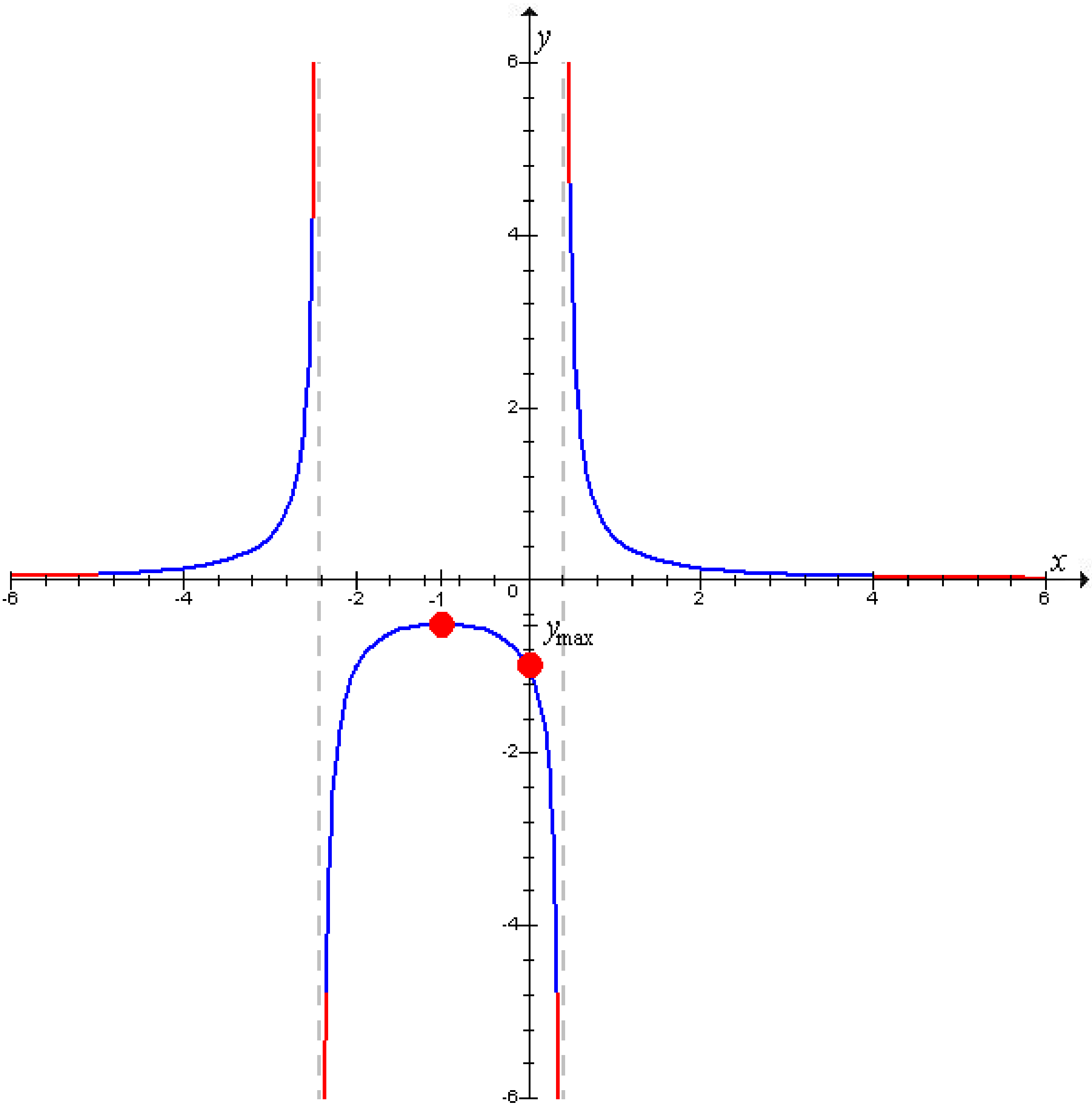
V. A derivált határértékei:

Mivel a függvény teljes értelmezési tartományán folytonosan differenciálható, ezért nem szükséges a derivált határértékeit vizsgálni.

VI. Aszimptoták:

- Vízszintes aszimptota: $y=0$ egyenes, mind plusz, mind mínusz végtelenben ehhez az egyeneshez simul a görbe.
- Függőleges aszimtoták: $x=x_1=-1-\sqrt{2}$ és az $x=x_1=-1+\sqrt{2}$ egyenesek.
- Ferde aszimptota nincs. (Ha két vízszintes aszimptota van, akkor nem lehet ferde. De indokolható a szokásos módon is.)

VII. Ábrázolás:



VIII. Érték készlet: $\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \left(-\frac{1}{2},\ 0\right]$. ♢

15.2. Feladat. *Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az* $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$ *függvényen.*

Megoldás.

I. Alaptulajdonságok megállapítása:

- Értelmezési tartomány, szinguláris helyek: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, így $x = -1$ szinguláris hely.

- Szimmetria tulajdonságok:
  - Nem páros és nem páratlan, mert

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x+1} \begin{array}{l} \neq\ f(x) \\ \neq\ -f(x) = -x - \frac{1}{x+1}. \end{array}$$

  - Nem periodikus.
- Folytonosság, differenciálhatóság: Mivel racionális-tört függvény, ezért a teljes értelmezési tartományán folytonos és mindenhol differenciálható.
- Tengelymetszetek meghatározása (ha lehetséges):
  - A görbe metszi az y-tengelyt, ha $x = 0$. Ekkor $y = 0 + \frac{1}{0+1} = 1$.
  - A görbe ott metszené az x-tengelyt, ahol $f(x) = 0$. De mivel az

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

kifejezés pontosan akkor nulla, ha a számláló nulla. A számláló viszont egy pozitív főegyütthatós, negatív diszkriminánsú ($D = 1-4 < 0$) másodfokú kifejezés, így a számláló bármely valós x esetén pozitív, a görbe tehát nem metszi az x-tengelyt.

II. Vizsgálatok az első derivált alapján:

$$f'(x) = 1 + (-1)\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 1 + (-1)\frac{1}{(x+1)^2} &= 0 \\ \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} &= 0 \\ x^2 + 2x &= 0 \\ x(x+2) &= 0. \end{aligned}$$

Tehát a lehetséges szélsőértékhelyek: $x_1 = -2$ és $x_2 = 0$.

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	nem ért.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max (y_{max})	$\searrow$	nem ért.	$\searrow$	lok. min (y_{min})	$\nearrow$

$$y_{max} = -2 + \frac{1}{1-2} = -3, \quad y_{min} = 0 + \frac{1}{1-0} = 1.$$

III. Vizsgálatok a második derivált alapján:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)\left((x+1)(2x+2) - 2(x^2+2x)\right)}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{2x^2+2x+2x+2-2x^2-4x}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0 \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy $\mathcal{D}_{f''} = \mathcal{D}_f$ és az is, hogy f-nek nincs inflexiós pontja.

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x$
$f''(x)$	$-$	nem ért.	$+$
$f(x)$	$\frown$	nem ért.	$\smile$

Összevont táblázat:

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	nem ért.	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	nem ért.	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\frown\nearrow$	lok. max (y_{max})	$\frown\searrow$	nem ért.	$\smile\searrow$	lok. min (y_{min})	$\smile\nearrow$

IV. A függvény határértékei:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -\infty \\
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \infty \\
\lim_{x\to-1^-} f(x) &= \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+x+1}{x+1} = -\infty \\
\lim_{x\to-1^+} f(x) &= \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2+x+1}{x+1} = +\infty
\end{aligned}$$

V. A derivált határértékei:

Mivel a függvény teljes értelmezési tartományán folytonosan differenciálható, ezért nem szükséges a derivált határértékeit vizsgálni.

VI. Aszimptoták:

- Vízszintes aszimptota nincs, mert nincs „végtelenben véges” határérték.
- Függőleges aszimptota az $x = -1$ egyenes.
- Ferde aszimptota lehet, mivel $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Vizsgáljuk $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} =$ határértéket:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 1 = m_1.$$

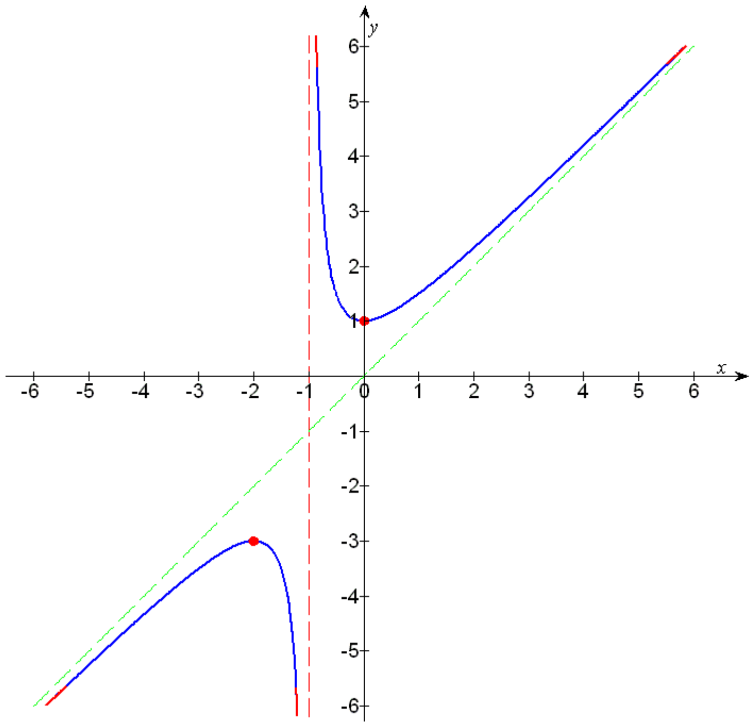
Ekkor

$$b_1 = \lim_{x\to\infty}(f(x) - m_1\cdot x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x + \frac{1}{x+1} - x = \frac{1}{x+1} = 0.$$

Így az aszimptota: $y = x$.

Hasonlóan látható be, hogy mínusz végtelenben is ehhez az egyeneshez simul a görbe.

VII. Ábrázolás:



VIII. Érték készlet: $\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus (-3,\ 1)$. ♢

15.3. Feladat. *Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az* $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ *függvényen.*

Megoldás.

I. Alaptulajdonságok megállapítása:

- Értelmezési tartomány: $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} |\ x > 0\}$, így nincs szinguláris hely.
- Szimmetria tulajdonságok:
  - Nem páros és nem páratlan, hiszen már $\mathcal{D}_f$ sem szimmetrikus.
  - Nem periodikus.
- Az elemi függvények tulajdonságai és a műveleti szabályok miatt a teljes értelmezési tartományon folytonosan differenciálható.
- Tengelymetszetek meghatározása:
  - A görbe nem metszi az y-tengelyt, mivel $0 \notin \mathcal{D}_f$.
  - A görbe ott metszi az x-tengelyt, ahol

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\ln x}{x} &= 0 \\ \ln x &= 0 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

II. Vizsgálatok az első derivált alapján:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$
$$\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$$

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} &= 0 \\ 1-\ln x &= 0 \\ \ln x &= 1 \\ x &= e. \end{aligned}$$

Mivel $x^2 > 0 \forall x \in \mathcal{D}_f$ esetén, ezért a derivált előjele megegyezik a számláló előjelével.

	$0<x<e$	$x=e$	$e<x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max (y_{max})	$\searrow$

$$y_{max} = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}.$$

III. Vizsgálatok a második derivált alapján:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-3x+2x\ln x}{x^4},$$
$$\mathcal{D}_{f''} = \mathcal{D}_f.$$

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{-3x+2x\ln x}{x^4} &= 0 \\ -3x+2x\ln x &= 0 \\ x(-3+2\ln x) &= 0, \quad x \neq 0 \\ -3+2\ln x &= 0 \\ \ln x &= \frac{3}{2} \\ x &= e^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

A második derivált előjele is megegyezik a számláló előjelével, hiszen a nevező minden szóbajöhető x esetén pozitív.

	$0<x<e^{\frac{3}{2}}$	$x=e^{\frac{3}{2}}$	$e^{\frac{3}{2}}<x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	inf. pont (y_{inf})	$\smile$

$$y_{inf} = \frac{\ln e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}}.$$

Összevont táblázat:

	$0<x<e$	$x=e$	$e<x<e^{\frac{3}{2}}$	$x=e^{\frac{3}{2}}$	$e^{\frac{3}{2}}<x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown\nearrow$	lok. max (y_{max})	$\frown\searrow$	inf. pont (y_{inf})	$\smile\searrow$

IV. A függvény határértékei:

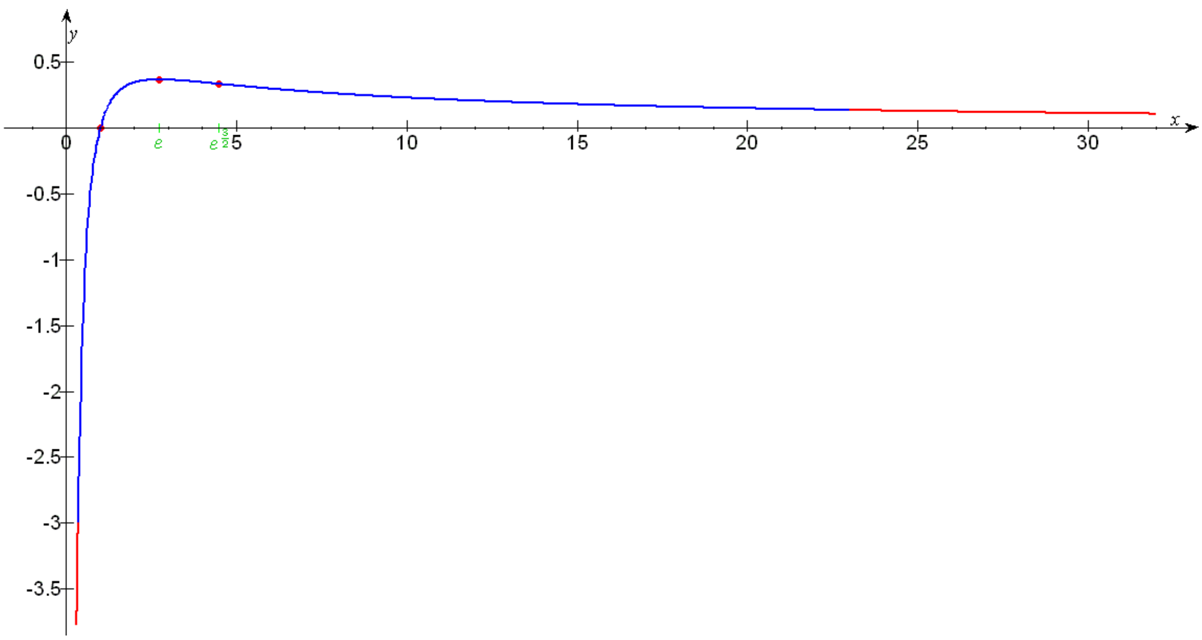
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

V. A derivált határértékei: Mivel a függvény teljes értelmezési tartományán folytonosan differenciálható, ezért nem szükséges a derivált határértékeit vizsgálni.

VI. Aszimptoták:

- Vízszintes aszimptota az $y = 0$ egyenes.
- Függőleges aszimptota, az $x = 0$ egyenes.
- Ferde aszimptota nincs.

VII. Ábrázolás:



VIII. Érték készlet: $\mathcal{R}_f = \left\{y | y \in \mathbb{R}\ y < \frac{1}{e}\right\}$. ♢

15.2. Házi Feladatok

15.1. Házi Feladat. *Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az* $f(x) = 5x^3 - 4x^5$ *függvényen.*

megoldás

15.2. Házi Feladat. *Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az* $f(x) = x \cdot e^{-x} - 1$ *függvényen.*

megoldás

15.3. Házi Feladat. *Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az* $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x+3}$ *függvényen.*

megoldás

15.4. Házi Feladat. *Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az* $f(x) = x \cdot \ln x$ *függvényen.*

megoldás

15.3. Megoldások

15.1. Házi Feladat. *Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = 5x^3 - 4x^5$ függvényen.*

Megoldás.

I. Alaptulajdonságok megállapítása:

- Értelmezési tartomány: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, így nincsenek szinguláris helyek.
- Szimmetria tulajdonságok:
  - A függvény páratlan, mert

    $$f(-x) = 5(-x)^3 - 4(-x)^5 = -5x^3 + 4x^5 = -\left(5x^3 - 4x^5\right) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

    Ezért elégséges a $[0, \infty)$ intervallumon vizsgálni a függvényt, hiszen a képe az origóra szimmetrikus.
  - Nem periodikus.
- Folytonosság, differenciálhatóság:
  Mivel f polinom függvény, ezért a teljes értelmezési tartományán folytonos és mindenhol differenciálható.
- Tengelymetszetek meghatározása (ha lehetséges):
  - Az y-tengelyt az $x = 0$ feltétel teljesülése esetén metszi, ekkor $y = 0$.
  - Az x-tengelyt akkor metszi, ha

    $$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^3 \cdot (5 - 4x^2) &= 0. \end{aligned}$$

    Mivel az $x = 0$ esetet már tárgyaltuk, ezért:

    $$\begin{aligned} 5 - 4x^2 &= 0 \\ 4x^2 &= 5 \\ x_{1,2} &= \pm\frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

II. Vizsgálatok az első derivált alapján:

$$f'(x) = 15x^2 - 20x^4, \quad \mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f.$$

$$\begin{aligned} f'(x) = x^2\left(15 - 20x^2\right) &= 0 \quad x_1 = 0 \\ 20x^2 &= 15 \\ x^2 &= \frac{3}{4} \\ x_{2,3} &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

A paritás miatt csak az $x \geq 0$ esettel foglalkozunk.

	$-\frac{\sqrt{3}}{2}<x<0$	$x=0$	$0<x<\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}<x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	nem szé.	$\nearrow$	lok. max. (y_{max})	$\searrow$

$$y_{max} = \frac{5\cdot 3\sqrt{3}}{8} - \frac{4\cdot 9\sqrt{3}}{32} = \frac{6}{8}\sqrt{3} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

III. Vizsgálatok a második derivált alapján:

$$f''(x) = 30x - 80x^3, \quad \mathcal{D}_{f''} = \mathcal{D}_f.$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 10x\left(3-8x^2\right) &= 0 \quad x_1 = 0 \\ 8x^2 &= 3 \\ x^2 &= \frac{3}{8} \\ x_{2,3} &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

A paritás miatt csak az $x \geq 0$ esettel foglalkozunk.

	$-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}<x<0$	$x=0$	$0<x<\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$x=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}<x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frown$	inf. pont y_{inf_1}	$\smile$	inf. pont y_{inf_2}	$\frown$

$$y_{inf_1} = 0, \quad y_{inf_2} = \frac{21}{64}\cdot\sqrt{6}.$$

IV. A függvény határértékei:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty.$$

V. A derivált határértékei:

Mivel a függvény teljes értelmezési tartományán folytonosan differenciálható, ezért nem szükséges a derivált határértékeit vizsgálni.

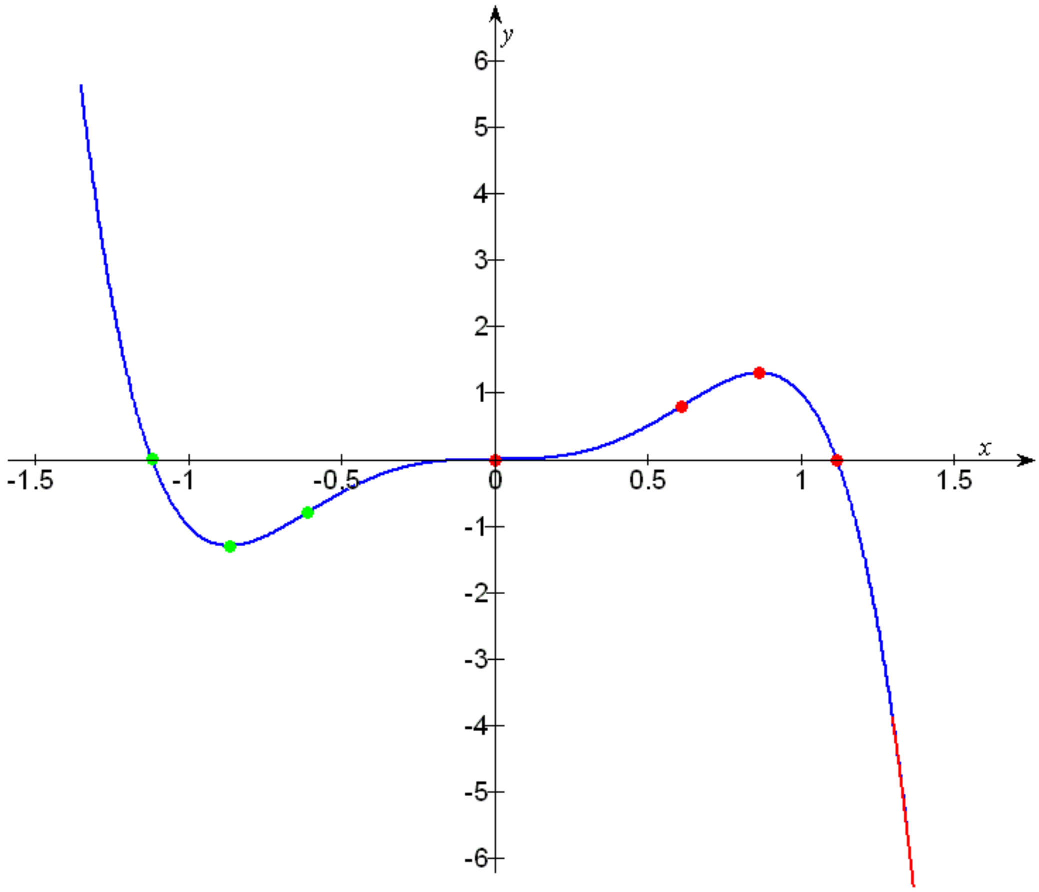
VI. Aszimptoták:

- Vízszintes aszimptota nincs.
- Függőleges aszimptota nincs.
- Ferde aszimptota lehetséges, de mivel

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-4x^5}{x} = \lim_{x\to\infty} 5x^2 - 4x^4 = -\infty,$$

ezért ferde aszimptota sincs.

VII. Ábrázolás:



VIII. Érték készlet: $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$. $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

15.2. Házi Feladat. *Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = x \cdot e^{-x} - 1$ függvényen.*

Megoldás.

I. Alaptulajdonságok megállapítása:

- Értelmezési tartomány: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, így nincsenek szinguláris helyek.
- Szimmetria tulajdonságok:
  - Nem páros és nem páratlan, hiszen

$$f(-x) = -x \cdot e^{x} - 1 \begin{array}{l} \neq \;\; f(x) \\ \neq \;\; -f(x) = -x \cdot e^{-x} + 1. \end{array}$$

  - Nem periodikus.
- Folytonosság, differenciálhatóság:
  Mivel f polinom függvény, ezért a teljes értelmezési tartományán folytonos és mindenhol differenciálható.

- Tengelymetszetek meghatározása:
  - Az y-tengelyt az $x=0$ feltétel teljesülése esetén metszi, ekkor $y=-1$.
  - Az x-tengelyt akkor metszi, ha

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x \cdot e^{-x} - 1 &= 0 \\ x \cdot e^{-x} &= 1 \\ x &= e^{x}. \end{aligned}$$

  Bebizonyítható, hogy a fenti egyenletnek nincs megoldása, így az eredeti függvény nem metszi az x-tengelyt.

II. Vizsgálatok az első derivált alapján:

$$f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} \quad \mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f.$$

$$\begin{aligned} f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0} \cdot (1-x) &= 0 \\ 1-x &= 0 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

	$x<1$	$x=1$	$1<x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max. y_{max}	$\searrow$

$$y_{max} = \frac{1}{e} - 1.$$

III. Vizsgálatok a második derivált alapján:

$$f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x} \cdot (-1) \quad \mathcal{D}_{f''} = \mathcal{D}_f.$$

$$\begin{aligned} f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x} \cdot (-1) = \underbrace{-e^{-x}}_{\neq 0} \cdot (1-x+1) &= 0 \\ 2-x &= 0 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

	$x<2$	$x=2$	$2<x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	inf. pont y_{inf}	$\smile$

$$y_{inf} = 2 \cdot \frac{1}{e^2} - 1.$$

Összevont táblázat:

	$x<1$	$x=1$	$1<x<2$	$x=2$	$2<x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown\nearrow$	lok. max (y_{max})	$\frown\searrow$	inf. pont (y_{inf})	$\smile\searrow$

IV. A függvény határértékei:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}\,\mathrm{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0 \quad\Rightarrow \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}-1=-1.$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x\cdot e^{-x}-1=-\infty.$$

V. A derivált határértékei:

Mivel a függvény teljes értelmezési tartományán folytonosan differenciálható, ezért nem szükséges a derivált határértékeit vizsgálni.

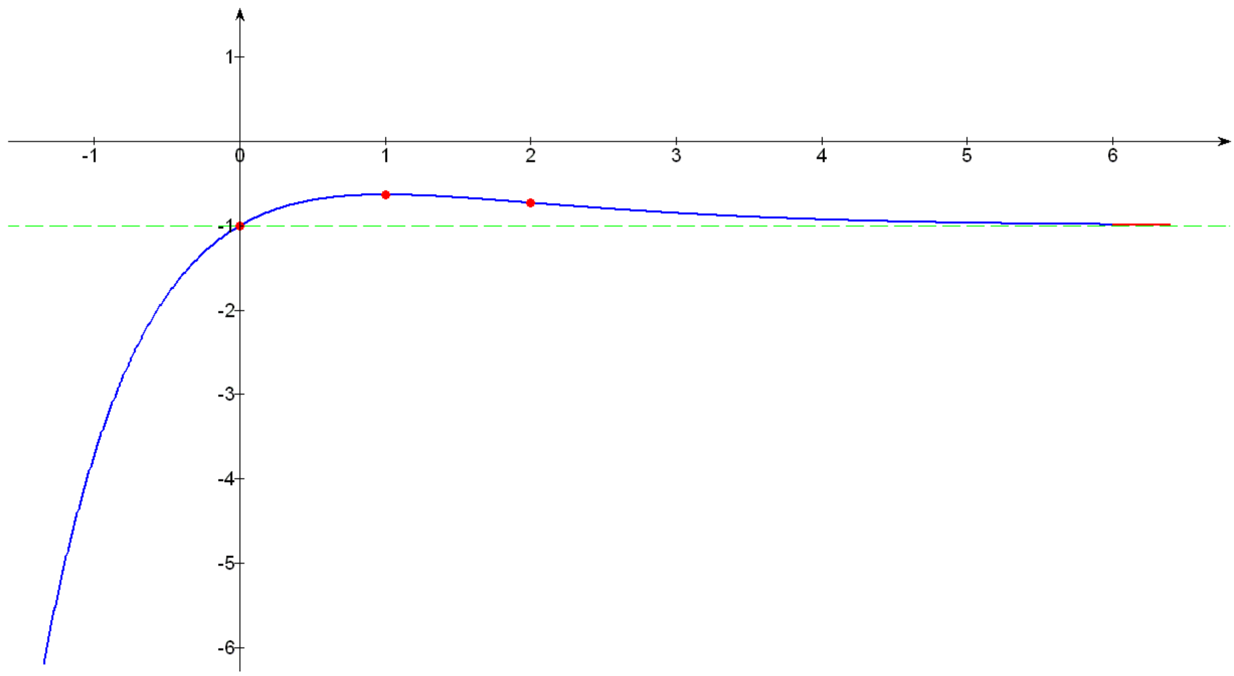
VI. Aszimptoták:

- Vízszintes aszimptota van, mivel $\lim_{x\to\infty}f(x)=-1$, így plusz végtelenben az $y=-1$ egyenes az aszimptota.
- Függőleges aszimptota nincs.
- Ferde aszimptota lehetne, mert $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, de

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=\infty\notin\mathbb{R}.$$

Tehát nincs ferde aszimptota.

VII. Ábrázolás:



VIII. Érték készlet: $\mathcal{R}_f=\left\{y|y\in\mathbb{R},\ y\leq\frac{1}{e}-1\right\}$. ♢

vissza a feladathoz

15.3. Házi Feladat. *Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az* $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x+3}$. *függvényen.*

Megoldás.

I. Alaptulajdonságok megállapítása:

- Értelmezési tartomány: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-3\} \Rightarrow x = -3$ szinguláris hely.
- Szimmetria tulajdonságok:
  - Nem páros és nem páratlan, hiszen

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+3(-x)+2}{-x+3} = \frac{x^2-3x+2}{-x+3} \begin{array}{l} \neq f(x) \\ \neq -f(x) = -\frac{x^2+3x+2}{x+3}. \end{array}$$

  - Nem periodikus.
- Folytonosság, differenciálhatóság:
  Mivel f racionális törtfüggvény, ezért a teljes értelmezési tartományán folytonos és mindenhol differenciálható.
- Tengelymetszetek meghatározása:
  - Az y-tengelyt az $x = 0$ feltétel teljesülése esetén metszi, ekkor $y = \frac{2}{3}$.
  - Az x-tengelyt akkor metszi, ha

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{x^2+3x+2}{x+3} &= 0 \\ x^2+3x+2 &= 1 \\ x_{1,2} &= \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3\pm 1}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2, \\ x_2 = -1. \end{array} \end{aligned}$$

II. Vizsgálatok az első derivált alapján:

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x+3)-(x^2+3x+2)}{(x+3)^2} \qquad \mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f.$$

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{(2x+3)(x+3)-(x^2+3x+2)}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+7}{(x+3)^2} &= 0 \\ x^2+6x+7 &= 0 \\ x_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{36-28}}{2} = \frac{-6\pm 2\sqrt{2}}{2} &\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -3-\sqrt{2}, \\ x_2 = -3+\sqrt{2}. \end{array} \end{aligned}$$

	$x<-3-\sqrt{2}$	$x=-3-\sqrt{2}$	$-3-\sqrt{2}<x<-3$	$x=-3$	$-3<x<-3+\sqrt{2}$	$x=-3+\sqrt{2}$	$-3+\sqrt{2}<x$
$f'(x)$	+	0	−	nem ért.	−	0	+
$f(x)$	↗	lok. max (y_{max})	↘	nem ért.	↘	lok. min (y_{min})	↗

$$y_{max} = \frac{(-3-\sqrt{2})^2+3(-3-\sqrt{2})+2}{(-3-\sqrt{2})+3} = -2\sqrt{2}-3,$$

$$y_{min} = \frac{(-3+\sqrt{2})^2+3(-3+\sqrt{2})+2}{(-3+\sqrt{2})+3} = 2\sqrt{2}-3.$$

III. Vizsgálatok a második derivált alapján:

$$f''(x) = \frac{(2x+6)(x+3)^2-(x^2+6x+7)2(x+3)}{(x+3)^4} \qquad \mathcal{D}_{f''} = \mathcal{D}_f.$$

$$f''(x) = \frac{(2x+6)(x+3)^2-(x^2+6x+7)2(x+3)}{(x+3)^4} = \frac{4}{(x+3)^3} \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f.$$

Így a függvénynek nincs inflexiós pontja.

	$x<-3$	$x=-3$	$-3<x$
$f''(x)$	$-$	nem ért.	$+$
$f(x)$	$\frown$	nem ért.	$\smile$

Összevont táblázat:

	$x<-3-\sqrt{2}$	$x=-3-\sqrt{2}$	$-3-\sqrt{2}<x<-3$	$x=-3$	$-3<x<-3+\sqrt{2}$	$x=-3+\sqrt{2}$	$-3+\sqrt{2}<x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	nem ért.	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	nem ért.	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\frown\nearrow$	lok. max (y_{max})	$\frown\searrow$	nem ért.	$\smile\searrow$	lok. min (y_{min})	$\smile\nearrow$

IV. A függvény határértékei:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x+2}{x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3+\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}} = -\infty \\
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+2}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+3+\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}} = \infty \\
\lim_{x\to-3^-} f(x) &= \lim_{x\to-3^-} \frac{x^2+3x+2}{x+3} = -\infty \\
\lim_{x\to-3^+} f(x) &= \lim_{x\to-3^+} \frac{x^2+3x+2}{x+3} = \infty
\end{aligned}$$

V. A derivált határértékei:

Mivel a függvény teljes értelmezési tartományán folytonosan differenciálható, ezért nem szükséges a derivált határértékeit vizsgálni.

VI. Aszimptoták:

- Vízszintes aszimptota nincs.
- Függőleges aszimptota, az $x = -3$ egyenes.
- Ferde aszimptota lehetséges,mivel $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ és mivel

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+2}{x(x+3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1(1+\frac{3}{x})} = 1.$$

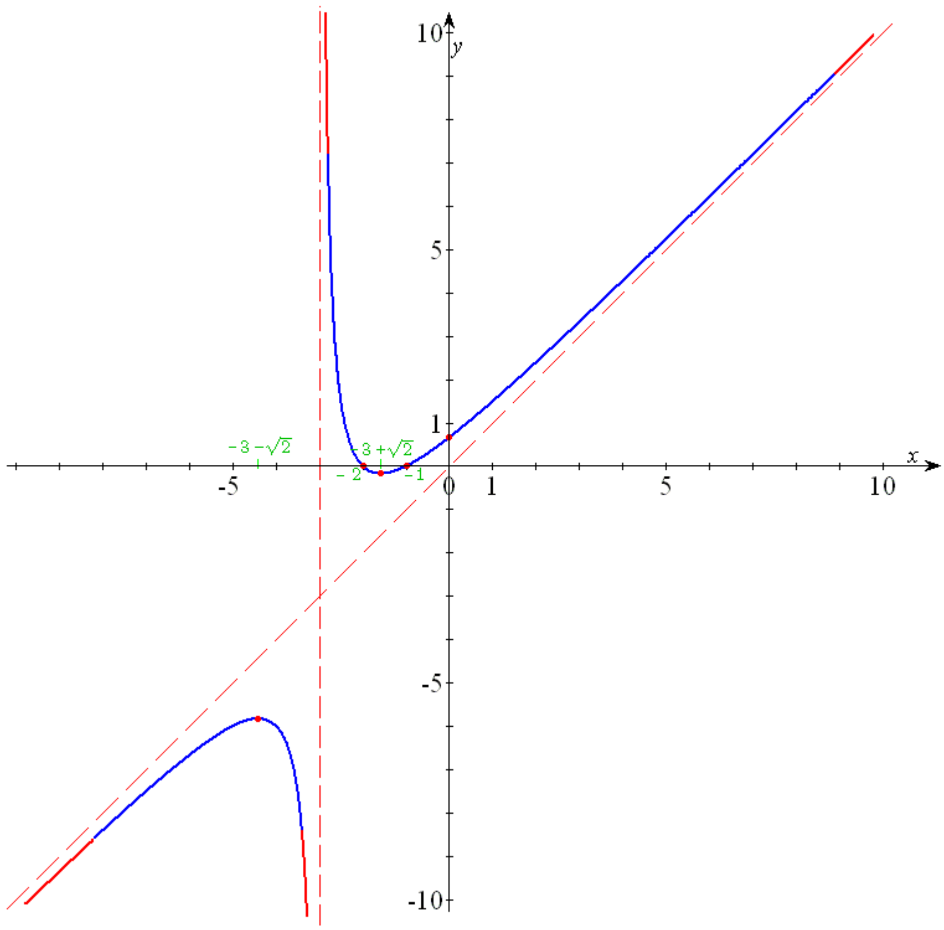
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+3x+2}{x+3} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+2-x^2-3x}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x+3} = 0.$$

Ekkor az aszimptota:

$$y = x.$$

Hasonlóan látható be, hogy $-\infty$-ben is ugyanez az egyenes az aszimptota.

VII. Ábrázolás:



VIII. Érték készlet:

$$\mathcal{R}_f = \left\{ y | y \in \mathbb{R},\ y \leq -3-2\sqrt{2} \text{ vagy } y \geq -3+2\sqrt{2} \right\}$$

.

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

15.4. Házi Feladat. *Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = x \cdot \ln x$ függvényen.*

Megoldás.

I. Alaptulajdonságok megállapítása:

- Értelmezési tartomány: $\mathcal{D}_f = \{x | x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$
- Szimmetria tulajdonságok:
  - Nem páros és nem páratlan, hiszen már $\mathcal{D}_f$ sem szimmetrikus.
  - Nem periodikus.
- Folytonosság, differenciálhatóság:
  Az elemi függvények tulajdonságai és a műveleti szabályok miatt a teljes értelmezési tartományon folytonosan differenciálható.
- Tengelymetszetek meghatározása:
  - Az y-tengelyt nem metszi, mert $0 \notin \mathcal{D}_f$.
  - Az x-tengelyt akkor metszi, ha $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} x \cdot \ln x &= 0 \quad x \neq 0 \\ \ln x &= 0 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

II. Vizsgálatok az első derivált alapján:

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}, \quad \mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f.$$

$$\begin{aligned} f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 &= 0 \\ \ln x &= -1 \\ x &= \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

	$0<x<\frac{1}{e}$	$x=\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}<x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min. y_{min}	$\nearrow$

$$y_{min} = -\frac{1}{e}$$

III. Vizsgálatok a második derivált alapján:

$$f''(x) = \frac{1}{x} \quad \mathcal{D}_{f''} = \mathcal{D}_f.$$

Mivel $f''(x) > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f$ esetén, ezért f a teljes értelmezési tartományán konvex.

IV. A függvény határértékei:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0^-.$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x \cdot \ln x = \infty.$$

V. A derivált határértékei: Mivel f nem deriválható x_0=0-ban, de ott létezik véges egyoldali határértéke, ezért itt kiszámítjuk a derivált határértékét is:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln x + 1 = -\infty.$$

Az eredmény geometriai jelentése, hogy a görbe jobboldali érintője az $x=0$ pontban függőleges.

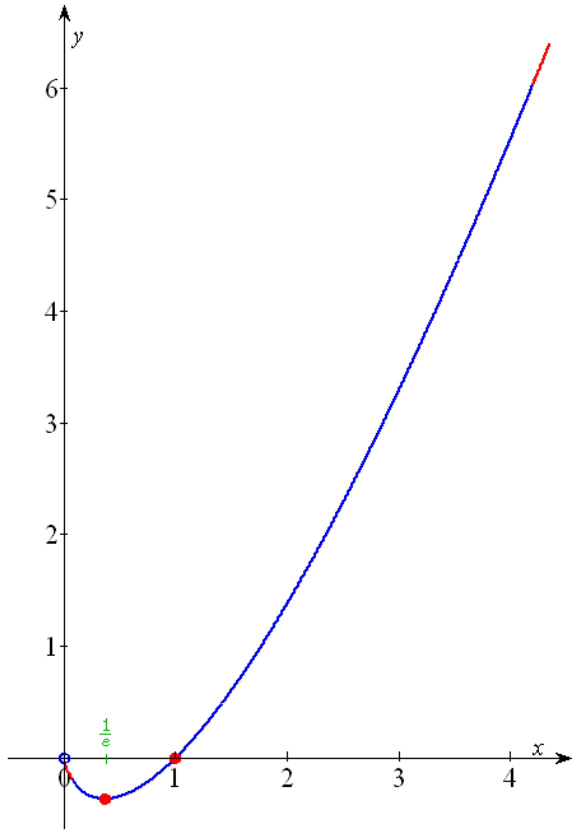
VI. Aszimptoták:

- Vízszintes aszimptota nincs.
- Függőleges aszimptota az $x=0$ egyenes.
- Ferde aszimptota lehetne, mert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, de

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty, \notin \mathbb{R}$$

Nincs ferde aszimptota.

VII. Ábrázolás:



VIII. Érték készlet: $\mathcal{R}_f = \left\{y | y \in \mathbb{R},\ y \geq -\frac{1}{e}\right\}$. ♢

vissza a feladathoz

16. fejezet

Integrálási módszerek

16.1. Gyakorlat

16.1. Definíció. *Legyen $f:\mathcal{I}\to\mathbb{R}$, ahol $\mathcal{I}\subseteq\mathbb{R}$ intervallum. A $F:\mathcal{I}\to\mathbb{R}$ függvényt a f primitív függvényének nevezzük, ha*

i) $F\in\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$, *azaz F differenciálható az $\mathcal{I}$ intervallumon.*

ii) $F'(x)=f(x)\quad \forall x\in\mathcal{I}$, *azaz f a F derivált-függvénye az $\mathcal{I}$ intervallumon.*

16.2. Megjegyzés. *Ha F primitív függvénye f-nek, akkor $F+C$ is, ahol $C\in\mathbb{R}$, illetve ha F_1 és F_2 ugyanazon f függvény primitív függvényei, akkor $F_1-F_2=$ állandó, azaz a primitív függvények egy additív konstans erejéig egyértelműek. A primitív függvények összességét határozatlan integrálnak nevezzük.*

16.1.1. Műveleti tulajdonságok

Ha f-nek és g-nek létezik primitív függvénye $\mathcal{I}$-n, akkor $f+g$-nek és $\lambda\cdot f$-nek is létezik és

$$\int f(x)+g(x)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx \qquad\qquad \int \lambda\cdot f(x)dx=\lambda\cdot\int f(x)dx$$

16.1.2. Elemi módszerekkel integrálható függvények

16.1. Feladat. *Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat.*

a) $\displaystyle\int 9x^2-4x+3dx$

Megoldás.

$$\int 9x^2-4x+3dx=9\int x^2dx-4\int xdx+3\int 1dx=9\cdot\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+3x+C. \qquad \diamondsuit$$

b) $\displaystyle\int \sin x+\cos x+\frac{1}{x}dx$

Megoldás.

$$\int \sin x+\cos x+\frac{1}{x}dx=\int \sin xdx+\int \cos xdx+\int\frac{1}{x}dx=-\cos x+\sin x+\ln|x|+C. \qquad \diamondsuit$$

c) $\displaystyle\int 3\cdot 2^x - \frac{2}{x^2+1}dx$

Megoldás.

$$\int 3\cdot 2^x - \frac{2}{x^2+1}dx = 3\cdot\int 2^x dx - 2\cdot\int \frac{1}{1+x^2}dx = 3\cdot\frac{2^x}{\ln 2} - 2\mathrm{arctg}x + C.$$ ♢

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[6]{x}}dx$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[6]{x}}dx &= \int \frac{\sqrt[20]{x^5\cdot x}}{\sqrt[6]{x}}dx = \int \frac{x^{\frac{3}{10}}}{x^{\frac{1}{6}}}dx = \int x^{\frac{3}{10}-\frac{1}{6}}dx = \int x^{\frac{2}{15}}dx = \frac{x^{\frac{17}{15}}}{\frac{17}{15}} + C = \\ &= \frac{15}{17}\cdot x^{\frac{17}{15}} + C\end{aligned}$$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} &= \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + C.\end{aligned}$$

16.1.3. Helyettesítéses integrálás

16.2. Feladat. *Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat.*

a) $\displaystyle\int \frac{\sin\ln x}{x}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{\sin\ln x}{x}dx = \int \sin t dt = -\cos t + C = -\cos\ln x + C$$ ♢

$$\begin{aligned} t &= \ln x \\ \tfrac{dt}{dx} &= \tfrac{1}{x} \\ dt &= \tfrac{1}{x}dx \end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int (2x+3)(x^2+3x+1)^7 dx$

Megoldás.

$$\int (2x+3)(x^2+3x+1)^7 dx = \int t^7 dt = \frac{t^8}{8} + C = \frac{(x^2+3x+1)^8}{8} + C$$ ♢

$$\begin{aligned} t &= x^2+3x+1 \\ \tfrac{dt}{dx} &= 2x+3 \\ dt &= (2x+3)dx \end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+\pi}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{e^x}{e^x+\pi}dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t|+C = \ln(e^x+\pi)+C \qquad \diamondsuit$$

$$\begin{aligned} t &= e^x+\pi \\ \tfrac{dt}{dx} &= e^x \\ dt &= e^x dx \end{aligned}$$

d) $\displaystyle\int \cos\frac{5x+7}{3}dx$

Megoldás.

$$\int \cos\frac{5x+7}{3}dx = \frac{3}{5}\int \cos\frac{5x+7}{3}\cdot\frac{5}{3}dx = \frac{3}{5}\int \cos t dt = \frac{3}{5}\sin t + C = \frac{3}{5}\sin\frac{5x+7}{3}+C \qquad \diamondsuit$$

$$\begin{aligned} t &= \tfrac{5x+7}{3} = \tfrac{5}{3}x+\tfrac{7}{3} \\ \tfrac{dt}{dx} &= \tfrac{5}{3} \\ dt &= \tfrac{5}{3}dx \end{aligned}$$

Másik módszerrel is megoldhatjuk a feladatot:

Megoldás.

$$\int \cos\frac{5x+7}{3}dx = \int \cos t\cdot\frac{3}{5}dt = \frac{3}{5}\int \cos t dt = \frac{3}{5}\sin t + C = \frac{3}{5}\sin\frac{5x+7}{3}+C \qquad \diamondsuit$$

$$\begin{aligned} t &= \tfrac{5x+7}{3} \\ x &= \tfrac{3t-7}{5} \\ \tfrac{dx}{dt} &= \tfrac{3}{5} \\ dx &= \tfrac{3}{5}dt \end{aligned}$$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt[6]{x^4}-\sqrt[6]{x^3}}dx = \int \frac{6t^5}{t^4-t^3}dt = \int \frac{6t^2}{t-1}dt = \int \frac{6t^2-6}{t-1}+\frac{6}{t-1}dt \ominus$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt[6]{x} \\ t^6 &= x \\ \tfrac{dx}{dt} &= 6\cdot t^5 \\ dx &= 6\cdot t^5 dt \end{aligned}$$

$$\ominus\int \frac{6(t-1)(t+1)}{t-1}dt + 6\int \frac{1}{t-1}dt = 6\int u du + 6\int \frac{1}{y}dy = 6\frac{u^2}{2}+6\ln|y|+C \ominus$$

$$\begin{aligned} u &= t+1 & \qquad y &= t-1 \\ du &= dt & \qquad dy &= dt \end{aligned}$$

$$\ominus 3(t+1)^2+6\ln|t-1|+C = 3(\sqrt[6]{x}+1)^2+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C \qquad \diamondsuit$$

16.3. Megjegyzés. *A későbbiek során sokszor találkozunk olyan összetett függvénnyel az integrandusban, melynek belső függvénye $ax+b$ $(a \neq 0)$ alakú. Ilyenkor a fenti helyettesítést „fejben” is elvégezhetjük. Ilyenkor $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a}+C$, ahol F a f primitív függvénye.*

16.1.4. Parciális integrálás

16.4. Tétel. *Ha f és g valamely intervallumon differenciálhatók és $f \cdot g'$-nek létezik primitív függvénye, akkor $f' \cdot g$-nek is létezik primitív függvénye és*

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

16.5. Megjegyzés. *Nyilvánvaló, hogy a módszer akkor használható jól, ha az f és g függvényeket úgy választjuk, hogy $f \cdot g'$ függvény primitív függvénye könnyebben számolható, mint az eredeti $f' \cdot g$ függvényé. Az alábbi négy típus esetén érdemes parciálisan integrálni:*

I. *Polinom függvény és exponenciális-, vagy trigonometrikus függvény szorzata.*

   Megoldás: *A parciális integrálás során legyen g a polinom, így a fenti eljárást alkalmazva a kiszámítandó $\int f(x) \cdot g'(x) dx$ hasonló típusú lesz, mint az eredeti primitív függvény, de a polinom fokszáma eggyel csökken. A parciális integrálást egészen addig ismételten alkalmazzuk, amíg a polinom konstanssá nem válik, ekkor már elemi úton integrálhatunk.*

II. a) *Polinom és logaritmus-, vagy ciklometrikus („árkusz”) függvény szorzata.*

   Megoldás: *A parciális integrálás során legyen f' a polinom, így a fenti eljárást alkalmazva a kiszámítandó $\int f(x) \cdot g'(x) dx$ integrálban a polinom mellett egy könnyebben kezelhető függvény jelenik meg.*

   b) *Logaritmus-, vagy ciklometrikus („árkusz”) függvény integrálása.*

   Megoldás: *Ilyenkor az integrandust tekinthetjük olyan szorzatnak, melynek az egyik tényezője az eredeti integrandus, a másik tényezője pedig az azonosan 1 polinom. A parciális integrálás során ugyanúgy járunk el, mint az előző típus esetén.*

III. *Exponenciális- és színusz-, vagy koszínus függvény szorzata.*

   Megoldás: *Kétszer egymás után parciálisan integrálunk. (Tetszőleges megfeleltetéssel, de mindkétszer ugyanolyan szerepkiosztással.) A második lépés után egy függvényegyenlethez jutunk, melyből elemi átalakítással „kifejezhetjük” a keresett függvényt.*

16.3. Feladat. *Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat.*

a) $\int x^2 \cdot \sin x dx$

Megoldás.

$$\int x^2 \cdot \sin x dx = x^2 \cdot (-\cos x) - \int 2x \cdot (-\cos x) dx = -x^2 \cdot \cos x + 2 \int x \cos x dx \ominus$$

$$\begin{array}{rclrcl} g(x) & = & x^2 & f'(x) & = & \sin x \\ g'(x) & = & 2x & f(x) & = & -\cos x \end{array} \qquad \begin{array}{rclrcl} g(x) & = & x & f'(x) & = & \cos x \\ g'(x) & = & 1 & f(x) & = & \sin x \end{array}$$

$$\ominus -x^2 \cdot \cos x + 2\left(x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx\right) = -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2\cos x + C.$$ ♢

b) $\displaystyle\int (3x-5)\cdot e^{2x+3}dx$

Megoldás.

$$\int (3x-5)\cdot e^{2x+3}dx = (3x-5)\cdot\frac{e^{2x+3}}{2} - \int 3\cdot\frac{e^{2x+3}}{2}dx = (3x-5)\cdot\frac{e^{2x+3}}{2} - \frac{3}{2}\int e^{2x+3}dx \ominus$$

$$\begin{array}{rclcrcl} g(x) & = & 3x-5 & & f'(x) & = & e^{2x+3} \\ g'(x) & = & 3 & & f(x) & = & \int e^{2x+3}dx=\frac{1}{2}\int e^{2x+3}2dx=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{e^{2x+3}}{2}+C \end{array}$$

$$\ominus(3x-5)\cdot\frac{e^{2x+3}}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{e^{2x+3}}{2} + C.$$ ♢

c) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x dx$

Megoldás.

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \int 1\cdot\operatorname{arctg} x dx = x\cdot\operatorname{arctg} x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx = x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int 2x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx \ominus$$

$$\begin{array}{rclcrclcrl} g(x) & = & \operatorname{arctg} x & & f'(x) & = & 1 & & t & =1+x^2 \\ g'(x) & = & \frac{1}{1+x^2} & & f(x) & = & x & & dt & =2xdx \end{array}$$

$$\ominus x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \cdot\frac{1}{t}dt = x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|t| + C = x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C.$$ ♢

d) $\displaystyle\int \ln^2 x dx$

Megoldás.

$$\int \ln^2 x dx = \int 1\cdot\ln^2 x dx = x\cdot\ln^2 x - \int x\cdot 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}dx = x\cdot\ln^2 x - \int x\cdot 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}dx \ominus$$

$$\begin{array}{rclcrcl} g(x) & = & \ln^2 x & & f'(x) & = & 1 \\ g'(x) & = & 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x} & & f(x) & = & x \end{array}$$

$$\ominus x\cdot\ln^2 x - 2\int \ln x dx = x\cdot\ln^2 x - 2\left(x\cdot\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x dx\right) = x\cdot\ln^2 x - 2\,(x\cdot\ln x - x) + C$$

$$\begin{array}{rclcrcl} g(x) & = & \ln x & & f'(x) & = & 1 \\ g'(x) & = & \frac{1}{x} & & f(x) & = & x \end{array}$$

♢

e) $\displaystyle\int (2x+1)\cdot\operatorname{arctg} 3x dx$

Megoldás.

$$\int (2x+1)\cdot\operatorname{arctg} 3x dx = (x^2+x)\cdot\operatorname{arctg} 3x - \int \frac{3(x^2+x)}{1+9x^2}dx = (x^2+x)\cdot\operatorname{arctg} 3x -$$

$$\begin{array}{rclcrcl} g(x) & = & \operatorname{arctg} 3x & & f'(x) & = & 2x+1 \\ g'(x) & = & \frac{1}{1+9x^2}\cdot 3 & & f(x) & = & x^2+x \end{array}$$

$$-\int \frac{3x^2}{1+9x^2}dx - \int \frac{3x}{1+9x^2}dx = (x^2+x)\cdot\operatorname{arctg} 3x - \int \frac{3x^2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{1+9x^2}dx - \frac{1}{6}\int \frac{1}{t}dt \ominus$$

$$\begin{array}{rcl} t & = & 9x^2+1 \\ dt & = & 18xdx \end{array}$$

$$\circeq (x^2+x)\cdot \mathrm{arctg}3x-\frac{1}{3}\int dx+\frac{1}{3}\int \frac{1}{1+(3x)^2}dx-\frac{1}{6}\ln|t| = (x^2+x)\cdot \mathrm{arctg}3x-\frac{1}{3}x+$$

$$\begin{aligned} y &= 3x \\ \tfrac{1}{3}dy &= dx \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{9}\int \frac{1}{1+y^2}dy-\frac{1}{6}\ln|9x^2+1| = (x^2+x)\cdot \mathrm{arctg}3x-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\mathrm{arctg}y-\frac{1}{6}\ln|9x^2+1|+C =$$

$$= (x^2+x)\cdot \mathrm{arctg}3x-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\mathrm{arctg}3x-\frac{1}{6}\ln|9x^2+1|+C$$

$\diamondsuit$

f) $\int \sin x\cdot e^x dx$

Megoldás.

$$\int \sin x\cdot e^x dx = e^x\cdot\sin x-\int e^x\cdot\cos x dx = e^x\cdot\sin x-\left(e^x\cdot\cos x+\int e^x\cdot \sin x dx\right)\circeq$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin x & f'(x) &= e^x & g(x) &= \cos x & f'(x) &= e^x \\ g'(x) &= \cos x & f(x) &= e^x & g'(x) &= -\sin x & f(x) &= e^x \end{aligned}$$

$\circeq e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x-\int e^x\cdot\sin x dx.$

A fenti egyenlőség két oldalát összevetve kapjuk:

$$\int \sin x\cdot e^x dx = e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x-\int e^x\cdot\sin x dx,$$

ahonnét rendezéssel kifejezhetjük a keresett integrált:

$$\begin{aligned} \int \sin x\cdot e^x dx &= e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x-\int e^x\cdot\sin x dx \\ 2\int \sin x\cdot e^x dx &= e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x \\ \int \sin x\cdot e^x dx &= \frac{e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x}{2}. \end{aligned}$$

Mivel tudjuk, hogy a primitív függvény csak egy additív konstans erejéig egyértelmű, ezért

$$\int \sin x\cdot e^x dx = \frac{e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x}{2}+C.$$

$\diamondsuit$

g) $\int e^{3x}\cos 2x dx$

Megoldás.

$$\int e^{3x}\cos 2x dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x-\int \frac{1}{3}e^{3x}(-2\sin 2x)dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{3}\int e^{3x}\sin 2x dx\circeq$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos 2x & f'(x) &= e^{3x} & g(x) &= \sin 2x & f'(x) &= e^{3x} \\ g'(x) &= -2\sin 2x & f(x) &= \tfrac{e^{3x}}{3} & g'(x) &= 2\cos 2x & f(x) &= \tfrac{e^{3x}}{3} \end{aligned}$$

$$\circeq\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{3}\left(\frac{e^{3x}}{3}\sin 3x-\int \frac{e^{3x}}{3}2\cos 2x dx\right) = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{9}e^{3x}\sin 3x-\frac{4}{9}\int e^{3x}\cos 2x dx.$$

A fenti egyenlőség két oldalát összevetve kapjuk:

$$\int e^{3x}\cos 2x dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x + \frac{2}{9}e^{3x}\sin 3x - \frac{4}{9}\int e^{3x}\cos 2x dx,$$

ahonnét rendezéssel kifejezhetjük a keresett integrált:

$$\begin{aligned}
\int e^{3x}\cos 2x dx &= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x + \frac{2}{9}e^{3x}\sin 3x - \frac{4}{9}\int e^{3x}\cos 2x dx\\
\frac{13}{9}\int e^{3x}\cos 2x dx &= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x + \frac{2}{9}e^{3x}\sin 3x\\
\int e^{3x}\cos 2x dx &= \frac{9}{13}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x + \frac{2}{9}e^{3x}\sin 3x\right) = \frac{3}{13}e^{3x}\cos 2x + \frac{2}{13}e^{3x}\sin 3x.
\end{aligned}$$

Mivel tudjuk, hogy a primitív függvény csak egy additív konstans erejéig egyértelmű, ezért

$$\int e^{3x}\cos 2x dx = \frac{3}{13}e^{3x}\cos 2x + \frac{2}{13}e^{3x}\sin 3x + C.$$

♢

h) $\int \cos\ln x dx$

Megoldás.

$$\int \cos\ln x dx = \int e^t\cos t dt = e^t\cdot\cos t - \int e^t\cdot(-\sin t)\,dt = e^t\cdot\cos t + \int e^t\cdot\sin t dt \ominus$$

$$\begin{aligned} t &= \ln x & g(t) &= \cos t & f'(t) &= e^t & g(t) &= \sin t & f'(t) &= e^t\\ e^t &= x & g'(t) &= -\sin t & f(t) &= e^t & g'(t) &= \cos t & f(t) &= e^t\\ e^t dt &= dx \end{aligned}$$

$$\ominus e^t\cdot\cos t + e^t\cdot\sin t - \int e^t\cdot\cos t dt$$

A fenti egyenlőség két oldalát összevetve kapjuk:

$$\int \cos\ln x dx = \int e^t\cos t dt = e^t\cdot\cos t + e^t\cdot\sin t - \int e^t\cdot\cos t dt,$$

ahonnét rendezéssel kifejezhetjük a keresett integrált:

$$\begin{aligned}
\int e^t\cos t dt &= e^t\cdot\cos t + e^t\cdot\sin t - \int e^t\cdot\cos t dt\\
2\int e^t\cos t dt &= e^t\cdot\cos t + e^t\cdot\sin t\\
\int e^t\cos t dt &= \frac{1}{2}e^t\cdot\cos t + \frac{1}{2}e^t\cdot\sin t\\
\int \cos\ln x dx &= \frac{1}{2}e^{\ln x}\cdot\cos\ln x + \frac{1}{2}e^{\ln x}\cdot\sin\ln x = \frac{x\cos\ln x + x\sin\ln x}{2}.
\end{aligned}$$

Mivel tudjuk, hogy a primitív függvény csak egy additív konstans erejéig egyértelmű, ezért

$$\int \cos\ln x dx = \frac{x\cos\ln x + x\sin\ln x}{2} + C.$$

♢

16.2. Házi Feladatok

16.1. Házi Feladat. *Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat.*

a) $\int \mathrm{tg} x dx$ *megoldás*

b) $\int \frac{1}{\sin^2 2x} dx$ *megoldás*

c) $\int \frac{(x^2+3)(x^3-2)}{2\sqrt[3]{x^2}} dx$ *megoldás*

d) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$ *megoldás*

e) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ *megoldás*

f) $\int x \cdot \left(3x^2+5\right)^8 dx$ *megoldás*

g) $\int \frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{2\pi}{x} dx$ *megoldás*

h) $\int \frac{5^x}{1+25^x} dx$ *megoldás*

i) $\int e^{\sqrt{x}} dx$ *megoldás*

j) $\int x^3 \cdot \sin 3x dx$ *megoldás*

k) $\int \ln^3 x dx$ *megoldás*

l) $\int \sin \sqrt[3]{x} dx$ *megoldás*

16.3. Megoldások

16.1. Házi Feladat. *Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat.*

a) $\int \mathrm{tg} x dx$

Megoldás.

$$\int \mathrm{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{t} dt = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C \qquad \diamondsuit$$

$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x dx \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

b) $\int \frac{1}{\sin^2 2x} dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1}{\sin^2 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin^2 2x} 2dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-1}{\sin^2 t} dt = -\frac{1}{2} \mathrm{ctg} t + C = -\frac{1}{2} \mathrm{ctg} 2x + C. \qquad \diamondsuit$$

$$\begin{aligned} t &= 2x \\ dt &= 2dx \end{aligned}$$

De megoldható elemi átalakításokkal is:

Megoldás.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2 2x} dx &= \int \frac{1}{4\sin^2 x \cos^2 x} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \frac{1}{4} \int \frac{-1}{\sin^2 x} dx = \\ &= \frac{1}{4} \mathrm{tg} x - \frac{1}{4} \mathrm{ctg} x + C. \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

c) $\int \frac{(x^2+3)(x^3-2)}{2\sqrt[3]{x^2}} dx$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^2+3)(x^3-2)}{2\sqrt[3]{x^2}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 6}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \frac{1}{2} \int x^{5-\frac{2}{3}} + 3x^{3-\frac{2}{3}} - 2x^{2-\frac{2}{3}} - 6x^{-\frac{2}{3}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int x^{\frac{13}{3}} dx + \frac{3}{2} \int x^{\frac{7}{3}} dx - \int x^{\frac{4}{3}} dx - 3 \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\frac{16}{3}}}{\frac{16}{3}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} - \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - 3 \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = \\ &= \frac{3}{32} x^{\frac{16}{3}} + \frac{9}{20} x^{\frac{10}{3}} - \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} - 9x^{\frac{1}{3}} + C. \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

d) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

Megoldás.

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1 dx = \operatorname{tg} x - x + C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

e) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

Megoldás.

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int \frac{\sqrt{(1+x)^2} + \sqrt{(1-x)^2}}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} dx \ominus$$

Az integrandus akkor értelmezhető, ha $-1 < x < 1$, ekkor viszont $\sqrt{(1+x)^2} = 1+x$ és $\sqrt{(1-x)^2} = 1-x$, így

$$\ominus \int \frac{(1+x)+(1-x)}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \arcsin x + C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

f) $\int x \cdot \left(3x^2+5\right)^8 dx$

Megoldás.

$$\int x \cdot \left(3x^2+5\right)^8 dx = \frac{1}{6} \int (3x^2+5)^8 \cdot 6x dx = \frac{1}{6} \int t^8 dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^9}{9} + C = \frac{1}{54} \cdot (3x^2+5)^9 + C. \qquad \diamondsuit$$

$$\begin{array}{rcl} t & = & 3x^2+5 \\ dt & = & 6x dx \end{array}$$

vissza a feladathoz

g) $\int \frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{2\pi}{x} dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{2\pi}{x} dx = -\frac{1}{2\pi} \int \cos \frac{2\pi}{x} \cdot \left(-\frac{2\pi}{x^2}\right) dx = -\frac{1}{2\pi} \int \cos t dt \ominus$$

$$\begin{array}{rcl} t & = & \frac{2\pi}{x} \\ dt & = & -\frac{2\pi}{x^2} dx \end{array}$$

$$\ominus -\frac{1}{2\pi} \sin t + C = -\frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{x} + C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

h) $\displaystyle\int \frac{5^x}{1+25^x}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{5^x}{1+25^x}dx = \int \frac{5^x}{1+(5^x)^2}dx = \frac{1}{\ln 5}\int \frac{5^x \ln 5}{1+(5^x)^2}dx = \frac{1}{\ln 5}\int \frac{1}{1+t^2}dt \ominus$$

$$\begin{aligned} t &= 5^x \\ dt &= 5^x \ln 5 dx \end{aligned}$$

$$\ominus \frac{1}{\ln 5}\mathrm{arctg} t + C = \frac{1}{\ln 5}\mathrm{arctg} 5^x + C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

i) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$

Megoldás.

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \int e^t \cdot 2tdt = 2te^t - \int 2e^t dt = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{x} & g(t) &= 2t & f'(t) &= e^t \\ t^2 &= x & g'(t) &= 2 & f(t) &= e^t \\ 2tdt &= dx \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

j) $\displaystyle\int x^3 \cdot \sin 3x dx$

Megoldás.

$$\int x^3 \cdot \sin 3x dx = -\frac{1}{3}x^3 \cdot \cos 3x - \int 3x^2 \cdot (-\frac{1}{3}) \cos 3x dx \ominus$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 & f'(x) &= \sin 3x \\ g'(x) &= 3x^2 & f(x) &= \textstyle\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x \cdot 3dx = \\ & & & \scriptstyle t=3x \;\Rightarrow\; dt=3dx \\ & & &= \textstyle\frac{1}{3}\int \sin t dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos 3x + C \end{aligned}$$

$$\ominus -\frac{1}{3}x^3 \cdot \cos 3x + \int x^2 \cdot \cos 3x dx = -\frac{1}{3}x^3 \cdot \cos 3x + \frac{1}{3}x^2 \sin 3x - \int 2x \cdot \frac{1}{3}\sin 3x dx \ominus$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 & f'(x) &= \cos 3x \\ g'(x) &= 2x & f(x) &= \textstyle\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x \cdot 3dx = \\ & & & \scriptstyle t=3x \;\Rightarrow\; dt=3dx \\ & & &= \textstyle\frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin 3x + C \end{aligned}$$

$$\ominus -\frac{1}{3}x^3 \cdot \cos 3x + \frac{1}{3}x^2 \sin 3x - \frac{2}{3}\int x \cdot \sin 3x dx = -\frac{1}{3}x^3 \cdot \cos 3x + \frac{1}{3}x^2 \sin 3x -$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x & f'(x) &= \sin 3x \\ g'(x) &= 1 & f(x) &= -\tfrac{1}{3}\cos 3x \end{aligned}$$

$$-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x \cos 3x - \int (-\frac{1}{3}) \cos 3x dx\right) = -\frac{1}{3}x^3 \cdot \cos 3x + \frac{1}{3}x^2 \sin 3x + \frac{2}{9}x \cos 3x -$$

$$-\frac{2}{9}\int \cos 3x dx = -\frac{1}{3}x^3 \cos 3x + \frac{1}{3}x^2 \sin 3x + \frac{2}{9}x \cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

k) $\int \ln^3 x dx$

Megoldás.

$$\int \ln^3 x dx = \int 1 \cdot \ln^3 x dx = x \cdot \ln^3 x - \int 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} \cdot x dx ⊜$$

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & \ln^3 x \\ g'(x) & = & 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f'(x) & = & 1 \\ f(x) & = & x \end{array}$$

$$⊜ x \cdot \ln^3 x - 3 \int 1 \cdot \ln^2 x dx = x \cdot \ln^3 x - 3 \cdot \left(x \cdot \ln^2 x - \int 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x dx \right) ⊜$$

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & \ln^2 x \\ g'(x) & = & 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f'(x) & = & 1 \\ f(x) & = & x \end{array}$$

$$⊜ x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6 \int 1 \ln x dx = x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6 \left(x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx \right) ⊜$$

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & \ln x \\ g'(x) & = & \frac{1}{x} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f'(x) & = & 1 \\ f(x) & = & x \end{array}$$

$$⊜ x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6x \ln x - 6 \int 1 dx = x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6x \ln x - 6x + C.$$ ♢

vissza a feladathoz

l) $\int \sin \sqrt[3]{x} dx$

Megoldás.

$$\int \sin \sqrt[3]{x} dx = \int 3t^2 \sin t dt = -3t^2 \cos t - \int 6t(-\cos t) dt ⊜$$

$$\begin{array}{rcl} t & = & \sqrt[3]{x} \\ t^3 & = & x \\ 3t^2 dt & = & dx \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g(t) & = & 3t^2 \\ g'(t) & = & 6t \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f'(t) & = & \sin t \\ f(t) & = & -\cos t \end{array}$$

$$⊜ -3t^2 \cos t + 6 \int t \cos t dt = -3t^2 \cos t + 6t \sin t - 6 \int \sin t dt ⊜$$

$$\begin{array}{rcl} g(t) & = & 6t \\ g'(t) & = & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f'(t) & = & \cos t \\ f(t) & = & \sin t \end{array}$$

$$⊜ -3t^2 \cos t + 6t \sin t + 6 \cos t + C = -3\sqrt[3]{x}^2 \cos t + 6\sqrt[3]{x} \sin \sqrt[3]{x} + 6 \cos \sqrt[3]{x} + C$$ ♢

vissza a feladathoz

17. fejezet

Speciális függvényosztályok integrálása I.

17.1. Gyakorlat

17.1.1. Racionális függvények integrálása

17.1. Definíció. *Az*

i) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, \ldots, n)$

ii) $f(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}, \quad a \in \mathbb{R},\ x \neq a,\ n \in \mathbb{N}^*,\ A \in \mathbb{R}$

iii) $f(x) = \dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad A, B \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R},\ a, b, c \in \mathbb{R}, (b^2 - 4ac < 0),\ n \in \mathbb{N}^*,$

alakú függvényeket elemi törtfüggvényeknek nevezzük.

17.2. Tétel. *Minden racionális függvény felbontható véges számú elemi törtfüggvény összegére.*

17.3. Megjegyzés. *A tétel bizonyításától eltekintünk. Helyette egy, a gyakorlatban jól alkalmazható eljárás lépéseit írjuk le, amellyel a felbontást elő is állíthatjuk.*

1.**lépés:** A racionális függvényt polinom és valódi racionális tört összegére bontjuk.

17.4. Definíció. *Az* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $x \in \mathbb{R} \backslash \Lambda_Q,\ \Lambda_Q = \{\lambda \in \mathbb{R} |\ Q(\lambda) = 0\}$ *(P, Q polinomok) racionális törtfüggvényt valódi racionális törtnek nevezzük, ha* $\deg P < \deg Q$. *(Ha* $\deg P \geq$ $\geq \deg Q$, *akkor a függvényt racionális áltörtnek hívjuk.)*

Ha $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} (x \in \mathbb{R} \backslash \Lambda_Q)$ egy racionális áltört, akkor P-n Q-val maradékos osztást végezve felbontjuk:

$$P(x) = P_1(x) \cdot Q(x) + R(x), \qquad \text{ahol } R = 0, \text{ vagy } \deg R < \deg Q.$$

Ekkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x) \cdot Q(x) + R(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

ahol $\frac{R(x)}{Q(x)}$ már valódi racionális tört.

2.**lépés:** A nevezőt irreducibilis (elsőfokú-, vagy negatív diszkriminánsú másodfokú-) tényezők szorzatára bontjuk.

3.**lépés:** A törtet elemi törtek összegére bontjuk az egyenlő együtthatók módszerével.

17.1. Feladat. *Bontsuk elemi törtek összegére a következő racionális függvényeket!*

a) $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2+2x-3}$

Megoldás.

1.**lépés:**

$$\begin{array}{rrrrl} x^3 & +0x^2 & +x & +0 & :(x^2+2x-3)= \quad x-2. \\ x^3 & +2x^2 & -3x & & \\ \hline & -2x^2 & +4x & +0 & \\ & -2x^2 & -4x & +6 & \\ \hline & & 8x & -6 & \end{array}$$

Így $x^3+x=\underbrace{(x-2)}_{P_1(x)}\cdot(x^2+2x-3)+\underbrace{8x-6}_{R(x)}$, és

$$f(x)=x-2+\frac{8x-6}{x^2+2x-3}.$$

2.**lépés:** $x^2+2x-3=0$,

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=-1\pm 2 \qquad \begin{array}{rcr} x_1 & = & -3 \\ x_2 & = & 1. \end{array}$$

Így $x^2+2x-3=(x+3)\cdot(x-1)$.

3.**lépés:**

$$\frac{8x-6}{(x+3)\cdot(x-1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}=\frac{Ax-A+Bx+3B}{(x+3)\cdot(x-1)}=\frac{(A+B)x+(3B-A)}{(x+3)\cdot(x-1)}.$$

Felhasználva, az előző félévben kimondott tételt, melyszerint két polinom pontosan akkor egyenlő, ha együtthatóik rendre megegyeznek. A megfelelő együtthatók egyeztetéséből a következő egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{array}{rcll} A+B & = & 8 & \Rightarrow \quad A=8-B \\ 3B-A & = & -6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3B-(8-B) & = & -6 \\ 4B-8 & = & -6 \\ 4B & = & 2 \\ B & = & \dfrac{1}{2} \\ A & = & 8-\dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{2}. \end{array}$$

Így $\dfrac{8x-6}{(x+3)\cdot(x-1)}=\dfrac{\frac{15}{2}}{x+3}+\dfrac{\frac{1}{2}}{x-1}$ és

$$f(x)=x-2+\frac{\frac{15}{2}}{x+3}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}.$$

◊

b) $f(x)=\dfrac{x^4-14x^3+29x^2-26x+9}{(x^2-x+1)^2\cdot(3x-2)}$

Megoldás.

1.**lépés:** Mivel $f(x)$ valódi racionális tört (a számláló fokszáma kisebb, mint a nevezőé), ezért az első lépést nem kell elvégeznünk.

2.**lépés:** A nevező szorzat alakban adott, így csak azt kell ellenőrizni, hogy a másodfokú tényező valóban irreducibilis-e.

$$x^2-x+1 \qquad \Rightarrow \qquad D=1-4<0.$$

Így a felbontásban csak elsőfokú és negatív diszkriminánsú másodfokú tényezők szerepelnek.

3.**lépés:**

$$\frac{x^4-14x^3+29x^2-26x+9}{(x^2-x+1)^2\cdot(3x-2)}=\frac{A}{3x-2}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}+\frac{Dx+E}{(x^2-x+1)^2}=$$

$$=\frac{A(x^2-x+1)^2+(Bx+C)(3x-2)(x^2-x+1)+(Dx+E)(3x-2)}{(x^2-x+1)^2\cdot(3x-2)}=$$

A zárójelek felbontása után, a nevezők egyenlősége miatt a számlálóknak is meg kell egyezniük:

$$\begin{aligned}x^4-14x^3+29x^2-26x+9 \;=\; &(A+3B)x^4+(-2A-5B+3C)x^3+\\ &+(3A+5B-5C+3D)x^2+\\ &+(-2A-2B+5C-2D+3E)x+\\ &+(A-2C-2E).\end{aligned}$$

A megfelelő együtthatók egyeztetéséből a következő egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{aligned}A+3B &= 1 && \Rightarrow \quad A=1-3B\\ -2A-5B+3C &= -14 && \Rightarrow \quad C=-4-\frac{B}{3}\\ 3A+5B-5C+3D &= 29 && \Rightarrow \quad D=2-\frac{7}{9}B\\ -2A-2B+5C-2D+3E &= -26 && \Rightarrow \quad E=\frac{35}{27}B\\ A-2C-2E &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1-3B+8+\frac{2B}{3}-\frac{70}{27}B &= 9\\ 9-\frac{133}{27}B &= 9\end{aligned}$$

$$B=0 \quad E=0 \quad A=1 \quad D=2 \quad C=-4$$

Így

$$f(x)=\frac{1}{3x-2}+\frac{-4}{x^2-x+1}+\frac{2x}{(x^2-x+1)^2}. \qquad \diamondsuit$$

c) $f(x) = \dfrac{2x^4+6x^3+9x^2+1}{(x+1)^3}$

Megoldás.

1.**lépés:** A nevezőben elvégezve a hatványozást: $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$

$$\begin{array}{rrrrrl} 2x^4 & +6x^3 & +9x^2 & +0x & +1 & :(x^3+3x^2+3x+1) = \quad 2x. \\ 2x^4 & +6x^3 & +6x^2 & +2x & & \\ \hline & & 3x^2 & -2x & +1 & \end{array}$$

Így $2x^4+6x^3+9x^2+1 = \underbrace{(2x)}_{P_1(x)} \cdot (x^3+3x^2+3x+1) + \underbrace{3x^2-2x+1}_{R(x)}$, és

$$f(x) = 2x + \frac{3x^2-2x+1}{(x+1)^3}.$$

2.**lépés:** A nevező elsőfokú tényezők szorzataként adott, így már nem kell átalakítani.

3.**lépés:**

$$\begin{aligned} \frac{3x^2-2x+1}{(x+1)^3} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} = \\ &= \frac{A(x+1)^2+B(x+1)+C}{(x+1)^3} = \\ &= \frac{Ax^2+(2A+B)x+A+B+C}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

A megfelelő együtthatók egyeztetéséből a következő egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{aligned} A &= 3 \\ 2A+B &= -2 \qquad \Rightarrow \quad B = -8 \\ A+B+C &= 1 \qquad \Rightarrow \quad C = 6 \end{aligned}$$

Így

$$f(x) = 2x + \frac{3}{x+1} - \frac{8}{(x+1)^2} + \frac{6}{(x+1)^3}.$$

◊

d) $\dfrac{18x^3-6x^2+29x+11}{(2x+1)^2 \cdot (x^2-4x+5)}$

Megoldás.

1.**lépés** Mivel $f(x)$ valódi racionális tört (a számláló fokszáma kisebb, mint a nevezőé), ezért az első lépést nem kell elvégeznünk.

2.**lépés** A nevező szorzat alakban adott, így csak azt kell ellenőrizni, hogy a másodfokú tényezők valóban irreducibilisek-e.

$$x^2-4x+5 \qquad \Rightarrow \quad D = 16-20 < 0.$$

Így a felbontásban csak elsőfokú és negatív diszkriminánsú másodfokú tényezők szerepelnek.

3.**lépés**

$$\frac{18x^3-6x^2+29x+11}{(2x+1)^2\cdot(x^2-4x+5)} = \frac{A}{2x+1}+\frac{B}{(2x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-4x+5} =$$
$$= \frac{A(2x+1)(x^2-4x+5)+B(x^2-4x+5)+(Cx+D)(2x+1)^2}{(2x+1)^2\cdot(x^2-4x+5)}$$

A zárójelek felbontása után, a nevezők egyenlősége miatt a számlálóknak is meg kell egyezniük:

$$\begin{aligned} 18x^3-6x^2+29x+11 &= (2A+4C)x^3+(-7A+B+4C+4D)x^2+ \\ &\quad +(6A-4B+C+4D)x+(5A+5B+D). \end{aligned}$$

A megfelelő együtthatók egyeztetéséből a következő egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{aligned} 2A+4C &= 18 \\ -7A+B+4C+4D &= -6 \\ 6A-4B+C+4D &= 29 \\ 5A+5B+D &= 11 \end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszert megoldva,

$$A=3 \quad B=-1 \quad C=3 \quad D=1$$

adódik és így

$$f(x) = \frac{3}{2x+1}-\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{3x+1}{x^2-4x+5}.$$

◊

Elemi törtfüggvények integrálása

I. Ha f polinom, akkor tagonként integrálunk.

II. Ha $f(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}$, $\quad (n\in\mathbb{N}^*)$, akkor az alábbi két eset lehetséges.

a) Ha $n=1$, akkor

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\underset{\substack{t\,=\,x-a\\ dt\,=\,dx}}{\int \frac{1}{x-a}dx} = A\int\frac{1}{t}dt = A\cdot\ln|t|+C = A\cdot\ln|x-a|+C.$$

b) Ha $n\geq 2$, akkor

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\underset{\substack{t\,=\,x-a\\ dt\,=\,dx}}{\int \frac{1}{(x-a)^n}dx} = A\int t^{-n}dt = A\cdot\frac{t^{-n+1}}{-n+1}+C = -\frac{A}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C.$$

III. Ha $f(x)=\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$, $(n\in\mathbb{N}^*)$, ahol $D=b^2-4ac<0$, akkor első lépésként a nevezőt teljes négyzetté alakítjuk:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\underbrace{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}_{=:\alpha^2>0}\right)$$

Ekkor

$$\int f(x)dx = \int \frac{Ax+B}{a^n\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\alpha^2\right)^n}dx = \underset{\substack{t=x+\frac{b}{2a}\\ x=t-\frac{b}{2a}\\ dt=dx}}{\int} \frac{A\cdot\left(t-\frac{b}{2a}\right)+B}{a^n\left(t^2+\alpha^2\right)^n}dt =$$

$$= \frac{A}{a^n}\int\frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n}dt+\frac{B-\frac{Ab}{2a}}{a}\int\frac{1}{(t^2+\alpha^2)^n}dt.$$

Ezek után az alábbi négy fajta integrál kiszámítására lehet szükség:

a) $$\int\frac{1}{t^2+\alpha^2}dt=\frac{1}{\alpha^2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2}dt \underset{\substack{u=\frac{t}{\alpha}\\ du=\frac{1}{\alpha}dt}}{=} \frac{1}{\alpha}\int\frac{1}{1+u^2}du=\frac{1}{\alpha}\mathrm{arctg}u+C=\frac{1}{\alpha}\mathrm{arctg}\frac{t}{\alpha}+C$$

b) $$\underset{\substack{u=t^2+\alpha^2\\ du=2tdt}}{\int}\frac{t}{t^2+\alpha^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln|t^2+\alpha^2|+C$$

c) $$\underset{\substack{u=t^2+\alpha^2\\ du=2tdt}}{\int}\frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u^n}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-n+1}}{-n+1}+C=\frac{-1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{u^{n-1}}+C$$

d) $$\underset{\substack{t=\alpha\cdot\mathrm{tg}u\quad -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}\\ dt=\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2 u}du}}{\int}\frac{1}{(t^2+\alpha^2)^n}dt=\int\frac{1}{(\alpha^2\mathrm{tg}^2u+\alpha^2)^n}\cdot\frac{\alpha}{\cos^2 u}du=\int\frac{1}{\alpha^{2n-1}(1+\mathrm{tg}^2u)^n}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}du=$$

$$\frac{1}{\alpha^{2n-1}}\int\frac{1}{\left(\frac{\cos^2 u+\sin^2 u}{\cos^2 u}\right)^n}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}du=\frac{1}{\alpha^{2n-1}}\int\frac{\cos^{2n}u}{\cos^2 u}du=\frac{1}{\alpha^{2n-1}}\int\cos^{2(n-1)}u\,du$$

Az eljárás folytatására visszatérünk a trigonometrikus függvények integrálásakor. (258. oldal)

17.2. Feladat. *Integráljuk az 17.1. feladatban szereplő racionális függvényeket!*

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x^2+2x-3}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{x^3+x}{x^2+2x-3}dx = \int x-2+\frac{\frac{15}{2}}{x+3}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx = \int xdx - 2\int 1dx + \frac{15}{2}\int \frac{1}{x+3}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{15}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x+3}dx}_{\substack{t\,=\,x+3\\ dt\,=\,dx}} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x-1}dx}_{\substack{u\,=\,x-1\\ du\,=\,dx}} = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{15}{2}\ln|t| + \frac{1}{2}\ln|u| + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{15}{2}\ln|x+3| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C$$

$\diamondsuit$

b) $\displaystyle\int \frac{x^4-14x^3+29x^2-26x+9}{(x^2-x+1)^2\cdot(3x-2)}dx$

A feladat megoldását a trigonometrikus függvények integrálása témakör után adjuk meg.

c) $\displaystyle\int \frac{2x^4+6x^3+9x^2+1}{(x+1)^3}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{2x^4+6x^3+9x^2+1}{(x+1)^3}dx = \int 2x + \frac{3}{x+1} - \frac{8}{(x+1)^2} + \frac{6}{(x+1)^3}dx =$$

$$= \int 2xdx + \int \frac{3}{x+1}dx - \int \frac{8}{(x+1)^2}dx + \int \frac{6}{(x+1)^3}dx =$$

$$= x^2 + 3\underbrace{\int \frac{1}{x+1}dx}_{\substack{t\,=\,x+1\\ dt\,=\,dx}} - 8\underbrace{\int \frac{1}{(x+1)^2}dx}_{\substack{t\,=\,x+1\\ dt\,=\,dx}} + 6\underbrace{\int \frac{1}{(x+1)^3}dx}_{\substack{t\,=\,x+1\\ dt\,=\,dx}} =$$

$$= x^2 + 3\int \frac{1}{t}dt - 8\int \frac{1}{t^2}dt + 6\int \frac{1}{t^3}dt = x^2 + 3\ln|t| - 8\cdot\frac{t^{-1}}{-1} + 6\cdot\frac{t^{-2}}{-2} + C =$$

$$= x^2 + 3\ln|x+1| + \frac{8}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} + C.$$

d) $\displaystyle\int \frac{18x^3-6x^2+29x+11}{(2x+1)^2\cdot(x^2-4x+5)}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{18x^3-6x^2+29x+11}{(2x+1)^2\cdot(x^2-4x+5)}dx = \int \frac{3}{2x+1} - \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{3x+1}{x^2-4x+5}dx =$$

$$= 3\underbrace{\int \frac{1}{2x+1}dx}_{\substack{t\,=\,2x+1\\ dt\,=\,2dx}} - \underbrace{\int \frac{1}{(2x+1)^2}dx}_{\substack{t\,=\,2x+1\\ dt\,=\,2dx}} + \int \frac{3x+1}{(x-2)^2-4+5}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{t}dt - \frac{1}{2}\int t^{-2}dt + \int \frac{3x+1}{(x-2)^2+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t}dt - \frac{1}{2}\int t^{-2}dt + \int \frac{3(u+2)+1}{u^2+1}du =$$

$$\begin{aligned} u &= x-2 \\ u+2 &= x \\ du &= dx \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}\ln|t| - \frac{1}{2}\frac{t^{-1}}{-1} + \int \frac{3u+7}{u^2+1}du = \frac{3}{2}\ln|t| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} + 3\int \frac{u}{u^2+1}du + 7\int \frac{1}{u^2+1}du =$$

$$\begin{aligned} y &= u^2+1 \\ dy &= 2udu \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}\ln|t| + \frac{1}{2t} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{y}dy + 7\mathrm{arctg}u = \frac{3}{2}\ln|t| + \frac{1}{2t} + \frac{3}{2}\ln|y| + 7\mathrm{arctg}u + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|2x+1| + \frac{1}{2(2x+1)} + \frac{3}{2}\ln|u^2+1| + 7\mathrm{arctg}(x-2) + C ==$$

$$= \frac{3}{2}\ln|2x+1| + \frac{1}{2(2x+1)} + \frac{3}{2}\ln|(x-2)^2+1| + 7\mathrm{arctg}(x-2) + C. \qquad \diamondsuit$$

17.1.2. Trigonometrikus függvények polinomjainak integrálása

I.) $\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$

II.) $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx \quad (n, m \in \mathbb{N})$

i) Az $n=m=0$ eset érdektelen, hiszen ekkor valójában nem is trigonometrikus függvényről van szó.

ii) Ha n páratlan (m tetszőleges)
Legyen $n = 2k+1$, ahol $k \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx = \int \sin^{2k+1} x \cdot \cos^m x dx = \int \sin^{2k} x \cdot \cos^m x \cdot \sin x dx =$$

$$= \int (\sin^2 x)^k \cdot \cos^m x \cdot \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)^k \cdot \cos^m x \cdot \sin x dx = -\int (1-t^2)^k \cdot t^m dt$$

$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x dx \end{aligned}$$

Ezzel a feladatot egy polinom integrálására vezettük vissza.

iii) Ha m páratlan (n tetszőleges)
Legyen $m = 2\ell+1$, ahol $\ell \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx = \int \sin^n x \cdot \cos^{2\ell+1} x dx = \int \sin^n x \cdot \cos^{2\ell} x \cdot \cos x dx =$$

$$= \int \sin^n x \cdot (\cos^2 x)^\ell \cdot \cos x dx = \int \sin^n x \cdot (1-\sin^2 x)^\ell \cdot \cos x dx = -\int t^n \cdot (1-t^2)^\ell dt$$

$$\begin{aligned} u &= \sin x \\ du &= \cos x dx \end{aligned}$$

Ezzel a feladatot most is egy polinom integrálására vezettük vissza.

iv) Ha n és m mindegyike páros, azaz $n=2k$ és $m=2\ell$, ahol $k, \ell \in \mathbb{N}$ és nem mindegyik 0.

Ekkor az úgynevezett linearizáló formulát kell használnunk, amely a jólismert addíciós képletből és a trigonometrikus Pitagorasz tételből vezethető le:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 &= \cos^2 x + \sin^2 x \end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszerből $\cos^2 x$-t illetve $\sin^2 x$-t kifejezve:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad x \in \mathbb{R} \\ \sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx = \int \sin^{2k} x \cdot \cos^{2\ell} x dx = \int (\sin^2 x)^k \cdot (\cos^2 x)^\ell dx =$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^\ell dx = \dots$$

Megmutatható, hogy véges sok lépésben $\int \cos^m ax\, dx \quad (a \in \mathbb{Z}^+, m \in \mathbb{N}$ páratlan) integrálására vezethető a probléma.

17.5. Megjegyzés. *Parciális integrálással rekurziós formula adható erre az esetre.*

17.3. Feladat. *Integráljuk a következő trigonometrikus függvényeket!*

a) $\int \sin^3 \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx$

Megoldás.

$$\int \sin^3 \left(2x+\frac{\pi}{4}\right) dx = \int \sin^2 \left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) dx =$$

$$= \int \left(1-\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) dx = -\frac{1}{2}\int (1-t^2)dt = -\frac{1}{2}(t-\frac{t^3}{3}) + C =$$

$$\begin{aligned} t &= \cos\left(2x+\tfrac{\pi}{4}\right) \\ dt &= -2\sin\left(2x+\tfrac{\pi}{4}\right)dx \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{6}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + C. \qquad \diamondsuit$$

b) $\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx$

Megoldás.

$$\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x \cdot \sin^2 x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right) \cdot \cos x \cdot \sin^2 x dx =$$

$$\begin{aligned} t &= \sin x \\ dt &= \cos x dx \end{aligned}$$

$$= \int \left(1-t^2\right) \cdot t^2 dt = \int t^2 - t^4 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C. \qquad \diamondsuit$$

c) $\int \sin^2 3x dx$

Megoldás.

$$\int \sin^2 3x dx = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6x dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\int \cos t dt =$$

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha &= \tfrac{1-\cos 2\alpha}{2} \\ \sin^2 3x &= \tfrac{1-\cos 6x}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} t &= 6x \\ dt &= 6dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin t + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$ ♢

d) $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx$

Megoldás.

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx = \int (\sin^2 x)^2 \cdot \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \tfrac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos^2 x &= \tfrac{1+\cos 2x}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\cdot(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int 1dx - \frac{1}{8}\int \cos 2x dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \cos^2 2x \cdot \cos 2x dx =$$

$$\begin{aligned} t &= 2x \\ dt &= 2dx \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos^2\alpha &= \tfrac{1+\cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2 2x &= \tfrac{1+\cos 4x}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\int \cos t dt - \frac{1}{16}\int 1 + \cos 4x dx + \frac{1}{8}\int (1 - \sin^2 2x)\cdot \cos 2x dx =$$

$$\begin{aligned} u &= 4x \\ du &= 4dx \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= \sin 2x \\ dy &= 2\cos 2x dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\sin t - \frac{1}{64}\int (1+\cos u)du + \frac{1}{16}\int (1-y^2)dy =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{64}u - \frac{1}{64}\sin u + \frac{1}{16}y - \frac{1}{48}y^3 + C =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$ ♢

17.4. Feladat. *Oldjuk meg a 17.2. feladatban félbehagyott integrált!*

Megoldás.

$$\int \frac{x^4 - 14x^3 + 29x^2 - 26x + 9}{(x^2-x+1)^2\cdot(3x-2)} dx = \int \frac{1}{3x-2} dx - 4\int \frac{1}{x^2-x+1} dx + \int \frac{2x-1+1}{(x^2-x+1)^2} dx =$$

$$\begin{aligned} t &= 3x-2 \\ dt &= 3dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t} dt - 4\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx + \int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} dx + \int \frac{1}{\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)^2} dx =$$

$$\begin{aligned} u &= x^2-x+1 \\ du &= (2x-1)dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t| - 4\cdot\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx + \int \frac{1}{u^2}du + \frac{16}{9}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)^2}dx =$$

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ dy &= \tfrac{2}{\sqrt{3}}dx \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= \tfrac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ dy &= \tfrac{2}{\sqrt{3}}dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x-2| - \frac{8\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{1+y^2}dy - \frac{1}{u} + \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1}{(1+y^2)^2}dy =$$

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{tg} z \quad z\in(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}) \\ dy &= \tfrac{1}{\cos^2 z}dz \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x-2| - \frac{8\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg} y - \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1}{(1+\mathrm{tg}^2 z)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 z}dz =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x-2| - \frac{8\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \cos^2 z dz =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x-2| - \frac{8\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\int 1+\cos 2z dz =$$

$$\begin{aligned} w &= 2z \\ dw &= 2dz \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x-2| - \frac{8\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\int 1+\cos w dw =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x-2| - \frac{8\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{9}w + \frac{2\sqrt{3}}{9}\sin w + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x-2| - \frac{8\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{9}2z + \frac{2\sqrt{3}}{9}\sin 2z + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x-2| - \frac{8\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\mathrm{arctg} y + \frac{2\sqrt{3}}{9}\sin 2\mathrm{arctg} y + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x-2| - \frac{8\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\sin 2\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.\diamondsuit$$

17.2. Házi Feladatok

17.1. Házi Feladat. *Végezzük el a kijelölt határozatlan integrálokat!*

a) $\displaystyle\int \frac{x}{2x+5}dx$ *megoldás*

b) $\displaystyle\int \frac{x}{(3x-1)^2}dx$ *megoldás*

c) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+x-6}dx$ *megoldás*

d) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+2)\cdot(x^2+4x+5)}dx$ *megoldás*

e) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+6x+10)^3}dx$ *megoldás*

f) $\displaystyle\int \sin^3 2x \cdot \cos x \; dx$ *megoldás*

g) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^3 x \; dx$ *megoldás*

h) $\displaystyle\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x \; dx$ *megoldás*

i) $\displaystyle\int \frac{\sin^7 x}{\sqrt{\cos x}} \; dx$ *megoldás*

j) $\displaystyle\int \sin^4 x \; dx$ *megoldás*

17.3. Megoldások

17.1. Házi Feladat. *Végezzük el a kijelölt határozatlan integrálokat!*

a) $\displaystyle\int \frac{x}{2x+5}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{x}{2x+5}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+5)-\frac{5}{2}}{2x+5}dx = \int \frac{1}{2}dx - \frac{5}{2}\underbrace{\int \frac{1}{2x+5}dx}_{\substack{t \,=\, 2x+5 \\ dt \,=\, 2dx}} = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\int \frac{1}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\ln|t| + C = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\ln|2x+5| + C.$$

♢

vissza a feladathoz

b) $\displaystyle\int \frac{x}{(3x-1)^2}dx \ominus$

Megoldás.

$$\frac{x}{(3x-1)^2} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{(3x-1)^2} = \frac{A(3x-1)+B}{(3x-1)^2} = \frac{3Ax+B-A}{(3x-1)^2}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 3A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{3} \\ 0 &= B - A \quad \Rightarrow \quad B = A = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\ominus \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{1}{3x-1}dx}_{\substack{t \,=\, 3x-1 \\ dt \,=\, 3dx}} + \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{1}{(3x-1)^2}dx}_{\substack{t \,=\, 3x-1 \\ dt \,=\, 3dx}} = \frac{1}{9}\int \frac{1}{t}dt + \frac{1}{9}\int \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{9}\ln|t| - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{t} + C =$$

$$= \frac{1}{9}\ln|3x-1| - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3x-1} + C.$$

♢

vissza a feladathoz

c) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+x-6}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{5}{x^2+x-6}dx = \int \frac{5}{(x-2)(x+3)}dx \ominus$$

$$\frac{5}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}$$

$$\begin{aligned} 0 &= A+B \quad \Rightarrow \quad A = -B \\ 5 &= 3A-2B \quad \Rightarrow \quad 5A = 5 \quad \Rightarrow \quad A = 1 \quad \Rightarrow \quad B = -1. \end{aligned}$$

$$\ominus \int \underset{\substack{t = x-2 \\ dt = dx}}{\frac{1}{x-2}dx} - \int \underset{\substack{u = x+3 \\ du = dx}}{\frac{1}{x+3}dx} = \int \frac{1}{t}dt - \int \frac{1}{u}du = \ln|t| - \ln|u| + C =$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x+3| + C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

d) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+2)\cdot(x^2+4x+5)}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1}{(x^2+x+2)\cdot(x^2+4x+5)}dx \ominus$$

A nevező irreducibilis másodfokú tényezők szorzata, mivel $D_1 = 1-8 < 0$ és $D_2 = 16-20 < 0$.

$$\frac{1}{(x^2+x+2)\cdot(x^2+4x+5)} =$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5} = \frac{(Ax+B)(x^2+4x+5)+(Cx+D)(x^2+x+2)}{(x^2+x+2)\cdot(x^2+4x+5)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^3+(4A+B+C+D)x^2+(5A+4B+2C+D)x+(5B+2D)}{(x^2+x+2)\cdot(x^2+4x+5)}$$

Az együtthatók egyeztetéséből:

$$\begin{array}{rcll} A+C & = & 0 & \Rightarrow \; C=-A \\ 4A+B+C+D & = & 0 & \Rightarrow \; 3A+B+D=0 \\ 5A+4B+2C+D & = & 0 & \Rightarrow \; 3A+4B+D=0 \\ 5B+2D & = & 1 & \Rightarrow \; D=\frac{1}{2} \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B=0$$

$$3A+\frac{1}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad C=\frac{1}{6}$$

$$\ominus \int \frac{-\frac{1}{6}x}{x^2+x+2}dx + \int \frac{\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}}{x^2+4x+5}dx = -\frac{1}{12}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+2}dx + \frac{1}{12}\int \frac{2x+4+2}{x^2+4x+5}dx =$$

$$= -\frac{1}{12}\int \underset{\substack{t = x^2+x+2 \\ dt = (2x+1)dx}}{\frac{2x+1}{x^2+x+2}dx} + \frac{1}{12}\int \frac{1}{x^2+x+2}dx + \frac{1}{12}\int \underset{\substack{u = x^2+4x+5 \\ du = (2x+4)dx}}{\frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx} + \frac{1}{12}\int \frac{2}{x^2+4x+5}dx =$$

$$= -\frac{1}{12}\int \frac{1}{t}dt + \frac{1}{12}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+2}dx + \frac{1}{12}\int \frac{1}{u}du + \frac{1}{6}\int \frac{1}{(x+2)^2+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{12}\ln|t| + \frac{1}{12}\cdot\frac{4}{7}\int \underset{\substack{y = \frac{\sqrt{7}(x+\frac{1}{2})}{2} \\ dy = \frac{\sqrt{7}}{2}dx}}{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}(x+\frac{1}{2})}{2}\right)^2+1}dx} + \frac{1}{12}\ln|u| + \frac{1}{6}\int \underset{\substack{z = x+2 \\ dz = dx}}{\frac{1}{(x+2)^2+1}dx} =$$

$$= -\frac{1}{12}\ln|x^2+x+2| + \frac{1}{21}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\int \frac{1}{1+y^2}dy + \frac{1}{12}\ln|x^2+4x+5| + \frac{1}{6}\int \frac{1}{1+z^2}dz =$$

$$= -\frac{1}{12}\ln|x^2+x+2| + \frac{2}{21\sqrt{7}}\cdot \mathrm{arctg} y + \frac{1}{12}\ln|x^2+4x+5| + \frac{1}{6}\mathrm{arctg} z + C =$$

$$= -\frac{1}{12}\ln|x^2+x+2| + \frac{2}{21\sqrt{7}}\cdot \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{7}(x+\frac{1}{2})}{2} + \frac{1}{12}\ln|x^2+4x+5| + \frac{1}{6}\mathrm{arctg}(x+2) + C. \quad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

e) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+6x+10)^3}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{2x}{(x^2+6x+10)^3}dx \;\text{⊜}$$

Az integrandus valódi racionális tört (a számláló lineáris, a nevező hatodfokú). A nevező tovább már nem bontható, hiszen $D=36-40<0$. A törtet elemi törtek összegére bontjuk, amit megtehetünk az egyenlő együtthatók módszerével, vagy a „*teve szabály*"-t alkalmazva az alábbi módon:

$$\text{⊜} \int \frac{2x+6-6}{(x^2+6x+10)^3}dx = \underset{\substack{t \,=\, x^2+6x+10 \\ dt \,=\, (2x+6)dx}}{\int \frac{2x+6}{(x^2+6x+10)^3}dx} - 6\underset{\substack{u \,=\, x+3 \\ du \,=\, dx}}{\int \frac{1}{((x+3)^2+1)^3}dx} =$$

$$= \int \frac{1}{t^3}dt - \underset{\substack{u \,=\, \mathrm{tg} y \quad y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \\ du \,=\, \frac{1}{\cos^2 y}dy}}{6\int \frac{1}{(1+u^2)^3}dx} = -\frac{2}{t^2} - 6\int \frac{1}{(1+tg^2 y)^3}\cdot\frac{1}{\cos^2 y}dy =$$

$$= -\frac{2}{(x^2+6x+10)^2} - 6\int \cos^4 y\; dy = -\frac{2}{(x^2+6x+10)^2} - 6\int (\cos^2 y)^2 dy =$$

$$= -\frac{2}{(x^2+6x+10)^2} - 6\int \left(\frac{1+\cos 2y}{2}\right)^2 dy =$$

$$= -\frac{2}{(x^2+6x+10)^2} - \frac{3}{2}\int 1+2\cos 2y+\cos^2 y\; dy =$$

$$= -\frac{2}{(x^2+6x+10)^2} - \frac{3}{2}y - \underset{\substack{z \,=\, 2y \\ dz \,=\, 2dy}}{3\int \cos 2y\; dy} - \frac{3}{2}\int \frac{1+\cos 4y}{2}dy =$$

$$= -\frac{2}{(x^2+6x+10)^2} - \frac{3}{2}\mathrm{arctg} u - \frac{3}{2}\int \cos z\; dz - \frac{3}{4}y - \underset{\substack{w \,=\, 4y \\ dw \,=\, 4dy}}{\frac{3}{4}\int \cos 4y\; dy} =$$

$$= -\frac{2}{(x^2+6x+10)^2} - \frac{3}{2}\mathrm{arctg}(x+3) - \frac{3}{2}\sin z - \frac{3}{4}\mathrm{arctg}(x+3) - \frac{3}{16}\int \cos w\; dw =$$

$$= -\frac{2}{(x^2+6x+10)^2} - \frac{3}{2}\mathrm{arctg}(x+3) - \frac{3}{2}\sin 2y - \frac{3}{4}\mathrm{arctg}(x+3) - \frac{3}{16}\sin w + C =$$
$$= -\frac{2}{(x^2+6x+10)^2} - \frac{3}{2}\mathrm{arctg}(x+3) - \frac{3}{2}\sin(2\mathrm{arctg}(x+3)) - \frac{3}{4}\mathrm{arctg}(x+3) -$$
$$-\frac{3}{16}\sin(4\mathrm{arctg}(x+3)) + C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

f) $\int \sin^3 2x \cdot \cos x \; dx$

Megoldás.

$$\int \sin^3 2x \cdot \cos x \; dx = \int (2\sin x \cdot \cos x)^3 \cdot \cos x \; dx = 8\int sin^3 x \cdot \cos^3 x \cdot \cos x \; dx =$$
$$= 8\int sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot \sin x \; dx = 8\int (1-\cos^2 x) \cdot \cos^4 x \cdot \sin x \; dx =$$
$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x \; dx \end{aligned}$$
$$= -8\int (1-t^2)\cdot t^4 dt = -8\frac{t^5}{5} + 8\frac{t^7}{7} + C = -\frac{8}{5}\cos^5 x + \frac{8}{7}\cos^7 x + C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

g) $\int \mathrm{ctg}^3 x \; dx$

Megoldás.

$$\int \mathrm{ctg}^3 x \; dx = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x} \cdot \cos x \; dx =$$
$$\begin{aligned} t &= \sin x \\ dt &= \cos x \; dx \end{aligned}$$
$$= \int \frac{1-t^2}{t^3} dt = \int \frac{1}{t^3} dt - \int \frac{t^2}{t^3} dt = \int t^{-3} dt - \int \frac{1}{t} dt = -\frac{t^{-2}}{2} - \ln|t| + C =$$
$$= -\frac{1}{2\cdot \sin^2 x} - \ln|\sin x| + C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

h) $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x \; dx$

Megoldás.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x \; dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos x \; dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos x \; dx =$$
$$= \int \sin^2 x \cdot (\cos^2 x)^2 \cdot \cos x \; dx = \int \sin^2 x \cdot (1-\sin^2 x)^2 \cdot \cos x \; dx =$$
$$\begin{aligned} t &= \sin x \\ dt &= \cos x \; dx \end{aligned}$$

$$= \int t^2 \cdot (1-t^2)^2 \; dt = \int t^2 \cdot (1-2t^2+t^4) dt = \int t^2 - 2t^4 + t^6 dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{2}{5} \cdot t^5 + \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

i) $\displaystyle \int \frac{\sin^7 x}{\sqrt{\cos x}} \; dx$

Megoldás.

$$\int \frac{\sin^7 x}{\sqrt{\cos x}} \; dx = \int \frac{\sin^6 x \cdot \sin x}{\sqrt{\cos x}} \; dx = \int \underbrace{\frac{(1-\cos^2 x)^3 \cdot \sin x}{\sqrt{\cos x}}}_{\substack{t \;=\; \cos x \\ dt \;=\; -\sin x \; dx}} \; dx =$$

$$= -\int \frac{(1-t^2)^3}{\sqrt{t}} \; dt = -\int \frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{\sqrt{t}} \; dt = \int -t^{-\frac{1}{2}} + 3t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{7}{2}} + t^{\frac{11}{2}} \; dx =$$

$$= -\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 3\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3\frac{t^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} + \frac{t^{\frac{13}{2}}}{\frac{13}{2}} + C = -2\sqrt{\cos x} + \frac{6}{5}\sqrt{\cos^7 x} - \frac{2}{3}\sqrt{\cos^9 x} + \frac{2}{13}\sqrt{\cos 13x} + C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

j) $\displaystyle \int \sin^4 x \; dx$

Megoldás.

$$\int \sin^4 x \; dx = \int (\sin^2 x)^2 \; dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \; dx = \frac{1}{4} \int 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \underbrace{\int \cos 2x \; dx}_{\substack{t \;=\; 2x \\ dt \;=\; 2 \; dx}} + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \int \cos t \; dt + \frac{1}{4} \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8} \underbrace{\int \cos 4x \; dx}_{\substack{u \;=\; 4x \\ du \;=\; 4 \; dx}} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32} \int \cos u \; du = \frac{1}{8} \int \cos 4x \; dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin u + C = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

18. fejezet

Speciális függvényosztályok integrálása II.

18.1. Gyakorlat

18.1.1. Trigonometrikus függvények racionális függvényeinek integrálása

III.) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^n x}dx$ és $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^n x}dx$ alakú integrálok

i) Ha $n=2k \quad k \in \mathbb{N}^*$

$$\int \frac{1}{\sin^n x}dx = \int \frac{1}{\sin^{2k} x}dx = \int \frac{1}{\sin^{2k-2} x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}dx =$$

$$= \int \left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \left(1+\mathrm{ctg}^2 x\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}dx = \int (1+t^2)^{k-1}dt.$$

$$\begin{aligned} t &= \mathrm{ctg}x \quad x\in(0,\pi) \\ dt &= \tfrac{-1}{\sin^2 x}dx \end{aligned}$$

Ezzel a feladatot egy polinom integrálására vezettük vissza.

Hasonlóan járhatunk el $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^n x}dx$ esetén is:

$$\int \frac{1}{\cos^n x}dx = \int \frac{1}{\cos^{2k} x}dx = \int \frac{1}{\cos^{2k-2} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx =$$

$$= \int \left(\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int (1+u^2)^{k-1}du.$$

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{tg}x \quad x\in(-\tfrac{\pi}{2},-\tfrac{\pi}{2}) \\ du &= \tfrac{1}{\cos^2 x}dx \end{aligned}$$

Ezzel ezt a feladatot is egy polinom integrálására vezettük vissza.

ii) Ha $n=2k+1 \quad k\in\mathbb{N}$

$$\int \frac{1}{\sin^n x}dx = \int \frac{1}{\sin^{2k+1} x}dx = \int \frac{\sin x}{(\sin^2 x)^{k+1}}dx = \int \frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)^{k+1}}dx = -\int \frac{1}{(1-t^2)^{k+1}}$$

$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x dx \end{aligned}$$

A feladatot ezzel egy racionális tört integrálására vezettük.

Hasonlóan :

$$\int \frac{1}{\cos^n x}dx = \int \frac{1}{\cos^{2k+1} x}dx = \int \frac{\cos x}{(\cos^2 x)^{k+1}}dx = \int \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^{k+1}}dx = \int \frac{1}{(1-t^2)^{k+1}}$$

$$\begin{aligned} t &= \sin x \\ dt &= \cos x dx \end{aligned}$$

Ezzel ezt a feladatot is egy racionális tört integrálására vezettük vissza.

18.1. Megjegyzés. *Parciális integrálással rekurziós formula adható.*

IV.) tg$x$, vagy ctg$x$ racionális tört-függvényeinek integrálása

$$\int \mathscr{R}(\mathrm{tg}x)dx = \int \mathscr{R}(t)\cdot\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$\begin{aligned} t &= \mathrm{tg}x \quad x\in(-\tfrac{\pi}{2},-\tfrac{\pi}{2}) \\ x &= \mathrm{arctg}t \\ dx &= \tfrac{1}{1+t^2}dt \end{aligned}$$

Ezzel ezt a feladatot is egy racionális tört integrálására vezettük vissza, hasonlóan

$$\int \mathscr{R}(\mathrm{ctg}x)dx = \int \mathscr{R}(y)\cdot\frac{-1}{1+y^2}dy.$$

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{ctg}x \quad x\in(0,\pi) \\ x &= \mathrm{arcctg}y \\ dx &= \tfrac{-1}{1+y^2}dy \end{aligned}$$

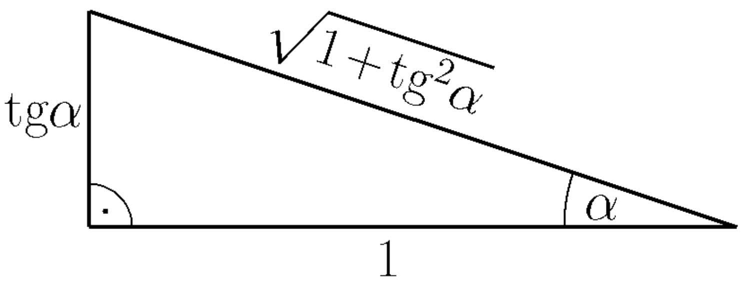
Így egy racionális tört-függvényt kell integrálnunk.

V.) $\sin x$ és $\cos x$ racionális tört-függvényeinek integrálása

$$\int \mathscr{R}(\sin x,\ \cos x)dx \ominus.$$

$$\begin{aligned} t &= \mathrm{tg}\tfrac{x}{2} \quad x\in(-\pi,\pi) \\ x &= 2\mathrm{arctg}t \\ dx &= \tfrac{2}{1+t^2}dt \end{aligned}$$

$\sin x$ és $\cos x$ átírásához tekintsük a következő ábrát:



$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$$

Az addíciós összefüggések alapján:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \tfrac{2\cdot\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} \overset{\alpha=\frac{x}{2}}{\Rightarrow} \sin x &= \tfrac{2\cdot\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \tfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \tfrac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} \overset{\alpha=\frac{x}{2}}{\Rightarrow} \cos x &= \tfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \tfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Ezeket az összefüggéseket megkaphatjuk pusztán az addíciós képletek és a négyzetes összefüggés (trigonometrikus Pitagorasz-tétel) alkalmazásával:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\frac{\sin^2 x2+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \left(1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Így

$$\ominus \int \mathscr{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Azaz újfent elég egy racionális tört-függvényt integrálni.

18.2. Megjegyzés. *Ezzel a módszerrel minden ilyen típusú integrál megoldható (a korábban tárgyalt esetek is), de nem mindig ez a célszerű út.*

Összefoglalva $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$-es helyettesítés során az alábbiak igazak:

$$\boxed{\begin{aligned} t &= \mathrm{tg}\frac{x}{2} \quad x\in(-\pi,\pi) \\ dx &= \frac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}}$$

VI.) Az előző típusba tartozó integrálok esetén, ha $\mathscr{R}(\sin x,\ \cos x) = \mathscr{R}(-\sin x,\ -\cos x)$, akkor az $y = \mathrm{tg}x$-es helyettesítés is célravezető és egyszerűbb eredményt ad. Ilyenkor

$$\cos^2 x = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\cos^2 x = \mathrm{tg}^2 x\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{y^2}{1+y^2}$$

Összefoglalva, a helyettesítés során az alábbiak igazak:

$$\boxed{\begin{array}{rcll rcl} y &=& \mathrm{tg}x & x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) & \sin^2 x &=& \frac{y^2}{1+y^2} \\ dx &=& \frac{1}{1+y^2}dy & & \cos^2 x &=& \frac{y^2}{1+y^2} \end{array}}$$

18.3. Megjegyzés. *A* $\mathscr{R}(\sin x,\ \cos x) = \mathscr{R}(-\sin x,\ -\cos x)$ *feltétel a gyakorlatban annyit jelent, hogy mind a* $\sin x$*, mind pedig a* $\cos x$ *hatványai az integrandusban páros kitevősek.*

18.1. Feladat. *Végezzük el a kijelölt határozatlan integrálokat!*

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^4 x}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}dx =$$

$$= -\int (1+\text{ctg}^2 x)\frac{-1}{\sin^2 x}dx = -\int_{\substack{t\ =\ \text{ctg}x\quad x\in(0,\pi)\\ dt\ =\ \frac{-1}{\sin^2 x}dx}} (1+t^2)dt = -t-\frac{t^3}{3}+C = -\text{ctg}x-\frac{1}{3}\cdot\text{ctg}^3 x+C. \qquad \diamondsuit$$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^6 2x}dx$

Megoldás.

$$\int_{\substack{t\ =\ 2x\\ dt\ =\ 2dx}} \frac{1}{\cos^6 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^6 t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^4 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{2}\int \left(1+\text{tg}^2 t\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{2}\int_{\substack{u\ =\ \text{tg}t\quad t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ du\ =\ \frac{1}{\cos^2 t}dt}} (1+u^2)^2 du =$$

$$= \frac{1}{2}\int 1+2u^2+u^4\ du = \frac{1}{2}u+\frac{u^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{u^5}{5}+C = \frac{1}{2}\text{tg}t+\frac{1}{3}\text{tg}^3 t+\frac{1}{10}\text{tg}^5 t+C =$$

$$= \frac{1}{2}\text{tg}2x+\frac{1}{3}\text{tg}^3 2x+\frac{1}{10}\text{tg}^5 2x+C. \qquad \diamondsuit$$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1}{\cos^3 x}dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x}dx = \int_{\substack{t\ =\ \sin x,\ x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\\ dt\ =\ \cos x\ dx}} \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2}dx = \int \frac{1}{(1-t^2)^2}dt = \int \frac{1}{(1-t)^2\cdot(1+t)^2}dt \ominus$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t)^2\cdot(1+t)^2} &= \frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}+\frac{C}{(1-t)^2}+\frac{D}{(1+t)^2} = \\ &= \frac{(B-A)t^3+(C+D-B-A)t^2+(A-B+2C-2D)t+A+B+C+D}{(1-t)^2\cdot(1+t)^2} \end{aligned}$$

A megfelelő együtthatók egyeztetéséből:

$$\begin{aligned} A+B+C+D &= 1 & & \Rightarrow\quad 2A+2C=1 \\ A-B+2C-2D &= 0 \ \Rightarrow\ C=D & & \\ -A-B+C+D &= 0 & & \Rightarrow\quad -2A+2C=0 \Rightarrow\ A=C \\ -A+B &= 0 \ \Rightarrow\ A=B & & \end{aligned}$$

Így $A=B=C=D=\frac{1}{4}$, azaz

$$\frac{1}{(1-t)^2\cdot(1+t)^2}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\right).$$

$$\ominus\frac{1}{4}\int\underbrace{\frac{1}{1-t}dt}_{\substack{u=1-t\\du=-dt}}+\frac{1}{4}\int\underbrace{\frac{1}{1+t}dt}_{\substack{y=1+t\\dy=dt}}+\frac{1}{4}\int\underbrace{\frac{1}{(1-t)^2}dt}_{\substack{u=1-t\\du=-dt}}+\frac{1}{4}\int\underbrace{\frac{1}{(1+t)^2}dt}_{\substack{y=1+t\\dy=dt}}=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{u}du+\frac{1}{4}\int\frac{1}{y}dy-\frac{1}{4}\int\frac{1}{u^2}du+\frac{1}{4}\int\frac{1}{y^2}dy=-\frac{1}{4}\ln|u|+\frac{1}{4}\ln|y|+\frac{1}{4u}-\frac{1}{4y}+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|1-t|+\frac{1}{4}\ln|1+t|+\frac{1}{4(1-t)}-\frac{1}{4(1+t)}+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|1-\sin x|+\frac{1}{4}\ln|1+\sin x|+\frac{1}{4(1-\sin x)}-\frac{1}{4(1+\sin x)}+C. \qquad \diamondsuit$$

d) $\int\frac{3+\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}^2x+2}dx$

Megoldás.

$$\int\underbrace{\frac{3+\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}^2x+2}dx}_{\substack{t=\mathrm{tg}x\quad x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\x=\mathrm{arctg}t\\dx=\frac{1}{1+t^2}dt}}=\int\frac{3+t}{2+t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=\int\frac{3+t}{(2+t^2)\cdot(1+t^2)}dt\ominus$$

$$\frac{3+t}{(2+t^2)\cdot(1+t^2)}=\frac{At+B}{2+t^2}+\frac{Ct+D}{1+t^2}=\frac{(A+C)t^3+(B+D)t^2+(A+2C)t+B+2D}{(2+t^2)\cdot(1+t^2)}$$

$$\left.\begin{array}{rcccc}A+C&=&0&\Rightarrow&A=-C\\B+D&=&0&\Rightarrow&B=-D\\A+2C&=&1&\Rightarrow&C=1\\B+2D&=&3&\Rightarrow&D=3\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}A=-1\\B=-3\end{array}$$

Így

$$\frac{3+t}{(2+t^2)\cdot(1+t^2)}=\frac{-t-3}{2+t^2}+\frac{t+3}{1+t^2}.$$

$$\ominus\int\frac{-t-3}{2+t^2}dt+\int\frac{t+3}{1+t^2}dt=-\frac{1}{2}\int\underbrace{\frac{2t}{2+t^2}dt}_{\substack{u=t^2+2\\du=2tdt}}-3\int\frac{1}{2+t^2}dt+\frac{1}{2}\int\underbrace{\frac{2t}{1+t^2}dt}_{\substack{y=t^2+1\\dy=2tdt}}+3\int\frac{1}{1+t^2}dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du-\frac{3}{2}\int\underbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt}_{\substack{z=\frac{t}{\sqrt{2}}\\dz=\frac{1}{\sqrt{2}}dt}}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{y}dy+3\mathrm{arctg}t=$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|u| + \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+z^2}dz + \frac{1}{2}\ln|y| + 3\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x) =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|\mathrm{tg}^2x+2| + \frac{3}{2}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln|\mathrm{tg}^2x+1| + 3x + C =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|\mathrm{tg}^2x+2| + \frac{3}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln|\mathrm{tg}^2x+1| + 3x + C. \qquad \diamondsuit$$

e) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3\sin x + 5\cos x}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{\sin x}{3\sin x+5\cos x}dx = \underset{\substack{y\,=\,\mathrm{ctg}x \quad x\in(0,\pi)\\ x\,=\,\mathrm{arcctg}y\\ dx\,=\,\frac{-1}{1+y^2}dy}}{\int \frac{1}{3+5\mathrm{ctg}x}dx} = -\int \frac{1}{3+5y}\cdot\frac{1}{1+y^2}dy \ominus$$

$$\frac{1}{(3+5y)\cdot(1+y^2)} = \frac{A}{3+5y} + \frac{By+C}{1+y^2} = \frac{(A+5B)y^2+(5C+3B)y+A+3C}{(3+5y)\cdot(1+y^2)}$$

$$\left.\begin{array}{rclcrcl} A+5B &=& 0 &\Rightarrow& A &=& -5B \\ 5C+3B &=& 0 &\Rightarrow& C &=& \frac{3}{5}B \\ A+3C &=& 1 &\Rightarrow& 1 &=& -5B+\frac{9}{5}B \quad\Rightarrow\quad B=-\frac{5}{16} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} A &=& \frac{25}{16} \\ B &=& -\frac{15}{16} \end{array}$$

Így

$$\frac{1}{(3+5y)\cdot(1+y^2)} = \frac{\frac{25}{16}}{3+5y} - \frac{5}{16}\cdot\frac{y+3}{1+y^2}.$$

$$\ominus -\left(\frac{5}{16}\underset{\substack{t\,=\,5y+3\\ dt\,=\,5dy}}{\int \frac{5}{5y+3}dy} - \frac{5}{16}\int\frac{y+3}{1+y^2}dy\right) = -\frac{5}{16}\int\frac{1}{t}dt + \frac{5}{32}\underset{\substack{u\,=\,1+y^2\\ du\,=\,2ydy}}{\int\frac{2y}{1+y^2}dy} - \frac{15}{16}\int\frac{-1}{1+y^2}dy =$$
$$= -\frac{5}{16}\ln|t| + \frac{5}{32}\int\frac{1}{u}du - \frac{15}{16}\mathrm{arcctg}y = -\frac{5}{16}\ln|5y+3| + \frac{5}{32}\ln|u| - \frac{15}{16}\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}x) + C =$$
$$= -\frac{5}{16}\ln|5\mathrm{ctg}x+3| + \frac{5}{32}\ln|1+y^2| - \frac{15}{16}x + C =$$
$$= -\frac{5}{16}\ln|5\mathrm{ctg}x+3| + \frac{5}{32}\ln|1+\mathrm{ctg}^2x| - \frac{15}{16}x + C. \qquad \diamondsuit$$

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}$-es helyettesítést használva is megoldható a feladat, de ekkor a racionális tört-függvényünk bonyolultabb lesz:

Megoldás.

$$\int \frac{\sin x}{3\sin x + 5\cos x}dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{3\frac{2t}{1+t^2}+5\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{4t}{(1+t^2)(-5t^2+6t+5)}dt = \ldots \quad \diamondsuit$$

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{tg}\tfrac{x}{2} \quad x\in(-\pi,\pi) \\ dx &= \tfrac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x &= \tfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \tfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

Megoldás.

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1+t^2+2t+1-t^2}dt =$$

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{tg}\tfrac{x}{2} \quad x\in(-\pi,\pi) \\ dx &= \tfrac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x &= \tfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \tfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

$$= \int \frac{2}{2t+2}dt = \int \frac{1}{t+1}dt = \int \frac{1}{u}du = \ln|u|+C = \ln|t+1|+C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right|+C. \quad \diamondsuit$$

$$\begin{aligned} u &= t+1 \\ du &= dt \end{aligned}$$

g) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{4-3\cos^2 x}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{\cos 2x}{4-3\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{4-3\cos^2 x}dx = \int \frac{\frac{1-y^2}{1+y^2}}{4-\frac{3}{1+y^2}} \cdot \frac{1}{1+y^2}dy = \int \frac{1-y^2}{(4y^2+1)\cdot(y^2+1)}dy =$$

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{tg}x \quad x\in\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right) \\ dx &= \tfrac{1}{1+y^2}dy \\ \sin^2 x &= \tfrac{y^2}{1+y^2} \\ \cos^2 x &= \tfrac{1}{1+y^2} \end{aligned}$$

$$\frac{1-y^2}{(4y^2+1)\cdot(y^2+1)} = \frac{Ay+B}{y^2+1} + \frac{Cy+D}{4y^2+1} = \frac{(4A+C)y^3+(4B+D)y^2+(A+C)y+B+D}{(4y^2+1)\cdot(y^2+1)}$$

A megfelelő együtthatók egyeztetéséből:

$$\left.\begin{aligned} 4A+C &= 0 \\ A+C &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A=C=0$$

$$\left.\begin{aligned} 4B+D &= -1 \\ B+D &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3B=-2 \Rightarrow B=-\tfrac{2}{3} \Rightarrow C=\tfrac{5}{3}$$

$$\ominus\frac{5}{3}\int\frac{1}{4y^2+1}dy-\frac{2}{3}\int\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{5}{6}\int\frac{1}{t^2+1}dt-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}y=\frac{5}{6}\operatorname{arctg}t-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)+C=$$

$$\begin{aligned} t &= 2y\\ t^2 &= 4y^2\\ dt &= 2dy \end{aligned}$$

$$=\frac{5}{6}\operatorname{arctg}(2y)-\frac{2}{3}x+C=\frac{5}{6}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}x)-\frac{2}{3}x+C. \qquad \diamondsuit$$

18.1.2. Irracionális függvények integrálása

I.) x és $\sqrt[n]{x}$ racionális tört-függvényeinek integrálása

$$\int\mathscr{R}(x,\ \sqrt[n]{x})dx=\int\mathscr{R}(t^n,\ t)n\cdot t^{n-1}dt,$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt[n]{x}\\ x &= t^n\\ dx &= n\cdot t^{n-1}dt \end{aligned}$$

Ezzel racionális tört integrálására vezettük vissza a problémát.

II.) Az $\int\mathscr{R}(x,\ \sqrt[n_1]{x},\ \sqrt[n_2]{x},\ldots,\ \sqrt[n_k]{x})dx$ alakú integrálok esetén legyen

$n:=[n_1;n_2;\ldots;n_k]$ ahol $[a;b]$ az a és b számok legkisebb közös többszöröse,

ekkor a $t=\sqrt[n]{x}$ helyettesítés célravezető.

III.) x és $\sqrt[n]{ax+b}$ racionális tört-függvényeinek integrálása

$$\int\mathscr{R}(x,\ \sqrt[n]{ax+b})dx=\int\mathscr{R}\left(\frac{t^n-b}{a},\ t\right)\cdot\frac{n}{a}\cdot t^{n-1}dt,$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt[n]{ax+b}\\ t^n &= ax+b\\ \tfrac{t^n-b}{a} &= x\\ \tfrac{n}{a}\cdot t^{n-1}dt &= dx \end{aligned}$$

így most is egy racionális törtet kell integrálni.

IV.) Az $\int\mathscr{R}(x,\ \sqrt[n_1]{ax+b},\ \sqrt[n_2]{ax+b},\ldots,\ \sqrt[n_k]{ax+b})dx$ alakú integrálok esetén legyen

$n:=[n_1;n_2;\ldots;n_k]$ ahol $[a;b]$ az a és b számok legkisebb közös többszöröse,

ekkor a $t=\sqrt[n]{ax+b}$ helyettesítés célravezető.

V.) x és $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ racionális tört-függvényeinek integrálása

$$\int\mathscr{R}\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int\mathscr{R}\left(\frac{b-dt^n}{t^nc-a},\ t\right)\cdot\frac{-ndt^{n-1}\cdot(t^nc-a)-cnt^{n-1}\cdot(b-dt^n)}{(ct^n-a)^2}dt,$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt[n]{\tfrac{ax+b}{cx+d}}\\ t^n\cdot(cx+d) &= ax+b\\ x\cdot(t^nc-a) &= b-dt^n\\ x &= \tfrac{b-dt^n}{t^nc-a}\\ dx &= \tfrac{-ndt^{n-1}\cdot(t^nc-a)-cnt^{n-1}\cdot(b-dt^n)}{(ct^n-a)^2}dt \end{aligned}$$

VI.) Az $\displaystyle\int \mathscr{R}\left(x,\ \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\dots,\ \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ alakú integrálok esetén legyen

$n := [n_1; n_2; \dots ; n_k]$ ahol $[a;b]$ az a és b számok legkisebb közös többszöröse,

ekkor a $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ helyettesítés célravezető.

VII.) Az $\displaystyle\int \mathscr{R}\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ alakú integrálok esetén a másodfokú kifejezés főegyűttható-jától és diszkriminánsától függően a teljes-négyzetté alakítás és helyettesítés után az alábbi három integrál valamelyikéhez jutunk:

a) $a<0,\ D>0$

$$\underset{\substack{t\ =\ \sin u\quad -\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2}\\ dt\ =\ \cos u\ du}}{\int \sqrt{1-t^2}dt} = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\cdot\cos u\ du = \int \sqrt{\cos^2 u}\cdot \cos u\ du =$$

$$= \underset{-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \cos u\ge 0}{\int |\cos u|\cdot\cos u\ du} = \int \cos^2 u\ du = \dots$$

Ezzel a feladatot egy korábban tárgyalt problémára vezettük vissza. (258. oldal)

b) $a>0,\ D<0$

$$\underset{\substack{t\ =\ \mathrm{tg} u\quad -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}\\ dt\ =\ \frac{1}{\cos^2 u}du}}{\int \sqrt{1+t^2}dt} = \int \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 u}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}du = \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}du =$$

$$= \underset{-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \cos u>0}{\int \frac{1}{|\cos u|}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}du} = \int \frac{1}{\cos^3 u}du = \dots$$

Ezzel a feladatot egy korábban tárgyalt problémára vezettük vissza. (270. oldal)

c) Az $a>0,\ D>0$ esetben úgynevezett *Euler-helyettesítés*t használunk.

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{a}x+t\\ ax^2+bx+c &= ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2\\ x(b-2\sqrt{a}t) &= t^2-c\\ x &= \tfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}\\ dx &= \tfrac{2t(b-2\sqrt{a}t)+(t^2-c)2\sqrt{a}}{(b-2\sqrt{a}t)^2}dt\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{a}\tfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}+t\\ x &= \tfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}\\ dx &= \tfrac{2t(b-2\sqrt{a}t)+(t^2-c)2\sqrt{a}}{(b-2\sqrt{a}t)^2}dt\end{aligned}$$

18.4. Megjegyzés.

1.) Az Euler-helyettesítés alkalmazható lenne a VIIb esetben is, azaz csak annyi a fontos, hogy az $a>0$ feltétel teljesüljön. Azonban könnyen látható, hogy a $t=\mathrm{tg} u$ helyettesítés lényegesen egyszerűbb.

2.) Az előző felsorolásból nem véletlenül maradt ki az $a<0,\ D<0$ eset, hiszen ilyenkor minden $x\in\mathbb{R}$ esetén $ax^2+bx+c<0$, így az $\sqrt{ax^2+bx+c}$ kifejezés értelmezési tartománya üreshalmaz.

18.2. Feladat. *Végezzük el a kijelölt határozatlan integrálokat!*

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x}+1}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}+1}dx = \int \frac{t^2}{t+1}\cdot 2tdt = 2\int \frac{t^3}{t+1}dt ⊜$$

$$\begin{array}{rcl} t & = & \sqrt{x} \\ x & = & t^2 \\ dx & = & 2tdt \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{array}{cccc} t^3 & +0\cdot t^2 & +0\cdot t & +0 \\ t^3 & + \; t^2 & & \\ \hline & - \; t^2 & & \\ & - \; t^2 & - \; t & \\ \hline & & + \; t & \\ & & t & +1 \\ \hline & & & -1 \end{array} : (t+1) = \quad t^2-t+1, \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{t^3}{t+1} = t^2-t+1-\frac{1}{t+1}$$

$$⊜ 2\int t^2-t+1\ dt - 2\int \frac{1}{t+1}dt = \frac{2}{3}t^3-t^2+2t-\int \frac{1}{u}du = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}-|x|+2\sqrt{x}-\ln|u|+C =$$

$$\begin{array}{rcl} u & = & t+1 \\ du & = & dt \end{array}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+2\sqrt{x}-\ln|t+1|+C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}-|x|+2\sqrt{x}-\ln|\sqrt{x}+1|+C. \qquad \diamondsuit$$

b) $\displaystyle\int x\cdot\sqrt{3x-4}dx$

Megoldás.

$$\int x\cdot\sqrt{3x-4}dx = \int \frac{t^2+4}{3}\cdot t\cdot\frac{2}{3}t\ dt = \frac{2}{9}\int t^4+4t^2\ dt = \frac{2}{45}t^5+\frac{8}{27}t^3+C =$$

$$\begin{array}{rcl} t & = & \sqrt{3x-4} \\ x & = & \frac{t^2+4}{3} \\ dx & = & \frac{2}{3}tdt \end{array}$$

$$= \frac{2}{45}\sqrt{(3x-4)^5}+\frac{8}{27}\sqrt{(3x-4)^3}+C. \qquad \diamondsuit$$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{t^6}{t^3-t^2}\cdot 6t^5\ dt = 6\int \frac{t^9}{t-1}\ dt = 6\int \frac{t^9-1+1}{t-1}\ dt =$$

$$\begin{array}{rcl} t & = & \sqrt[6]{x} \\ x & = & t^6 \\ dx & = & 6t^5dt \end{array}$$

$$= 6\int \frac{(t-1)(t^8+t^7+t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1)}{t-1}\,dt + 6\int \frac{1}{t-1}\,dt = \quad \begin{array}{rcl} u &=& t-1 \\ du &=& dt \end{array}$$

$$= 6\int t^8+t^7+t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1dt + 6\int \frac{1}{u}\,du =$$

$$= \frac{2}{3}t^9 + \frac{3}{4}t^8 + \frac{6}{7}t^7 + t^6 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 6t + \ln|u| + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt[6]{x^9} + \frac{3}{4}\sqrt[6]{x^8} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + \sqrt[6]{x^6} + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4} + 2\sqrt[6]{x^3} + 3\sqrt[6]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} + \ln|t-1| + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + x + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + \ln|\sqrt[6]{x}-1| + C. \qquad \diamondsuit$$

d) $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+4x+5}dx$

Megoldás.

$$\int \sqrt{-x^2+4x+5}dx = \int \sqrt{9-(x-2)^2}dx = 3\int \sqrt{1-\left(\frac{x-2}{3}\right)^2}dx \quad = 9\int \sqrt{1-t^2}dt =$$

$$\begin{array}{rcl} t &=& \frac{x-2}{3} \\ dt &=& \frac{1}{3}dx \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} t &=& \sin u \ \left(-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}\right) \\ dt &=& \cos u\ du \end{array}$$

$$= 9\int \sqrt{1-\sin^2 u}\cdot\cos u\ du = 9\int \underbrace{|\cos u|}_{\substack{\text{ha } -\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2},\\ \text{akkor } \cos u\ge 0}}\cdot\cos u\ du = 9\int \cos^2 u\ du = 9\int \frac{\cos 2u+1}{2}du =$$

$$= \frac{9}{2}u + \frac{9}{2}\int \cos 2u\ du = \frac{9}{2}\arcsin t + \frac{9}{2}\int \cos y\ dy = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x-2}{3} + \frac{9}{2}\cdot\sin y + C =$$

$$\begin{array}{rcl} y &=& 2u \\ dy &=& 2\ du \end{array}$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x-2}{3} + \frac{9}{2}\cdot\sin 2u + C = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x-2}{3} + \frac{9}{2}\cdot\sin(2\arcsin\frac{x-2}{3}) + C. \qquad \diamondsuit$$

e) $\displaystyle\int \sqrt{2x^2+8x+10}dx$

Megoldás.

$$\int \sqrt{2x^2+8x+10}dx = \sqrt{2}\int \underbrace{\sqrt{x^2+4x+5}}_{D=16-20<0}dx = \sqrt{2}\int \sqrt{(x+2)^2+1}dx = \sqrt{2}\int \sqrt{t^2+1}\ dt =$$

$$\begin{array}{rcl} t &=& x+2 \\ dt &=& dx \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} t &=& \mathrm{tg} u \ \left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right) \\ dt &=& \frac{1}{\cos^2 u}du \end{array}$$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{\mathrm{tg}^2 u+1}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}du = \sqrt{2}\int \sqrt{\frac{\sin^2 u+\cos^2 u}{\cos^2 u}}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}du = \sqrt{2}\int \underbrace{\frac{1}{|\cos u|}}_{\substack{\text{ha } -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2},\\ \text{akkor } \cos u>0}}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}du =$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{1}{\cos^3 u}du \ominus$$

Az $\int \frac{1}{\cos^3 u} du$ integrállal már foglalkoztunk. (272. oldal, c feladat.)

$$⊜\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\ln|1-\sin u|+\frac{1}{4}\ln|1+\sin u|+\frac{1}{4(1-\sin u)}-\frac{1}{4(1+\sin u)}\right)+C=$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln|1-\sin(\operatorname{arctg} t)|+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln|1+\sin(\operatorname{arctg} t)|+\frac{\sqrt{2}}{4(1-\sin(\operatorname{arctg} t))}-\frac{\sqrt{2}}{4(1+\sin(\operatorname{arctg} t))}+C=$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln|1-\sin(\operatorname{arctg}(x+2))|+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln|1+\sin(\operatorname{arctg}(x+2))|+\frac{\sqrt{2}}{4(1-\sin(\operatorname{arctg}(x+2)))}-$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{4(1+\sin(\operatorname{arctg}(x+2)))}+C. \qquad \diamondsuit$$

f) $\int \sqrt{4x^2+3x-1}dx$

Megoldás.

$$\int \sqrt{4x^2+3x-1}dx=\int\left(2\cdot\frac{t^2-1}{3-4t}+t\right)\cdot\frac{-4t^2+6t-4}{(3-4t)^2}dt=$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x^2+3x-1} &= \sqrt{4}x+t=2x+t\\
4x^2+3x-1 &= 4x^2+4xt+t^2\\
(3-4t)x &= t^2-1\\
x &= \frac{t^2-1}{3-4t}\\
dx &= \frac{2t(3-4t)+4(t^2-1)}{(3-4t)^2}dt=\frac{-4t^2+6t-4}{(3-4t)^2}dt
\end{aligned}$$

$$=\int\frac{-2t^2+3t-2}{3-4t}\cdot\frac{-4t^2+6t-4}{(3-4t)^2}dt=2\int\frac{(-2t^2+3t-2)^2}{(3-4t)^3}dt=2\int\frac{4t^4-12t^3+17t^2-12t+4}{\underbrace{(3-4t)^3}_{-64t^3+144t^2-108t+27}}dt⊜$$

A racionális áltörtet egy polinom és egy valódi racionális törtfüggvény összegére bontjuk:

$$\begin{array}{rrrrr}
4t^4 & -12t^3 & +17t^2 & -12t & +4 \\
4t^4 & -\ 9t^3 & +\frac{27}{4}t^2 & -\frac{27}{16}t & \\
\hline
 & -3t^3 & +\frac{41}{4}t^2 & -\frac{165}{16}t & +4 \\
 & -3t^3 & +\frac{27}{4}t^2 & -\frac{81}{16}t & +\frac{81}{64} \\
\hline
 & & \frac{7}{2}t^2 & -\frac{21}{4}t & +\frac{175}{64}
\end{array} \quad :(-64t^3+144t^2-108t+27)= \ -\frac{1}{16}t+\frac{3}{64},$$

így $$\frac{4t^4-12t^3+17t^2-12t+4}{(3-4t)^3}=-\frac{1}{16}t+\frac{3}{64}+\frac{\frac{7}{2}t^2-\frac{21}{4}t+\frac{175}{64}}{(3-4t)^3}.$$

$$⊜2\int-\frac{1}{16}t+\frac{3}{64}+\frac{\frac{7}{2}t^2-\frac{21}{4}t+\frac{175}{64}}{(3-4t)^3}dx=-\frac{1}{16}t^2+\frac{3}{32}t-\frac{1}{64}\int\frac{224t^2-336t+175}{(3-4t)^3}dx⊜$$

A valódi racionális törtfüggvényt, az egyenlő együtthatók módszerével, elemi törtek összegére bontjuk:

$$
\begin{aligned}
\frac{224t^2-336t+175}{(3-4t)^3} &= \frac{A}{3-4t}+\frac{B}{(3-4t)^2}+\frac{C}{(3-4t)^3}=\frac{A(3-4t)^2+B(3-4t)+C}{(3-4t)^3}= \\
&= \frac{16At^2+(-24A-4B)t+9A+3B+C}{(3-4t)^3}
\end{aligned}
$$

A megfelelő együtthatók egyeztetéséből

$$
\begin{array}{rclcrcl}
16A &=& 224 & \Rightarrow & A &=& 14 \\
-24A-4B &=& -336 & \Rightarrow & B &=& 0 \\
9A+3B+C &=& 175 & \Rightarrow & C &=& 49
\end{array}
$$

Visszaírva az integrálba:

$$
= -\frac{1}{16}t^2+\frac{3}{32}t+\frac{1}{64}\underbrace{\int\frac{14}{3-4t}dt}_{\substack{u\,=\,3-4t\\ du\,=\,-4dt}}+\frac{1}{64}\underbrace{\int\frac{49}{(3-4t)^3}dt}_{\substack{u\,=\,3-4t\\ du\,=\,-4dt}}=-\frac{1}{16}t^2+\frac{3}{32}t+\frac{7}{128}\int\frac{1}{u}\,du+\frac{49}{256}\int\frac{1}{u^3}\,du=
$$

$$
=-\frac{1}{16}t^2+\frac{3}{32}t+\frac{7}{128}\ln|u|-\frac{49}{512}\frac{1}{u^2}+C=-\frac{1}{16}t^2+\frac{3}{32}t+\frac{7}{128}\ln|3-4t|-\frac{49}{512(3-4t)^2}+C=
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\sqrt{4x^2+3x-1} &=& \sqrt{4}x+t=2x+t \\
t &=& \sqrt{4x^2+3x-1}-2x.
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&=-\frac{1}{16}(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x)^2+\frac{3}{32}(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x)+\frac{7}{128}\ln|3-4(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x)|- \\
&\quad-\frac{49}{512(3-4(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x))^2}+C.
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

18.2. Házi Feladatok

18.1. Házi Feladat. *Végezzük el a kijelölt határozatlan integrálokat!*

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^5 2x} dx$ *megoldás*

b) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\, dx$ *megoldás*

c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x}{2 + \operatorname{tg}^2 x}\, dx$ *megoldás*

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx$*. Adjunk több megoldást!* *megoldás*

e) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x + 2}{3\cos^2 x - 4}\, dx$ *megoldás*

f) $\displaystyle\int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}\, dx$ *megoldás*

g) $\displaystyle\int \frac{x - \sqrt[3]{2x+3}}{3 + \sqrt[3]{2x+3} + 2x}\, dx$ *megoldás*

h) $\displaystyle\int \frac{2 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + 1}\, dx$ *megoldás*

i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{11 - 6x + x^2}}\, dx$ *megoldás*

j) $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + 6x + 18}\, dx$ *megoldás*

k) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\, dx$ *megoldás*

l) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)\cdot\sqrt{1-x^2}}\, dx$ *megoldás*

m) $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 2x - 3}\, dx$ *megoldás*

18.3. Megoldások

18.1. Házi Feladat. *Végezzük el a kijelölt határozatlan integrálokat!*

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^5 2x}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1}{\sin^5 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin^5 t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{\sin t}{\sin^6 t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{\sin t}{(1-\cos^2 t)^3}dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-u^2)^3}du$$

$$\begin{array}{rcl} t & = & 2x \\ dt & = & 2dx \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} u & = & \cos t \\ du & = & -\sin t\ dt \end{array}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-u)^3\cdot(1+u)^3}du \ominus$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-u)^3\cdot(1+u)^3} &= \frac{A}{1-u}+\frac{B}{(1-u)^2}+\frac{C}{(1-u)^3}+\frac{D}{1+u}+\frac{E}{(1+u)^2}+\frac{F}{(1+u)^3} \\ &= \frac{(A-D)u^5+(A-B+D-E)u^4+(C-2A-2B+2D-2E-F)u^3}{(1-u)^3\cdot(1+u)^3}+ \\ &\quad +\frac{(3C-2A+3F-2D)u^2+(A+2B+3C-D-2E-3F)u+A+B+C+D+E+F}{(1-u)^3\cdot(1+u)^3} \end{aligned}$$

A megfelelő együtthatók egyeztetéséből:

$$\begin{aligned} A-D &= 0 \\ A-B+D-E &= 0 \\ -2A-2B+C+2D-2E-F &= 0 \\ -2A+3C-2D+3F &= 0 \\ A+2B+3C-D-2E-3F &= 0 \\ A+B+C+D+E+F &= 1 \end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszert megoldva az alábbi együtthatók kaphatók:

$$A=\frac{3}{16},\quad B=-\frac{3}{8},\quad C=\frac{1}{2},\quad D=\frac{3}{16},\quad E=\frac{3}{4},\quad F=-\frac{1}{4}.$$

$$\ominus -\frac{1}{2}\int \frac{\frac{3}{16}}{1-u}du + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{3}{8}}{(1-u)^2}du - \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{(1-u)^3}du - \frac{1}{2}\int \frac{\frac{3}{16}}{1+u}du - \frac{1}{2}\int \frac{\frac{3}{4}}{(1+u)^2}du + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{4}}{(1+u)^3}du =$$

$$\begin{array}{rcl} y & = & 1-u \\ dy & = & -du \end{array} \quad \begin{array}{rcl} y & = & 1-u \\ dy & = & -du \end{array} \quad \begin{array}{rcl} y & = & 1-u \\ dy & = & -du \end{array} \quad \begin{array}{rcl} z & = & 1+u \\ dz & = & du \end{array} \quad \begin{array}{rcl} z & = & 1+u \\ dz & = & du \end{array} \quad \begin{array}{rcl} z & = & 1+u \\ dz & = & du \end{array}$$

$$= \frac{3}{32}\int \frac{1}{y}dy - \frac{3}{16}\int \frac{1}{y^2}dy + \frac{1}{4}\int \frac{1}{y^3}dy - \frac{3}{32}\int \frac{1}{z}dz - \frac{3}{8}\int \frac{1}{z^2}dz + \frac{1}{8}\int \frac{1}{z^3}dz =$$

$$= \frac{3}{32}\ln|y| + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{y} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{y^2} - \frac{3}{32}\ln|z| + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{z^2} + C = \frac{3}{32}\ln|1-\cos 2x| +$$

$$+\frac{3}{16\cdot(1-\cos 2x)} - \frac{1}{8\cdot(1-\cos 2x)^2} - \frac{3}{32}\ln|1+\cos 2x| + \frac{3}{8\cdot(1+\cos 2x)} - \frac{1}{16\cdot(1-\cos 2x)^2} + C.\diamondsuit$$

vissza a feladathoz

b) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\, dx$

Megoldás.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^6 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^6 x}\, dx - \int \frac{1}{\cos^4 x}\, dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^4 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$= \underbrace{\int (1+\mathrm{tg}^2 x)^2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\, dx}_{\substack{t\,=\,\mathrm{tg}x\\ dt\,=\,\frac{1}{\cos^2 x}\,dx}} - \underbrace{\int (1+\mathrm{tg}^2 x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\, dx}_{\substack{t\,=\,\mathrm{tg}x\\ dt\,=\,\frac{1}{\cos^2 x}\,dx}} =$$

$$= \int (1+t^2)^2\, dt - \int 1+t^2\, dt = \int t^4+t^2\, dt = \frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}+C = \frac{1}{5}\,\mathrm{tg}^5 x+\frac{1}{3}\,\mathrm{tg}^3 x+C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{ctg}\, x+\mathrm{tg}\, x}{2+\mathrm{tg}^2 x}\, dx$

Megoldás.

$$\int \frac{\mathrm{ctg}\, x+\mathrm{tg}\, x}{2+\mathrm{tg}^2 x}\, dx = \int \frac{\frac{1}{\mathrm{tg}\, x}+\mathrm{tg}\, x}{2+\mathrm{tg}^2 x}\, dx = \underbrace{\int \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{2\,\mathrm{tg}\, x+\mathrm{tg}^3 x}\, dx}_{\substack{t\,=\,\mathrm{tg}x \quad x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ x\,=\,\mathrm{arctg}t\\ dx\,=\,\frac{1}{1+t^2}\,dt}} = \int \frac{1+t^2}{2t+t^3}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt =$$

$$= \int \frac{1}{t(2+t^2)}\, dt \ominus$$

$$\frac{1}{t(2+t^2)} = \frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{2+t^2} = \frac{At^2+2A+Bt^2+Ct}{t(2+t^2)} = \frac{(A+B)t^2+Ct+2A}{t(2+t^2)}.$$

A megfelelő együtthatók egyeztetéséből:

$$\begin{aligned} A+B &= 0\\ C &= 0\\ 2A &= 1, \end{aligned}$$

innen $A=\dfrac{1}{2}\quad B=-\dfrac{1}{2}\quad C=0.$

$$\ominus\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\, dt - \frac{1}{4}\underbrace{\int \frac{2t}{2+t^2}\, dt}_{\substack{u\,=\,t^2+2\\ du\,=\,2t\ dt}} = \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\, du =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\,\mathrm{tg}\, x| - \frac{1}{4}\ln|u|+C = \frac{1}{2}\ln|\,\mathrm{tg}\, x| - \frac{1}{4}\ln|\,\mathrm{tg}^2 x+2|+C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

d) $\int \frac{1}{\sin x}\, dx$. Adjunk több megoldást!

1.) Elemi átalakításokkal:

Megoldás.

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}\, dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\, dx}_{\substack{t = \cos\frac{x}{2}\\ dt = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\ dx}} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\, dx}_{\substack{u = \sin\frac{x}{2}\\ du = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\ dx}} =$$

$$= -\int \frac{1}{t}\, dt + \int \frac{1}{u}\, du = -\ln|t| + \ln|u| + C = -\ln|\cos\frac{x}{2}| + \ln|\sin\frac{x}{2}| + C. \qquad \diamondsuit$$

2.) $\int \frac{1}{\sin^{2k+1} x}\, dx$ alakú integrálként:

Megoldás.

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\, dx = \underbrace{\int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\, dx}_{\substack{t = \cos x\\ dt = -\sin x\ dx}} = -\int \frac{1}{1-t^2}\, dt = -\int \frac{1}{(1-t)(1+t)}\, dt \ominus$$

$$\frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A+At+B-Bt}{(1-t)(1+t)} = \frac{(A-B)t+A+B}{(1-t)(1+t)}$$

A megfelelő együtthatók egyeztetéséből:

$$\left.\begin{array}{rcl} A-B &=& 0\\ A+B &=& 1, \end{array}\right\} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}.$$

$$\ominus -\frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{1-t}\, dt}_{\substack{u = 1-t\\ du = -dt}} - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{1+t}\, dt}_{\substack{y = 1+t\\ dy = dt}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\, du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{2}\ln|y| + C = \frac{1}{2}\ln|1-\cos x| - \frac{1}{2}\ln|1+\cos x| + C. \qquad \diamondsuit$$

3.) $\int \mathscr{R}(\sin x) dx$ alakú integrálként, ($t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel):

Megoldás.

$$\underbrace{\int \frac{1}{\sin x}\, dx}_{\substack{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad x\in(-\pi,\pi)\\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt\\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}}} = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + C = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

e) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x+2}{3\cos^2 x-4}\,dx$

Megoldás.

$$\int \frac{\sin^2 x+2}{3\cos^2 x-4}\,dx = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}+2}{3\cdot\frac{1}{1+t^2}-4}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{\frac{t^2+2+2t^2}{1+t^2}}{\frac{3-4+t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$\begin{aligned} t &= \mathrm{tg}x \quad x\in(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}) \\ dx &= \tfrac{1}{1+t^2}\,dt \\ \sin^2 x &= \tfrac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x &= \tfrac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

$$= \int \frac{3t^2+2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}\,dt \ominus$$

$$\begin{aligned} \frac{3t^2+2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} &= \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1} = \\ &= \frac{A(t+1)(t^2+1)+B(t-1)(t^2+1)+(Ct+D)(y^2-1)}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \\ &= \frac{(A+B+C)t^3+(A-B+D)t^2+(A+B-C)t+(A-B-D)}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} \end{aligned}$$

A megfelelő együtthatók egyeztetéséből:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ A-B+D &= 3 \\ A+B-C &= 0 \\ A-B-D &= 2 \end{aligned}$$

Innen $A=\frac{5}{4}, \quad B=-\frac{5}{4}, \quad C=0, \quad D=\frac{1}{2}$.

$$\ominus \frac{5}{4}\int \frac{1}{t-1}\,dt - \frac{5}{4}\int \frac{1}{1+t}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dy = \frac{5}{4}\int \frac{1}{u}\,du - \frac{5}{4}\int \frac{1}{y}\,dy + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}t =$$

$$\begin{aligned} u &= t-1 & y &= t+1 \\ du &= dt & dy &= dt \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{4}\ln|u| - \frac{5}{4}\ln|y| + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x)+C = \frac{5}{4}\ln|\mathrm{tg}\,x-1| - \frac{5}{4}\ln|\mathrm{tg}\,x+1| + \frac{1}{2}x+C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

f) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1+t^2+2t}{t^2\cdot(1+t^2)}\,dt \ominus$$

$$\begin{aligned} t &= \mathrm{tg}\tfrac{x}{2} \quad x\in(-\pi,\pi) \\ dx &= \tfrac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x &= \tfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \tfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1+t^2+2t}{t^2\cdot(1+t^2)} &= \frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{Ct+D}{1+t^2}=\\ &= \frac{At(1+t^2)+B(1+t^2)+(Ct+D)t^2}{t^2\cdot(1+t^2)}=\\ &= \frac{(A+C)t^3+(B+D)t^2+At+B}{t^2\cdot(1+t^2)}\end{aligned}$$

A megfelelő együtthatók egyeztetéséből:

$$\begin{aligned}A+C &= 0\\ B+D &= 1\\ A &= 2\\ B &= 1\end{aligned}$$

Innen $A=2, \quad B=1, \quad C=-2, \quad D=0.$

$$\ominus 2\int\frac{1}{t}\,dt+\int\frac{1}{t^2}\,dt-\underset{\substack{y\,=\,t^2+1\\ dy\,=\,2tdt}}{\int\frac{2t}{t^2+1}\,dt}=2\ln|t|-\frac{1}{t}+\int\frac{1}{y}\,dy=$$

$$=2\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+\ln|1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}|+C.$$ ♢

vissza a feladathoz

g) $\displaystyle\int\frac{x-\sqrt[3]{2x+3}}{3+\sqrt[3]{2x+3}+2x}\,dx$

Megoldás.

$$\underset{\substack{t\,=\,\sqrt[3]{2x+3}\\ x\,=\,\frac{t^3-3}{2}\\ dx\,=\,\frac{3}{2}t^2\,dt}}{\int\frac{x-\sqrt[3]{2x+3}}{3+\sqrt[3]{2x+3}+2x}\,dx}=\int\frac{\frac{t^3-3}{2}-t}{3+t+t^3-3}\cdot\frac{3}{2}t^2\,dt=\frac{1}{2}\int\frac{t^3-3-2t}{t^3+t}\,dt\ominus$$

$$\begin{array}{rrrrl} t^3 & +0t^2 & -2t & -3 & :(t^3+0t^2+t+0)=1,\\ t^3 & +0t^2 & +\ t & +0 & \\ \hline & & -3t & -3 & \end{array}$$

$$\ominus\frac{1}{2}\int 1\,dt-\int\frac{3t+3}{t^3+t}\,dt=\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}\int\frac{t+1}{t(t^2+1)}\,dt\ominus$$

$$\frac{t+1}{t(t^2+1)}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+1}=\frac{(A+B)t^2+Ct+A}{t(t^2+1)}$$

A megfelelő együtthatók egyeztetéséből:

$$\begin{array}{rcll} A+B &=& 0 & \Rightarrow \quad B=-1 \\ C &=& 1 & \\ A &=& 1 & \end{array}$$

$$⊜\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}\int\frac{1}{t}\,dt-\frac{3}{2}\int\frac{-t+1}{t^2+1}\,dt=\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}\ln|t|+\frac{3}{4}\underset{\substack{u\;=\;t^2+1\\ du\;=\;2tdt}}{\int\frac{2t}{t^2+1}\,dt}-\frac{3}{2}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}\ln|t|+\frac{3}{4}\int\frac{1}{u}du-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}t=\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}\ln|t|+\frac{3}{4}\ln|u|-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2x+3}-\frac{3}{2}\ln|\sqrt[3]{2x+3}|+\frac{3}{4}\ln|\sqrt[3]{(2x+3)^2}+1|-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[3]{2x+3}+C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

h) $\displaystyle\int\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}\,dx$

Megoldás.

$$\int\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}\,dx=\int\frac{2+\left(\sqrt[6]{x}\right)^2}{\sqrt[6]{x}+\left(\sqrt[6]{x}\right)^2+\left(\sqrt[6]{x}\right)^3+1}\,dx\underset{\substack{t\;=\;\sqrt[6]{x}\\ t^6\;=\;x\\ 6t^5dt\;=\;dx}}{=}\int\frac{2+t^2}{t^3+t^2+t+1}\cdot 6t^5\,dt=$$

$$\int\frac{6t^7+12t^5}{t^3+t^2+t+1}\,dt\;⊜$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
6t^7 & +\,0t^6 & +12t^5 & +\,0t^4 & +\,0t^3 & +\,0t^2 & +\,0t & +\,0 & :(t^3+t^2+t+1)=\ 6t^4-6t^3+12t^2-12t+6, \\
6t^7 & +\,6t^6 & +\,6t^5 & +\,6t^4 & & & & & \\ \hline
 & -\,6t^6 & +\,6t^5 & -\,6t^4 & +\,0t^3 & +\,0t^2 & +\,0t & +\,0 & \\
 & -\,6t^6 & -\,6t^5 & -\,6t^4 & -\,6t^3 & & & & \\ \hline
 & & 12t^5 & +\,0t^4 & +\,6t^3 & +\,0t^2 & +\,0t & +\,0 & \\
 & & 12t^5 & +12t^4 & +12t^3 & +12t^2 & +\,0t & +\,0 & \\ \hline
 & & & -12t^4 & -\,6t^3 & -12t^2 & +\,0t & +\,0 & \\
 & & & -12t^4 & -12t^3 & -12t^2 & -12t & +\,0 & \\ \hline
 & & & & 6t^3 & +\,0t^2 & +12t & +\,0 & \\
 & & & & 6t^3 & +\,6t^2 & +\,6t & +\,6 & \\ \hline
 & & & & & -\,6t^2 & +\,6t & -\,6 &
\end{array}$$

$$
\circledequal \int 6t^4-6t^3+12t^2-12t+6\ dt+\int \frac{-6t^2+6t-6}{t^3+t^2+t+1}\ dt =
$$
$$
=\frac{6}{5}t^5-\frac{3}{2}t^4+4t^3-6t^2+6t-6\int \frac{t^2-t+1}{(t+1)(t^2+1)}\ dt \circledequal
$$

$$
\frac{t^2-t+1}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2+1}=\frac{(A+B)t^2+(B+C)t+A+C}{(t+1)(t^2+1)}
$$

A megfelelő együtthatók egyeztetéséből:

$$
\begin{aligned}
A+B &= 1\\
B+C &= -1\\
A+C &= 1
\end{aligned}
$$

Innen $A=\frac{3}{2}$, $\quad B=C=-\frac{1}{2}$.

$$
\circledequal \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4}+4\sqrt[6]{x^3}-6\sqrt[6]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-6\int \frac{\frac{3}{2}}{t+1}\ dt-6\int \frac{-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}}{t^2+1}\ dt =
$$
$$
=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4}+4\sqrt[6]{x^3}-6\sqrt[6]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-9\underbrace{\int \frac{1}{t+1}\ dt}_{\substack{u\ =\ t+1\\ du\ =\ dt}}+\frac{3}{2}\underbrace{\int \frac{2t}{t^2+1}\ dt}_{\substack{y\ =\ t^2+1\\ dy\ =\ 2tdt}}+3\int \frac{1}{t^2+1}\ dt =
$$
$$
=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4}+4\sqrt[6]{x^3}-6\sqrt[6]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-9\int \frac{1}{u}\ du+\frac{3}{2}\int \frac{1}{y}\ dy+3\operatorname{arctg} t =
$$
$$
=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4}+4\sqrt[6]{x^3}-6\sqrt[6]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-9\ln|u|+\frac{3}{2}\ln|y|+3\operatorname{arctg} t+C =
$$
$$
=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4}+4\sqrt[6]{x^3}-6\sqrt[6]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-9\ln|\sqrt[6]{x}+1|+\frac{3}{2}\ln|\sqrt[3]{x}+1|+3\operatorname{arctg} t+C \qquad \diamondsuit
$$

vissza a feladathoz

i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{11-6x+x^2}}\ dx$

Megoldás.

$$
\int \frac{1}{\sqrt{11-6x+x^2}}\ dx=\int \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2+2}}\ dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2+1}}\ dx}_{\substack{t\ =\ \frac{x-3}{\sqrt{2}}\\ \sqrt{2}dt\ =\ dx}}=\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\ dt}_{\substack{t\ =\ \operatorname{tg} u\ \ (-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2})\\ dt\ =\ \frac{1}{\cos^2 u}\ du}}=
$$
$$
=\int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 u+1}}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}du=\int \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 u+\cos^2 u}{\cos^2 u}}}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\ du=\int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}}}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\ du=
$$
$$
=\int \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{|\cos u|}}}_{\substack{\text{ha }-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2},\\ \text{akkor }\ \cos u>0}}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\ du=\int \frac{1}{\cos u}\ du=\int \frac{\cos u}{\cos^2 u}\ du=\underbrace{\int \frac{\cos u}{1-\sin^2 u}\ du}_{\substack{y\ =\ \sin u\\ dy\ =\ \cos u\ du}}=\int \frac{1}{1-y^2}\ dy=
$$

$$=\int \frac{1}{(1-y)(1+y)}\,dy=\int \frac{\frac{1}{2}}{1-y}+\frac{\frac{1}{2}}{1+y}\,dy=\frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{1-y}\,dy}_{\substack{z\;=\;y-1\\ dz\;=\;dy}}+\frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{1+y}\,dy}_{\substack{v\;=\;y+1\\ dv\;=\;dy}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\,dz+\frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\,dv=\frac{1}{2}\ln|z|+\frac{1}{2}\ln|v|+C=\frac{1}{2}\ln|y-1|+\frac{1}{2}\ln|y+1|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|\sin u-1|+\frac{1}{2}\ln|\sin u+1|+C=\frac{1}{2}\ln|\sin(\operatorname{arctg}t)-1|+\frac{1}{2}\ln|\sin(\operatorname{arctg}t)+1|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\sin(\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{2}})-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\sin(\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{2}})+1\right|+C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

j) $\int \sqrt{x^2+6x+18}\,dx$

Megoldás.

$$\int \sqrt{x^2+6x+18}\,dx=\int \sqrt{(x+3)^2+9}\,dx=\underbrace{\int \sqrt{\left(\frac{x+3}{3}\right)^2+1}\,dx}_{\substack{t\;=\;\frac{x+3}{3}\\ 3t\;=\;x+3\\ 3dt\;=\;dx}}=\underbrace{\int \sqrt{t^2+1}\;3dt}_{\substack{t\;=\;\operatorname{tg}u\;\left(-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}\right)\\ dt\;=\;\frac{1}{\cos^2 u}\,du}}=$$

$$=\int \sqrt{\operatorname{tg}^2 u+1}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\,du=\int \sqrt{\frac{\sin^2 u+\cos^2 u}{\cos^2 u}}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\,du=\int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\,du=$$

$$=\underbrace{\int \frac{1}{|\cos u|}}_{\substack{\text{ha } -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2},\\ \text{akkor } \cos u>0}}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\,du=\int \frac{1}{\cos^3 u}\,du=\int \frac{\cos u}{\cos^4 u}\,du=\underbrace{\int \frac{\cos u}{(1-\sin^2 u)^2}\,du}_{\substack{y\;=\;\sin u\\ dy\;=\;\cos u\;du}}=$$

$$=\int \frac{1}{(1-y^2)^2}\,dy=\cdots\ominus$$

A részletes megoldás megtalálható a 272. oldal c feladatban.

$$\ominus-\frac{1}{4}\ln|1-\sin u|+\frac{1}{4}\ln|1+\sin u|+\frac{1}{4(1-\sin u)}-\frac{1}{4(1+\sin u)}+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|1-\sin\operatorname{arctg}t|+\frac{1}{4}\ln|1+\sin\operatorname{arctg}t|+\frac{1}{4(1-\sin\operatorname{arctg}t)}-\frac{1}{4(1+\sin\operatorname{arctg}t)}+C$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left|1-\sin\operatorname{arctg}\frac{x+3}{3}\right|+\frac{1}{4}\ln\left|1+\sin\operatorname{arctg}\frac{x+3}{3}\right|+\frac{1}{4(1-\sin\operatorname{arctg}\frac{x+3}{3})}-$$

$$-\frac{1}{4(1+\sin\operatorname{arctg}\frac{x+3}{3})}+C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

k) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\,dx$

Megoldás.

$$\int \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\,dx \qquad = \int t\cdot\frac{3t}{(t^2-1)^2}\,dt \ominus$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\tfrac{x-2}{x-1}} \\ t^2 &= \tfrac{x-2}{x-1} \\ t^2(x-1) &= x-2 \\ (t^2-1)x &= t^2-2 \\ x &= \tfrac{t^2-2}{t^2-1} \\ dx &= \tfrac{3t}{(t^2-1)^2}\,dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3t^2}{(t-1)^2\cdot(t+1)^2} &= \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t-1)^2}+\frac{D}{(t+1)^2} = \\ &= \frac{A(t-1)(t+1)^2+B(t+1)(t-1)^2+C(t+1)^2+D(t-1)^2}{(t-1)^2\cdot(t+1)^2} = \\ &= \frac{(A+B)t^3+(A-B+C+D)t^2+(2D-A-B-2C)t+(B+C+D-A)}{(t-1)^2\cdot(t+1)^2} \end{aligned}$$

A megfelelő együtthatók egyeztetéséből:

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ A-B+C+D &= 3 \\ -A-B-2C+2D &= 0 \\ -A+B+C+D &= 0 \end{aligned}$$

Innen $A=C=D\frac{3}{4}, \quad B=-\frac{3}{4}$.

$$\ominus\frac{3}{4}\int\frac{1}{t-1}\,dt-\frac{3}{4}\int\frac{1}{t+1}\,dt+\frac{3}{4}\int\frac{1}{(t-1)^2}\,dt-\frac{3}{4}\int\frac{1}{(t+1)^2}\,dt=$$

$$\begin{aligned} u &= t-1 \\ du &= dt \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= t+1 \\ dy &= dt \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u &= t-1 \\ du &= dt \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= t+1 \\ dy &= dt \end{aligned}$$

$$\frac{3}{4}\int\frac{1}{u}\,du-\frac{3}{4}\int\frac{1}{y}\,dy+\frac{3}{4}\int\frac{1}{u^2}\,du+\frac{3}{4}\int\frac{1}{y^2}\,dy=\frac{3}{4}\ln|u|-\frac{3}{4}\ln|y|-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{u}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{y}+C=$$

$$=\frac{3}{4}\ln|t-1|-\frac{3}{4}\ln|t+1|-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{t-1}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{t+1}+C=$$

$$=\frac{3}{4}\ln\left|\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}-1\right|-\frac{3}{4}\ln\left|\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+1\right|-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}-1}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+1}+C \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

l) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)\cdot\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1}{(x^2+1)\cdot\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{(1+\sin^2 t)\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}}\cdot\cos t\,dt = \int \frac{1}{(1+\sin^2 t)\cdot|\cos t|}\cdot\cos t\,dt =$$

$$\begin{array}{rcl} x &=& \sin t \ \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)\\ dx &=& \cos t\ dt \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{ha } -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2},\\ \text{akkor } \cos u>0 \end{array}$$

$$= \int \frac{1}{(1+\sin^2 t)\cdot\cos t}\cdot\cos t\,dt = \int \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt = \int \frac{1}{1+\frac{u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{1}{1+u^2}du =$$

$$\begin{array}{rcl} u &=& \operatorname{tg} t \quad t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\\ \frac{u^2}{1+u^2} &=& \sin^2 t\\ dt &=& \frac{1}{1+u^2}\ du \end{array}$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1+2u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{1}{1+u^2}\,du = \int \frac{1}{1+2u^2}\,du = \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}u)^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+y^2}\,dy =$$

$$\begin{array}{rcl} y &=& \sqrt{2}u\\ dy &=& \sqrt{2}\ du \end{array}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg} y + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}u)+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} t)+C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}\arcsin x)+C.$$

♢

vissza a feladathoz

m) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x-3}\,dx$

Megoldás.

$$\int \sqrt{x^2-2x-3}\,dx = \int \frac{-3-t^2+2t^2+2t}{2t+2}\cdot\ \frac{-2t(2t+2)+(3+t^2)2}{(2t+2)^2}\,dt =$$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x^2-2x-3} &=& x+t\\ x^2-2x-3 &=& x^2+2xt+t^2\\ -3-t^2 &=& (2t+2)x\\ \frac{-3-t^2}{2t+2} &=& x\\ \frac{-2t(2t+2)+(3+t^2)2}{(2t+2)^2}\ dt &=& dx\\ \sqrt{x^2-2x-3} &=& \frac{-3-t^2}{2t+2}+t \end{array}$$

$$= \int \frac{t^2+2t-3}{2t+2}\cdot\frac{-2t^2-2t+6}{(2t+2)^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{(t^2+2t-3)\cdot(t^2+t-3)}{(t+1)^3}$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{t^4+3t^3-4t^2-9t+9}{(t+1)^3}\ ⊜$$

$$\begin{array}{rrrrr} t^4 & +3t^3 & -4t^2 & -9t & +9\\ t^4 & +3t^3 & +3t^2 & +t & \\ \hline & & -7t^2 & -10t & +9 \end{array} \quad : (t^3+3t^2+3t+1) = \quad t,$$

$$\circledequal -\frac{1}{4}\int t\,dt+\frac{1}{4}\int \frac{7t^2+10t-9}{(t+1)^3}\,dt \circledequal$$

$$\frac{7t^2+10t-9}{(t+1)^3}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{C}{(t+1)^3}=\frac{A(t+1)^2+B(t+1)+C}{(t+1)^3}=\frac{At^2+(2A+B)t+A+B+C}{(t+1)^3}$$

A megfelelő együtthatók egyeztetéséből:

$$\begin{array}{rcllr} A & = & 7 & & \\ 2A+B & = & 10 & \Rightarrow & B=-4 \\ A+B+C & = & -9 & \Rightarrow & C=-12 \end{array}$$

$$\circledequal -\frac{1}{8}t^2+\frac{7}{4}\underset{\substack{u\;=\;t+1\\ du\;=\;dt}}{\int \frac{1}{t+1}\,dt}-\underset{\substack{u\;=\;t+1\\ du\;=\;dt}}{\int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt}-3\underset{\substack{u\;=\;t+1\\ du\;=\;dt}}{\int \frac{1}{(t+1)^3}\,dt}=$$

$$=-\frac{1}{8}t^2+\frac{7}{4}\int \frac{1}{u}\,du-\int \frac{1}{u^2}\,du-3\int \frac{1}{u^3}\,du=$$

$$=-\frac{1}{8}(\sqrt{x^2-2x-3}-x)^2+\frac{7}{4}\ln|u|+\frac{1}{u}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{u^2}+C=$$

$$=-\frac{1}{8}(\sqrt{x^2-2x-3}-x)^2+\frac{7}{4}\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}+C=$$

$$=-\frac{1}{8}(\sqrt{x^2-2x-3}-x)^2+\frac{7}{4}\ln|\sqrt{x^2-2x-3}-x+1|+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}-x+1}+\frac{3}{2(\sqrt{x^2-2x-3}-x+1)^2}+C. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

19. fejezet

Határozott integrál, improprius integrál

19.1. Gyakorlat

19.1.1. Határozott integrál

19.1. Feladat. *Legyen* $f(x) = 2^x$ $x \in [0,10]$ *. Osszuk a* $[0,\ 10]$ *intervallumot* 5 *egyenlő részre. Legyen* τ_5 *a fenti felosztás osztópontjaiból álló felosztás. Legyen* $\xi \in \mathbb{R}^5$ *és* ξ_i *az* i*-edik részintervallum felezőpontja.*

a) Számoljuk ki az $s(f,\tau_5)$ *alsó- és* $S(f,\tau_5)$ *felső Darboux-közelítő összeget!*

b) Számoljuk ki az $\sigma(f,\tau_5,\xi)$ *Riemann-féle közelítő összeget!*

c) Írjuk fel a fenti mennyiségeket általánosan, ha a $[0,\ 10]$ *intervallumot* n *egyenlő részre osztjuk. (Számoljuk ki a határértékeiket, ha* $n \to \infty$*.)*

Megoldás.

a) $x_0 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 8, \quad x_5 = 10$

Mivel f a $[0,\ 10]$ intervallumon (és az $\mathbb{R}$-en is) szigorúan monoton növő, ezért

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\{f(x)|\ x_{i-1} \le x \le x_i\} = f(x_i) \quad \text{és} \\ m_i &= \inf\{f(x)|\ x_{i-1} \le x \le x_i\} = f(x_{i-1}) \quad i = 1,\ldots,5. \end{aligned}$$

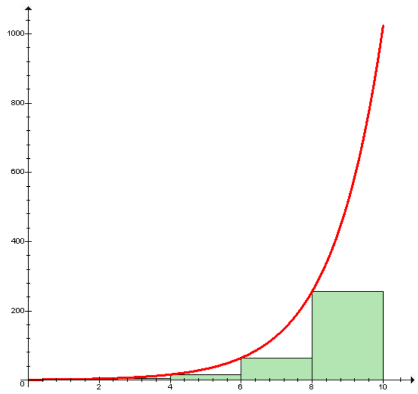
Tehát

$$\begin{aligned} s(f,\tau_5) &= \sum_{i=1}^{5} m_i \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=2} = 2\sum_{i=1}^{5} f(x_{i-1}) = 2\cdot\left(2^0+2^2+2^4+2^6+2^8\right) = \\ &= 2\cdot\left(4^0+4^1+4^2+4^3+4^4\right) = 2\cdot\frac{4^5-1}{4-1} = 2\cdot\frac{1024-1}{3} = 682. \end{aligned}$$

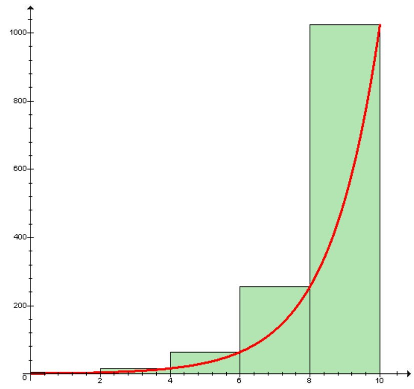
és

$$\begin{aligned} S(f,\tau_5) &= \sum_{i=1}^{5} M_i \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=2} = 2\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = 2\cdot\left(2^2+2^4+2^6+2^8+2^{10}\right) = \\ &= 2\cdot 2^2\cdot\left(4^0+4^1+4^2+4^3+4^4\right) = 8\cdot 341 = 2728. \end{aligned}$$

A fenti két formula geometriai jelentését az alábbi ábrán szemléltethetjük.



$s(f,\ \tau_5)$

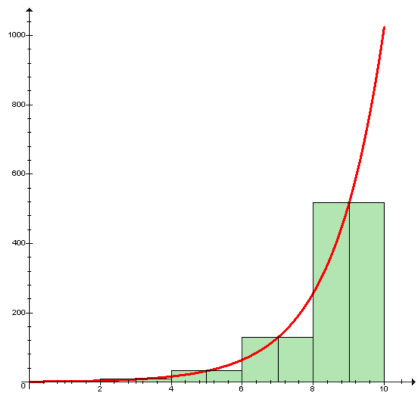


$S(f,\ \tau_5)$

b) $\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 3, \quad \xi_3 = 5, \quad \xi_4 = 7, \quad \xi_5 = 9$

$$\begin{aligned}\sigma(f,\tau_5,\xi) &= \sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\cdot\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=2} = 2\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i) = 2\cdot\left(2^1+2^3+2^5+2^7+2^9\right) = \\ &= 4\cdot\left(4^0+4^1+4^2+4^3+4^4\right) = 4\cdot 341 = 1364.\end{aligned}$$

Ezt a mennyiséget is szemléltethetjük az előzőekhez hasonlón:



$\sigma(f,\tau_5,\xi)$

c) $x_0 = 0, \quad x_1 = \dfrac{10}{n}, \quad x_2 = 2\cdot\dfrac{10}{n}, \dots, x_k = k\cdot\dfrac{10}{n}, \dots, x_n = 10$

$$\begin{aligned}s(f,\tau_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=\frac{10}{n}} = \frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = \frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n} 2^{(i-1)\cdot\frac{10}{n}} = \\ &= \frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2^{\frac{10}{n}}\right)^{i-1} = \frac{10}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(2^{\frac{10}{n}}\right)^{i} = \frac{10}{n}\cdot\frac{\left(2^{\frac{10}{n}}\right)^{n}-1}{2^{\frac{10}{n}}-1} = \\ &= \frac{10}{n}\cdot\frac{2^{10}-1}{2^{\frac{10}{n}}-1}\end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\begin{aligned} S(f,\tau_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{=\frac{10}{n}} = \frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2^{\frac{10}{n}}\right)^i = \\ &= \frac{10}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(2^{\frac{10}{n}}\right)^{i+1} = \frac{10}{n}\cdot 2^{\frac{10}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\left(2^{\frac{10}{n}}\right)^i = \frac{10}{n}\cdot 2^{\frac{10}{n}}\cdot\frac{2^{10}-1}{2^{\frac{10}{n}}-1}. \end{aligned}$$

Továbbá $\xi_k = \frac{(k-1)\cdot\frac{10}{n}+k\cdot\frac{10}{n}}{2} = (2k-1)\cdot\frac{5}{n}\quad k=1,\dots,n$

$$\begin{aligned} \sigma(f,\tau_n,\xi) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{=\frac{10}{n}} = \frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n} 2^{(2i-1)\frac{5}{n}} = \frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{2i-1} = \\ &= \frac{10}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{2i+1} = \frac{10}{n}\cdot 2^{\frac{5}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\left(2^{\frac{10}{n}}\right)^i = \frac{10}{n}\cdot 2^{\frac{5}{n}}\cdot\frac{2^{10}-1}{2^{\frac{10}{n}}-1}. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} s(f,\tau_n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\cdot\frac{2^{10}-1}{2^{\frac{10}{n}}-1} \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10}{n}\cdot(2^{10}-1)}{2^{\frac{10}{n}}-1} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{10}{n^2}\cdot(2^{10}-1)}{-2^{\frac{10}{n}}\cdot\ln 2\cdot\frac{10}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{10}-1}{\underbrace{2^{\frac{10}{n}}}_{\to 1}\cdot\ln 2} = \frac{1023}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Hasonlóan számolható $S(f,\tau_n)$ és $\sigma(f,\tau_n,\xi)$ határértéke is.

Abból a tényből, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} S(f,\tau_n) = \lim\limits_{n\to\infty} s(f,\tau_n)$ illetve, hogy létezik $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(f,\tau_n,\xi)$ még nem következne, hogy f Riemann-integrálható (hiszen nem az összes τ felosztásra és az összes ξ_i közbeeső pont-rendszerre ellenőríztük), de mivel f folytonos az intervallumon, ezért integrálható és így

$$\int_0^{10} 2^x dx = \frac{1023}{\ln 2}.$$

$\diamondsuit$

19.1. Tétel. *Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}\quad(a,b\in\mathbb{R})$ függvény Riemann-integrálható, ha*

a) f folytonos $[a,b]$-n ($f\in\mathcal{C}_{[a,b]}$),

b) f monoton $[a,b]$-n,

c) f szakaszonként folytonos,

d) f szakaszonként monoton.

19.2. Tétel. (Newton-Leibniz formula) *Legyen $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}$ (Riemann-integrálható $[a,b]$-n), melynek létezik primitív függvénye és legyen az F az f egy primitív függvénye, ekkor*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

19.2. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!*

a) $\int\limits_0^1 x^3+2x^2+x+3dx$

Megoldás.

$$\int\limits_0^1 x^3+2x^2+x+3dx = \left[\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\cdot 1^4+\frac{2}{3}\cdot 1^3+\frac{1}{2}\cdot 1^2+3\cdot 1\right)-\left(\frac{1}{4}\cdot 0^4+\frac{2}{3}\cdot 0^3+\frac{1}{2}\cdot 0^2+3\cdot 0\right)=$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+3 = 4\frac{5}{12}$$ ♢

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$

Megoldás.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx \ominus$$

Primitív függvény meghatározása:

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x\cdot\sin x dx = \int (1-\cos^2 x)\cdot \sin x dx =$$

$$= \int \sin x dx - \underset{\substack{t \;=\; \cos x,\; x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ dt \;=\; -\sin x dx}}{\int \cos^2 x\cdot \sin x dx} = -\cos x + \int t^2 dt =$$

$$= -\cos x+\frac{t^3}{3}+C = -\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

Most már alkalmazhatjuk a Newton-Leibniz formulát:

$$\ominus \left[-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\cos^3\frac{\pi}{2}-\left(-cos 0+\frac{1}{3}\cos^3 0\right)=\frac{2}{3}.$$ ♢

19.3. Megjegyzés. *Mind a helyettesítéses integrálás, mind pedig a parciális integrálás szabálya felírható határozott integrálok esetén is. A pontos tétel-kimondások megtalálhatók [12] 67. oldal illetve 71. oldal .*

Jelen kurzus keretei nem teszik lehetővé ezek részletes tárgyalását. A probléma minden esetben megkerülhető, ha a primitív függvényt külön határozzuk meg. (Lásd. előző feladat.)

c) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2} e^{2x}\cdot 3x^2dx$

Megoldás.

$$\int\limits_{-2}^{2} e^{2x}\cdot 3x^2dx \circledequal$$

Primitív függvény meghatározása:

$$\int e^{2x}\cdot 3x^2dx = \frac{3}{2}x^2e^{2x} - \int 3xe^2xdx = \frac{3}{2}x^2e^{2x} - 3\int xe^2xdx = \frac{3}{2}x^2e^{2x} - \frac{3}{2}xe^{2x} + \frac{3}{2}\int e^{2x}dx =$$

$$\begin{array}{rclrcl} f(x) & = & 3x^2 & g'(x) & = & e^{2x} \\ f'(x) & = & 6x & g(x) & = & \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \qquad \begin{array}{rclrcl} f(x) & = & x & g'(x) & = & e^{2x} \\ f'(x) & = & 1 & g(x) & = & \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}$$

$$= \frac{3}{2}x^2e^{2x} - \frac{3}{2}xe^{2x} + \frac{3}{4}e^{2x} + C.$$

Most már alkalmazhatjuk a Newton-Leibniz formulát:

$$\circledequal \left[\frac{3}{2}x^2e^{2x} - \frac{3}{2}xe^{2x} + \frac{3}{4}e^{2x}\right]_{-2}^{2} = \frac{3}{2}\cdot 4\cdot e^4 - \frac{3}{2}\cdot 2e^4 + \frac{3}{4}e^4 - \left(\frac{3}{2}\cdot 4\cdot e^{-4} + \frac{3}{2}\cdot 2e^{-4} + \frac{3}{4}e^{-4}\right) =$$

$$= \frac{15}{4}e^4 - \frac{39}{4}e^{-4}.$$

♢

19.1.2. Improprius integrál

Az alábbi speciális esetekben kiterjeszthető a Riemann-integrál.

19.4. Definíció. *Ha $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, és $\forall b>a$ esetén f Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon és létezik a $\lim\limits_{\omega\to\infty}\int\limits_a^{\omega} f(x)dx$ véges határérték, akkor azt mondjuk, hogy f impropriusan integrálható az $[a,+\infty)$ intervallumon és*

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx := \lim_{\omega\to\infty}\int\limits_a^{\omega} f(x)dx$$

Hasonlóan definiálható a $(-\infty,a]$ intervallumon értelmezett függvény improprius integrálja.

19.5. Definíció. *Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, ha f nem korlátos az a pont valamely környezetében, de $\forall\varepsilon>a$ esetén f Riemann-integrálható az $[a+\varepsilon,b]$ intervallumon és létezik a $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ véges határérték, akkor azt mondjuk, hogy f impropriusan integrálható az $[a,b]$ intervallumon és*

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Hasonlóan definiálható a $(-\infty,a]$ intervallumon értelmezett függvény improprius integrálja.

Nem véges intervallumon vett integrálok:

19.3. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!*

a) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x} dx$

Megoldás.

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{\omega\to\infty} \int\limits_1^\omega \frac{1}{x} dx = \lim_{\omega\to\infty} \Big[\ln|x|\Big]_1^\omega = \lim_{\omega\to\infty} \Big(\underbrace{\ln|\omega|}_{\to\infty} - \underbrace{\ln|1|}_{=0}\Big) = \infty$$

Az improprius integrál nem létezik, a függvény impropriusan nem integrálható a $[0, \infty)$ intervallumon. ♢

b) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$

Megoldás.

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\omega\to\infty} \int\limits_1^\omega \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\omega\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\omega = \lim_{\omega\to\infty} \left(-\frac{1}{\omega} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = \lim_{\omega\to\infty} \Big(1 - \underbrace{\frac{1}{\omega}}_{\to 0}\Big) = 1.$$ ♢

c) $\int\limits_{-\infty}^0 e^x dx$

Megoldás.

$$\int\limits_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{\omega\to\infty} \int\limits_{-\omega}^0 e^x dx = \lim_{\omega\to\infty} \Big[e^x\Big]_{-\omega}^0 = \lim_{\omega\to\infty} \left(e^0 - e^\omega\right) = 1.$$ ♢

d) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$

Megoldás.

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\omega\to\infty} \int\limits_{-\omega}^\omega \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\omega\to\infty} \Big[\mathrm{arctg} x\Big]_{-\omega}^\omega = \lim_{\omega\to\infty} \Big(\underbrace{\mathrm{arctg}\omega}_{\to\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\mathrm{arctg}(-\omega)}_{\to-\frac{\pi}{2}}\Big) = \pi.$$ ♢

Nem korlátos függvények integrálása:

19.4. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!*

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

Megoldás.
Mivel az $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ függvény a $x=0$ pont környezetében nem korlátos, így

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[2\sqrt{x}\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(2-2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$ ♢

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

Megoldás.
Mivel az $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ függvény az $x=2$ pont környezetében nem korlátos, így

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx \ominus$$

Határozzuk meg a primitív függvényt:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{2}+C.$$

$$\begin{aligned} t &= \tfrac{x}{2} \\ dt &= \tfrac{1}{2}dx \end{aligned}$$

$$\ominus \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\underbrace{\arcsin\frac{2-\varepsilon}{2}}_{\to\frac{\pi}{2}} - \arcsin 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$ ♢

c) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{\cos^2 x}dx$

Megoldás.
Mivel az $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ függvény az $x=\frac{\pi}{2}$ pont környezetében nem korlátos, így

$$\int_0^\pi \frac{1}{\cos^2 x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{1}{\cos^2 x}dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[\operatorname{tg} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[\operatorname{tg} x\Big]_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\underbrace{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)}_{\to\infty} - \underbrace{\operatorname{tg} 0}_{=0}\right) + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\underbrace{\operatorname{tg}\pi}_{=0} - \underbrace{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}_{\to-\infty}\right) = \infty$$

Az improprius integrál nem létezik, a függvény impropriusan nem integrálható a $[0,\ \pi]$ intervallumon. ♢

Nem korlátos függvények végtelen intervallumon vett integrálja:

19.5. Feladat. *Számítsuk ki az* $\int\limits_0^\infty \frac{5}{x(x+5)}dx$ *improprius integrált!*

Megoldás.
Mivel az $f(x) = \frac{5}{x(x+5)}$ függvény az $x = 0$ pont környezetében nem korlátos (nem korlátos az $x = -5$ környezetében sem, de ez most érdektelen), így

$$\int\limits_0^\infty \frac{5}{x(x+5)}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{\omega\to\infty} \int\limits_{0+\varepsilon}^{\omega} \frac{5}{x(x+5)}dx \ominus$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

Ehhez először bontsuk a törtet elemi törtek összegére:

$$\frac{5}{x(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} = \frac{(A+B)x+5A}{x},$$

a megfelelő együtthatók egyeztetéséből:

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ 5A &= 5, \end{aligned}$$

ebből: $A = 1$ és $B = -1$ adódik.

$$\int \frac{5}{x(x+5)}dx = \left(\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+5}dx\right) = \ln|x| - \ln|x+5| + C.$$

$$\ominus \lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{\omega\to\infty} \Big[\ln|x| - \ln|x+5|\Big]_{0+\varepsilon}^{\omega} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{\omega\to\infty} (\ln\omega - \ln(\omega+5) - \ln\varepsilon + \ln(5+\varepsilon)) =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \underbrace{\ln \frac{\overbrace{\omega}^{\to 1}}{\omega+5}}_{\to 0} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\underbrace{\ln(5+\varepsilon)}_{\to\ln 5} - \underbrace{\ln\varepsilon}_{\to-\infty}\right) = \infty$$

Az improprius integrál nem létezik, a függvény impropriusan nem integrálható a $[0, \ \infty)$ intervallumon. ♢

19.2. Házi Feladatok

19.1. Házi Feladat. *Legyen* $f(x) = -x^2$. *Osszuk a* $[0,\ 6]$ *intervallumot* 6 *egyenlő részre. Legyen* τ_6 *a fenti felosztás osztópontjaiból álló felosztás. Legyen* $\xi \in \mathbb{R}^6$ *és* ξ_i *az* i*-edik részintervallum felezőpontja.*

a) Számoljuk ki az $s(f,\tau_6)$ *alsó- és* $S(f,\tau_6)$ *felső Darboux-közelítő összeget!*

b) Számoljuk ki az $\sigma(f,\tau_6,\xi)$ *Riemann-féle közelítő összeget!*

c) Írjuk fel a fenti mennyiségeket általánosan, ha a $[0,\ 6]$ *intervallumot* n *egyenlő részre osztjuk. (Számoljuk ki a határértékeiket, ha* $n \to \infty$.*)*

megoldás

19.2. Házi Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!*

a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot \ln x}$ *megoldás*

b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ *megoldás*

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cdot \sin 5x dx$ *megoldás*

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cdot \sin x dx$ *megoldás*

19.3. Házi Feladat. *Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat, ha konvergensek!*

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}\ dx$ *megoldás*

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2+3x^2}\ dx$ *megoldás*

c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x+x^2}\ dx$ *megoldás*

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\ dx$ *megoldás*

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\ dx$ *megoldás*

19.3. Megoldások

19.1. Házi Feladat. *Legyen $f(x) = -x^2$. Osszuk a $[0,\ 6]$ intervallumot 6 egyenlő részre. Legyen τ_6 a fenti felosztás osztópontjaiból álló felosztás. Legyen $\xi \in \mathbb{R}^6$ és ξ_i az i-edik részintervallum felezőpontja.*

a) Számoljuk ki az $s(f,\tau_6)$ alsó- és $S(f,\tau_6)$ felső Darboux-közelítő összeget!

b) Számoljuk ki az $\sigma(f,\tau_6,\xi)$ Riemann-féle közelítő összeget!

c) Írjuk fel a fenti mennyiségeket általánosan, ha a $[0,\ 6]$ intervallumot n egyenlő részre osztjuk. (Számoljuk ki a határértékeiket, ha $n \to \infty$.)

Megoldás.

a) $x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 5, \quad x_6 = 6$

Mivel f a $[0,\ 6]$ intervallumon szigorúan monoton csökken, ezért

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\{f(x) |\ x_{i-1} \le x \le x_i\} = f(x_{i-1}) \quad \text{és} \\ m_i &= \inf\{f(x) |\ x_{i-1} \le x \le x_i\} = f(x_i) \quad i = 1,\dots,6. \end{aligned}$$

Tehát

$$s(f,\tau_6) = \sum_{i=1}^{6} m_i \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=1} = \sum_{i=1}^{6} f(x_i) = -\sum_{i=1}^{6} i^2 = -\frac{6\cdot(6+1)\cdot(2\cdot6+1)}{6} = -91.$$

és

$$\begin{aligned} S(f,\tau_6) &= \sum_{i=1}^{6} M_i \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=1} = \sum_{i=1}^{6} f(x_{i-1}) = -\sum_{i=1}^{6} (i-1)^2 = -\sum_{i=0}^{5} i^2 = \\ &= -\frac{5\cdot(5+1)\cdot(2\cdot5+1)}{6} = -55. \end{aligned}$$

b) $\xi_1 = \frac{1}{2}, \quad \xi_2 = \frac{3}{2}, \quad \xi_3 = \frac{5}{2}, \quad \xi_4 = \frac{7}{2}, \quad \xi_5 = \frac{9}{2}, \quad \xi_5 = \frac{11}{2}$

$$\begin{aligned} \sigma(f,\tau_6,\xi) &= \sum_{i=1}^{6} f(\xi_i) \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=1} = -\sum_{i=1}^{6} (\xi_i)^2 = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{6} (2i-1)^2 = -\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{12} i^2 - \sum_{i=1}^{6} (2i)^2\right) = \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{12\cdot13\cdot25}{6} - 4\sum_{i=1}^{6} (i)^2\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{12\cdot13\cdot25}{6} - 4\frac{6\cdot7\cdot13}{6}\right) = \frac{143}{2} \end{aligned}$$

c) $x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{6}{n}, \quad x_2 = 2\cdot\frac{6}{n}, \dots, x_k = k\cdot\frac{6}{n}, \dots, x_n = 6$

$$\begin{aligned} s(f,\tau_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=\frac{6}{n}} = \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = -\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} (i\cdot\frac{6}{n})^2 = \\ &= -\frac{6^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = -\frac{6^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = -36\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \\ &= -36\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}. \end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\begin{aligned}
S(f,\tau_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=\frac{6}{n}} = \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = -\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((i-1)\frac{6}{n}\right)^2 = \\
&= -\frac{6^3}{n^3}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = -\frac{6^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = -36\cdot\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}
\end{aligned}$$

Továbbá $\xi_k = (2k-1)\cdot\frac{3}{n} \quad k = 1,\dots,n$

$$\begin{aligned}
\sigma(f,\tau_n,\xi) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=\frac{6}{n}} = -\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((2i-1)\frac{3}{n}\right)^2 = -\frac{6}{n}\cdot\frac{9}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \\
&= -\frac{54}{n^3}\cdot\left(\sum_{i=1}^{2n} i^2 - \sum_{i=1}^{2n}(2i)^2\right) = -\frac{54}{n^3}\cdot\left(\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \\
&= -\frac{54}{n^3}\cdot\frac{2n(2n+1)}{6}\cdot(4n+1-(2n+2)) = -18\cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{n^2}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} s(f,\tau_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(-36\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right) = -36\cdot\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \\
&= -36\cdot\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{1} = -72. \\
\lim_{n\to\infty} S(f,\tau_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(-36\cdot\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}\right) = -36\cdot\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} = \\
&= -36\cdot\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}{1} = -72. \\
\lim_{n\to\infty} \sigma(f,\tau_n,\xi) &= \lim_{n\to\infty}\left(-18\cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{n^2}\right) = -18\cdot\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{n^2} = \\
&= -18\cdot\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{(2-\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{1} = -72.
\end{aligned}$$

Mivel f folytonos az intervallumon, ezért integrálható és így

$$\int_0^6 -x^2 dx = -72.$$

♢

vissza a feladathoz

19.2. Házi Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!*

a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

Megoldás.

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot \ln x} \ominus$$

Határozzuk meg a primitív függvényt:

$$\underbrace{\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}}_{\substack{t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx}} = \int 1t dt = \ln|t| + C = \ln|lnx| + C$$

$$\ominus \Big[\ln|\ln x|\Big]_e^{e^2} = \ln|\ln e^2| - \ln|\ln e| = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$ ♢

vissza a feladathoz

b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

Megoldás.

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \ominus$$

Határozzuk meg a primitív függvényt:

$$\underbrace{\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx}_{\substack{t = \sqrt{x} \\ t^2 = x \\ 2tdt = dx}} = \int \frac{1}{1+t} 2tdt = \int \frac{2t+2-2}{t+1} dt = \int 2dt - 2\int \frac{1}{t+1} dt =$$

$$= 2t - 2 \underbrace{\int \frac{1}{t+1} dt}_{\substack{u = t+1 \\ du = dt}} = 2t - \int \frac{1}{u} du = 2t - 2\ln|u| + C = 2t - \int \frac{1}{u} du =$$

$$= 2t - 2\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| + C$$

$$\ominus \Big[2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1|\Big]_0^4 = 2\sqrt{4} - 2\ln|\sqrt{4}+1| - \sqrt{0} + 2\ln|\sqrt{0}+1| = 4 - 2\ln 3.$$ ♢

vissza a feladathoz

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cdot \sin 5x dx$

Megoldás.

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cdot \sin 5x dx =$$

Határozzuk meg a primitív függvényt:

$$\int x^3 \cdot \sin 5x \; dx = -\frac{1}{5}x^3 \cdot \cos 5x + \frac{3}{5}\int x^2 \cdot \cos 5x \; dx =$$

$$\begin{array}{rclrcl} f'(x) &=& \sin 5x & g(x) &=& x^3 \\ f(x) &=& -\frac{\cos 5x}{5} & g'(x) &=& 3x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rclrcl} f'(x) &=& \cos 5x & g(x) &=& x^2 \\ f(x) &=& \frac{\sin 5x}{5} & g'(x) &=& 2x \end{array}$$

$$= -\frac{1}{5}x^3 \cdot \cos 5x + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{5}x^2 \sin 5x - \frac{2}{5}\int x \cdot \sin 5x \; dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}x^3 \cdot \cos 5x + \frac{3}{25}x^2 \cdot \sin 5x - \frac{6}{25} \qquad \int x \cdot \sin 5x \; dx =$$

$$\begin{array}{rclrcl} f'(x) &=& \sin 5x & g(x) &=& x \\ f(x) &=& -\frac{\cos 5x}{5} & g'(x) &=& 1 \end{array}$$

$$= -\frac{1}{5}x^3 \cdot \cos 5x + \frac{3}{25}x^2 \cdot \sin 5x - \frac{6}{25}\left(-\frac{1}{5}x \cos 5x + \frac{1}{5}\int \cos 5x \; dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}x^3 \cdot \cos 5x + \frac{3}{25}x^2 \cdot \sin 5x + \frac{6}{125}x \cos 5x - \frac{6}{625}\sin 5x + C.$$

$$= \left[-\frac{1}{5}x^3 \cdot \cos 5x + \frac{3}{25}x^2 \cdot \sin 5x + \frac{6}{125}x \cos 5x - \frac{6}{625}\sin 5x\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{5}\pi^3 \cdot \cos 5\pi + \frac{3}{25}\pi^2 \cdot \sin 5\pi + \frac{6}{125}\pi \cos 5\pi - \frac{6}{625}\sin 5\pi -$$

$$-\left(-\frac{1}{5}(-\pi)^3 \cdot \cos(-5\pi) + \frac{3}{25}(-\pi)^2 \cdot \sin(-5\pi) + \frac{6}{125}(-\pi)\cos(-5\pi) - \frac{6}{625}\sin(-5\pi)\right) =$$

$$= \frac{2}{5}\pi^3 - \frac{6}{125}\pi.$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^x \cdot \sin x dx$

Megoldás.

$$\int_{0}^{\pi} e^x \cdot \sin x dx =$$

Határozzuk meg a primitív függvényt:

$$\int e^x\cdot\sin x\,dx = e^x\cdot\sin x - \int e^x\cdot\cos x\,dx = e^x\cdot\sin x - e^x\cdot\cos x - \int e^x\cdot\sin x\,dx$$

$$\begin{array}{rclrclrclrcl} f'(x) & = & e^x & g(x) & = & \sin x & f'(x) & = & e^x & g(x) & = & \cos x \\ f(x) & = & e^x & g'(x) & = & \cos x & f(x) & = & e^x & g'(x) & = & -\sin x \end{array}$$

Innen $\int e^x\cdot\sin x = \frac{1}{2}\,e^x\cdot\sin x - \frac{1}{2}e^x\cdot\cos x + C.$

$$\ominus \left[\frac{1}{2}\,e^x\cdot\sin x - \frac{1}{2}e^x\cdot\cos x\right]_0^\pi = \frac{1}{2}e^\pi\cdot\sin\pi - \frac{1}{2}e^\pi\cdot\cos\pi - \frac{1}{2}e^0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}e^0\cdot\cos 0 = \frac{1}{2}e^\pi + \frac{1}{2}.\ \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

19.3. Házi Feladat. *Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat, ha konvergensek!*

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}\,dx$

Megoldás.

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}\,dx \ominus$$

Határozzuk meg a primitív függvényt

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}\,dx = \int t^{-\frac{3}{2}}dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \frac{-2}{\sqrt{x-1}} + C.$$

$$\begin{array}{rcl} t & = & x-1 \\ dt & = & dx \end{array}$$

$$\ominus \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{-2}{\sqrt{x-1}}\right]_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{-2}{\sqrt{2-1}} - \frac{-2}{\sqrt{1+\varepsilon-1}}\right) = +\infty.$$

Tehát az improprius integrál nem konvergens. $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2+3x^2}\,dx$

Megoldás.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2+3x^2}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_{-\omega}^{\omega} \frac{1}{2+3x^2}\,dx \ominus$$

Határozzuk meg a primitív függvényt

$$\int \frac{1}{2+3x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\frac{3x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$\begin{array}{rcl} t & = & \sqrt{\frac{3}{2}}x \\ dt & = & \sqrt{\frac{3}{2}}dx \end{array}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}x + C. \ominus \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}x\right]_{-\omega}^{\omega} =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}\omega - \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}(-\omega)\right) = \frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$$

$\diamondsuit$ vissza a feladathoz

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x+x^2}\,dx$

Megoldás.

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x+x^2}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_1^\omega \frac{1}{1+x+x^2}\,dx \ominus$$

Határozzuk meg a primitív függvényt

$$\int \frac{1}{1+x+x^2}\,dx = \int \frac{1}{(x^2+x+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\frac{4(x+\frac{1}{2})^2}{3}+1}\,dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t + C =$$

$$t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}, \quad dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$\ominus \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_1^\omega = \lim_{\omega\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{2\omega+1}{\sqrt{3}}}_{\to\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{2+1}{\sqrt{3}}}_{=\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\diamondsuit$$

vissza a feladathoz

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$

Megoldás.

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx \ominus$$

Határozzuk meg a primitív függvényt

$$\int\frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\ominus \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{-\varepsilon}+\frac{1}{-1}\right) + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{\varepsilon}\right) = 2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) = +\infty$$

az impproprius integrál divergens. $\diamondsuit$ vissza a feladathoz

e) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$

Megoldás.

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x}\, dx + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{0+\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big[\ln|x|\Big]_{\varepsilon}^{1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Bigg(\underbrace{\ln|-\varepsilon|}_{\to -\infty} - \ln|-1|\Bigg) + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Bigg(\ln|1| - \underbrace{\ln|\varepsilon|}_{\to \infty}\Bigg) = \infty$$

Így az improprius integrál nem létezik a $[-1,1]$ intervallumon. $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

20. fejezet

Differenciálegyenletek

20.1. Gyakorlat

20.1.1. Elsőrendű differenciálegyenletek

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Általános alak: $y' = g(x) \cdot h(y)$, ahol g és h intervallumon értelmezett folytonos függvények.

20.1. Feladat. *Oldjuk meg az $y' = x \cdot y$ differenciálegyenletet!*

Megoldás.
A változók szétválasztásához y-nal kell osztanunk. Ezt csak akkor tehetjük meg, ha $y \neq 0$.

i) ha $y = 0 \;\Leftrightarrow\; y' = 0 \Leftrightarrow\; y \equiv 0$ szinguláris megoldás.

ii) ha $y \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= x \\
\int \frac{y'}{y}\,dx &= \int x\,dx \\
\int \frac{1}{y}\,dy &= \frac{1}{2}x^2 + C_1 \qquad {\scriptstyle (C_1 \in \mathbb{R})} \\
\ln|y| &= \frac{1}{2}x^2 + C_1 \\
|y| &= e^{\frac{1}{2}x^2 + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}$$

Legyen $C := \begin{cases} \pm e^{C_1} \\ 0 \end{cases}$

Ekkor

$$y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \qquad {\scriptstyle (C \in \mathbb{R})}$$

Az $y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ ${\scriptstyle (C \in \mathbb{R})}$ alakban adott függvénysereget nevezzük a fenti differenciálegyenlet általános megoldásának. Könnyen látható, hogy a $C = 0$ esettel beépítettük az $y \equiv 0$ szinguláris megoldást is. ♢

20.2. Feladat. *Oldjuk meg az* $y' = -\frac{x}{y}$ *differenciálegyenletet!*

Megoldás.
A feladatot a változók szétválasztásával oldjuk meg:

$$\begin{aligned}
y \cdot y' &= -x \\
\int y \cdot y' \, dx &= -\int x \, dx \\
\int y \, dy &= -\tfrac{1}{2}x^2 + C_1 && (C_1 \in \mathbb{R}) \\
\tfrac{1}{2}y^2 &= -\tfrac{1}{2}x^2 + C_1 && (C_1 \in \mathbb{R}) \\
y^2 &= -x^2 + 2C_1 \quad C := 2C_1 && (C, C_1 \in \mathbb{R}) \\
x^2 + y^2 &= C && (C \in \mathbb{R}) \\
y &= \pm\sqrt{C - x^2} && (C \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

◊

20.3. Feladat. *Oldjuk meg a* $(3x-1)y' = y^2 - y$ *differenciálegyenletet!*

Megoldás.
A változók szétválasztásához $(y^2 - y)$-nal kell osztanunk. Ezt csak akkor tehetjük meg, ha $y^2 - y \neq 0$.

i) ha $y = 0 \;\Leftrightarrow\; y' = 0 \Leftrightarrow\; (3x-1) \cdot 0 = 0^2 - 0 \Leftrightarrow\; y \equiv 0$ szinguláris megoldás.

ii) ha $y = 1 \;\Leftrightarrow\; y' = 0 \Leftrightarrow\; (3x-1) \cdot 0 = 1^2 - 1 \Leftrightarrow\; y \equiv 1$ szinguláris megoldás.

iii) ha $y^2 - y \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y^2 - y} &= \frac{1}{3x-1} \\
\int \frac{y'}{y^2 - y} \, dx &= \int \frac{1}{3x-1} \, dx \\
\int \frac{1}{y(y-1)} \, dy &= \tfrac{1}{3}\ln|3x-1| + C_1 && (C_1 \in \mathbb{R}) \\
\int \frac{1}{y-1} \, dy - \int \frac{1}{y} \, dy = \ln|y-1| - \ln|y| &= \tfrac{1}{3}\ln|3x-1| + C_1 && (C_1 \in \mathbb{R}) \\
\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| &= \ln\left|(3x-1)^{\frac{1}{3}}\right| + C_1 && (C_1 \in \mathbb{R}) \\
\left|\frac{y-1}{y}\right| &= e^{\ln|(3x-1)^{\frac{1}{3}}| + C_1} && (C_1 \in \mathbb{R}) \\
\left|\frac{y-1}{y}\right| &= e^{C_1}\left|(3x-1)^{\frac{1}{3}}\right| \quad C := \pm e^{C_1} && (C_1 \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{y} &= C \cdot \sqrt[3]{3x-1} && (C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\
\frac{1}{y} &= 1 - C \cdot \sqrt[3]{3x-1} && (C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\
y &= \frac{1}{1 - C \cdot \sqrt[3]{3x-1}} && (C \in \mathbb{R} \setminus \{0\})
\end{aligned}$$

A $C=0$ eset hozzávételével az $y\equiv 1$ szinguláris megoldás beolvasztható az általános megoldásba, így a teljes megoldás:

$$y=\begin{cases} \dfrac{1}{1-C\cdot\sqrt[3]{3x-1}} & {\scriptstyle (C\in\mathbb{R})} \\ 0 \end{cases}$$

◊

20.4. Feladat. *Adjuk meg az*

$$\left.\begin{aligned} y'(x) &= x\cdot y(x) \\ y(0) &= 5 \end{aligned}\right\}$$ *kezdetiérték probléma megoldását!*

Megoldás.
Először megoldjuk az $y'(x)=x\cdot y(x)$ differenciálegyenletet. Majd a differenciálegyenlet általános megoldásából kiválasztjuk azt a partikuláris megoldást, amelyre teljesül a kezdeti feltétel.

A differenciálegyenlet általános megoldását az 20.1. feladatban már felírtuk:

$$y(x)=C\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}. \quad {\scriptstyle (C\in\mathbb{R})}$$

Az általános megoldás paraméterét a kezdeti feltétel felhasználásával kiküszöbölhetjük:

$$y(0)=C\cdot e^0=5 \quad\Leftrightarrow\quad C=5.$$

Így a kezdetiérték probléma megoldása az $y(x)=5\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ függvény. ◊

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Általános alak: $y'+p(x)\cdot y=q(x)$

20.5. Feladat. *Oldjuk meg az* $y'+y\cdot\cos x=\sin x\cdot\cos x$ *differenciálegyenletet!*

Megoldás.

I. A homogén egyenlet: $Y'+Y\cdot\cos x=0$. Megoldása során a változók szétválasztásához Y-nal kell osztani. Ezt csak akkor tehetjük meg, ha $Y\neq 0$.

i) ha $Y=0 \;\Leftrightarrow\; Y'=0 \Leftrightarrow\; Y\equiv 0$ a homogén egyenlet szinguláris megoldása.

ii) ha $Y\neq 0$

$$\begin{aligned} Y'+Y\cdot\cos x &= 0 \\ Y' &= -Y\cdot\cos x \\ \frac{Y'}{Y} &= -\cos x \\ \int\frac{Y'}{Y}\,dx &= -\int\cos x\,dx \\ \int\frac{1}{Y}\,dY &= -\sin x+C_1 \quad {\scriptstyle (C_1\in\mathbb{R})} \\ \ln|Y| &= -\sin x+C_1 \quad {\scriptstyle (C_1\in\mathbb{R})} \\ |Y| &= e^{-\sin x+C_1}=e^{C_1}\cdot e^{-\sin x}, \quad C:=\pm e^{C_1} \\ Y &= C\cdot e^{-\sin x} \quad {\scriptstyle (C\in\mathbb{R}\setminus\{0\})} \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy a szinguláris megoldás a $C=0$ eset megengedésével az általános megoldásba beolvasztható. A homogén egyenlet általános megoldása tehát

$$Y_{\text{hom}}^{\text{ált}} = C \cdot e^{-\sin x}. \quad {\scriptstyle (C\in\mathbb{R})}$$

II. Állandó variálásának módszere:

Keressük a megoldást $y = c(x) \cdot e^{-\sin x}$ alakban. Ekkor

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\sin x} - c(x) \cdot e^{-\sin x} \cdot \cos x$$

Ezeket visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned}
\underbrace{c'(x) \cdot e^{-\sin x} - c(x) \cdot e^{-\sin x} \cdot \cos x}_{y'} + \underbrace{c(x) \cdot e^{-\sin x}}_{y} \cdot \cos x &= \sin x \cdot \cos x \\
c'(x) \cdot e^{-\sin x} &= \sin x \cdot \cos x \\
c'(x) &= \sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} \\
c(x) = \int c'(x)\ dx &= \int \sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x}\ dx
\end{aligned}$$

$$c(x) = \int \sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x}\ dx = \int t \cdot e^t\ dt = t \cdot e^t - \int e^t\ dt = t \cdot e^t - e^t + C =$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
t & = & \sin x & f'(t) & = & e^t & g(t) & = & t \\
dt & = & cosxdx & f(t) & = & e^t & g'(t) & = & 1
\end{array}$$

$$= \sin x \cdot e^{\sin x} - e^{\sin x} + C = e^{\sin x}(\sin x - 1) + C.$$

Így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása felírható az alábbi alakban:

$$y_{\text{inh}}^{\text{part}} = e^{\sin x}(\sin x - 1) \cdot e^{-\sin x} = \sin x - 1$$

Előadáson ismertetett tétel alapján:

$$y_{\text{inh}}^{\text{ált}} = y_{\text{inh}}^{\text{part}} + Y_{\text{hom}}^{\text{ált}} = \sin x - 1 + C \cdot e^{-\sin x} \quad {\scriptstyle (C\in\mathbb{R}).}$$ ♢

20.6. Feladat. *Oldjuk meg az* $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$ *differenciálegyenletet!*

Megoldás.

I. A homogén egyenlet: $Y' - \frac{Y}{x} = 0$. Megoldása során a változók szétválasztásához Y-nal kell osztani. Ezt csak akkor tehetjük meg, ha $Y \neq 0$.

i) ha $Y = 0 \;\Leftrightarrow\; Y' = 0 \Leftrightarrow\; Y \equiv 0$ a homogén egyenlet szinguláris megoldása.

ii) ha $Y \neq 0$

$$\begin{aligned}
Y' - \frac{Y}{x} &= 0 \\
Y' &= \frac{Y}{x} \\
\frac{Y'}{Y} &= \frac{1}{x} \\
\int \frac{Y'}{Y}\ dx &= \int \frac{1}{x}\ dx \\
\int \frac{1}{Y}\ dY &= \ln|x| + C_1 \quad {\scriptstyle (C_1\in\mathbb{R})} \\
\ln|Y| &= \ln|x| + C_1 \quad {\scriptstyle (C_1\in\mathbb{R})} \\
|Y| &= e^{\ln|x| + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{\ln|x|} = |x| \cdot e^{C_1}, \quad C := \pm e^{C_1} \\
Y &= C \cdot x \qquad {\scriptstyle (C\in\mathbb{R}\setminus\{0\})}
\end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy a szinguláris megoldás a $C=0$ eset megengedésével az általános megoldásba beolvasztható. A homogén egyenlet általános megoldása tehát

$$Y_{\text{hom}}^{\text{ált}} = C \cdot x \quad (C \in \mathbb{R}).$$

II. Állandó variálásának módszere:

Keressük a megoldást $y = c(x) \cdot x$ alakban. Ekkor

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

Ezeket visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned}
\underbrace{c'(x)\cdot x + c(x)}_{y'} - \underbrace{c(x)\cdot x}_{y} \cdot \frac{1}{x} &= x^2 \\
c'(x)\cdot x &= x^2 \\
c'(x) &= x \\
c(x) = \int c'(x)\, dx &= \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C
\end{aligned}$$

Így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása felírható az alábbi alakban:

$$y_{\text{inh}}^{\text{part}} = \frac{x^2}{2} \cdot x = \frac{x^3}{2}$$

Előadáson ismertetett tétel alapján:

$$y_{\text{inh}}^{\text{ált}} = y_{\text{inh}}^{\text{part}} + Y_{\text{hom}}^{\text{ált}} = \frac{x^3}{2} + C \cdot x \quad (C \in \mathbb{R}).$$

◊

20.1.2. Másodrendű differenciálegyenletek

Másodrendű tiszta-hiányos differenciálegyenlet

Általános alak: $y'' = f(x)$
Megoldási módszer: kétszeres integrálás

20.7. Feladat. *Oldjuk meg az $y'' = \ln x$ differenciálegyenletet!*

Megoldás.

$$y' = \int y''\, dx = \int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx = x \cdot \ln x - x + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$

$$\begin{array}{lllllll} f'(x) & = & 1 & \quad & g(x) & = & \ln x \\ f(x) & = & x & & g'(x) & = & \frac{1}{x} \end{array}$$

$$y = \int y'\, dx = \int x \cdot \ln x - x + C_1\, dx = \int x \cdot \ln x\, dx - \int x\, dx + \int C_1\, dx =$$

$$\begin{array}{lllllll} f'(x) & = & x & \quad & g(x) & = & \ln x \\ f(x) & = & \frac{1}{2}x^2 & & g'(x) & = & \frac{1}{x} \end{array}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx - \frac{x^2}{2} + C_1 x = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{3}{4}x^2 + C_1 x + C_2. \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

◊

Másodrendű homogén lineáris állandó-együtthatós differenciálegyenlet

Általános alak: $A\cdot y'' + B\cdot y' + C\cdot y = 0 \qquad (A, B, C \in \mathbb{R})$
Megoldási módszer: A megoldást $y = e^{\lambda x}$ alakban keressük.

20.8. Feladat. *Oldjuk meg az* $y'' + 2y' - 15y = 0$ *differenciálegyenletet!*

Megoldás.
Keressük a megoldást $y = e^{\lambda x}$ alakban! Ekkor

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda x} \\ y' &= \lambda\cdot e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2\cdot e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned} \lambda^2\cdot e^{\lambda x} + 2\lambda\cdot e^{\lambda x} - 15e^{\lambda x} &= 0 \\ \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}\cdot\left(\lambda^2 + 2\lambda - 15\right) &= 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda - 15 &= 0 \quad \text{(Karakterisztikus egyenlet)} \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2\pm 8}{2} = -1\pm 4 = \begin{aligned} \lambda_1 &= -5 \\ \lambda_2 &= 3. \end{aligned}$$

Tehát a két lineárisan független partikuláris megoldás:

$$y_1 = e^{-5x} \quad y_2 = e^{3x}.$$

Az általános megoldás ezen partikuláris megoldások lineáris kombinációiként kapható:

$$y = C_1\cdot e^{-5x} + C_2\cdot e^{3x}. \qquad {\scriptstyle (C_1, C_2 \in \mathbb{R})}$$ ♢

20.9. Feladat. *Oldjuk meg az* $y'' + 2y' + y = 0$ *differenciálegyenletet!*

Megoldás.
Keressük a megoldást $y = e^{\lambda x}$ alakban! Ekkor

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda x} \\ y' &= \lambda\cdot e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2\cdot e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned} \lambda^2\cdot e^{\lambda x} + 2\lambda\cdot e^{\lambda x} + e^{\lambda x} &= 0 \\ \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}\cdot\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right) &= 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda + 1 &= 0 \quad \text{(Karakterisztikus egyenlet)} \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1 =: \lambda.$$

Ekkor az előadáson igazolt tétel alapján a két lineárisan független partikuláris megoldás:

$$y_1 = e^{-x} \quad y_2 = x \cdot e^{-x}.$$

Az általános megoldás ezen partikuláris megoldások lineáris kombinációiként kapható:

$$y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x}. \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

◊

20.10. Feladat. *Oldjuk meg az* $y'' + 4y' + 9y = 0$ *differenciálegyenletet!*

Megoldás.
Keressük a megoldást $y = e^{\lambda x}$ alakban! Ekkor

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda x} \\ y' &= \lambda \cdot e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned} \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + 4\lambda \cdot e^{\lambda x} + 9e^{\lambda x} &= 0 \\ \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \cdot \left(\lambda^2 + 4\lambda + 9\right) &= 0 \\ \lambda^2 + 4\lambda + 9 &= 0 \quad \text{(Karakterisztikus egyenlet)} \end{aligned}$$

$$D = 16 - 36 = -20 < 0$$

Ekkor legyen:

$$\alpha := \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \beta := \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}.$$

Az előadáson igazolt tétel alapján a két lineárisan független partikuláris megoldás legyen:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x = e^{-2x} \cdot \cos \sqrt{5} x \\ &\text{és} \\ y_2 &= e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x = e^{-2x} \cdot \sin \sqrt{5} x \end{aligned}$$

Így az általános megoldás:

$$y = C_1 \cdot e^{-2x} \cdot \cos \sqrt{5} x + C_2 \cdot e^{-2x} \cdot \sin \sqrt{5} x. \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

◊

20.11. Feladat. *Adjuk meg az*

$$\left.\begin{aligned} y'' + 4y' + 9y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= -2 - 2\sqrt{5} \end{aligned}\right\}$$

kezdetiérték probléma megoldását!

Megoldás.
Először megoldjuk az $y''+4y'+9y=0$
differenciálegyenletet. Majd a differenciálegyenlet általános megoldásából kiválasztjuk azt a partikuláris megoldást, amelyre teljesülnek a kezdeti feltételek.

A differenciálegyenlet általános megoldását az 20.9. feladatban már felírtuk:

$$y = C_1 \cdot e^{-2x} \cdot \cos\sqrt{5}x + C_2 \cdot e^{-2x} \cdot \sin\sqrt{5}x. \qquad {\scriptstyle (C_1, C_2 \in \mathbb{R})}$$

Az általános megoldás paramétereit a kezdeti feltételek felhasználásával kiküszöbölhetjük:

$$y(0) = C_1 \cdot e^0 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot e^0 \cdot \sin 0 = C_1 = 1 \;\Rightarrow\; C_1 = 1.$$

Mivel

$$y' = -2C_1 e^{-2x} \cdot \cos\sqrt{5}x - \sqrt{5}C_1 \cdot e^{-2x} \cdot \sin\sqrt{5}x - 2C_2 e^{-2x} \cdot \sin\sqrt{5}x + \sqrt{5}C_2 e^{-2x} \cdot \cos\sqrt{5}x,$$

ezért $y'(0) = -2C_1 + C_2 \cdot \sqrt{5} = -2 - 2\sqrt{5} \;\Rightarrow\; C_2 = -2.$

Így a kezdetiérték probléma megoldása az

$$y(x) = e^{-2x} \cdot \cos\sqrt{5}x - 2 \cdot e^{-2x} \cdot \sin\sqrt{5}x$$

függvény. ♢

20.2. Házi Feladatok

20.1. Házi Feladat. *Osztályozzuk és oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!*

a) $y(9+4x^2)y' = 1$ *megoldás*

b) $y' = \dfrac{4y}{x(y-3)}$ *megoldás*

c) $x^3dx + (y+1)^2dy = 0$ *megoldás*

d) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$ *megoldás*

e) $y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = -1$ *megoldás*

f) $y' - y = \sin x + \cos x + 1$ *megoldás*

g) $(1+\sin x)^2 y'' + \cos x = 0$ *megoldás*

h) $y'' = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ *megoldás*

i) $y'' - y' - 6y = 0$ *megoldás*

j) $4y'' - 4y' - y = 0$ *megoldás*

k) $9y'' + 6y' + y = 0$ *megoldás*

l) $y'' - 8y' + 16y = 0$ *megoldás*

m) $y'' - 4y' + 13y = 0$ *megoldás*

n) $2y'' - y' + y = 0$ *megoldás*

20.3. Megoldások

20.1. Házi Feladat. *Osztályozzuk és oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!*

a) $y(9+4x^2)y' = 1$

Megoldás.
Elsőrendű, nem lineáris differenciálegyenlet. Megoldás szempontjából pedig szétválasztható változójú.

$$\begin{aligned}
yy' &= \frac{1}{9+4x^2} \\
\int yy'\,dx &= \int \frac{1}{9+4x^2}\,dx \\
\int y\,dy &= \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2}\,dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\cdot\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{6}\mathrm{arctg}\,t + C = \frac{1}{6}\mathrm{arctg}\frac{2}{3}x + C_1 \qquad (C_1\in\mathbb{R}) \\
& \qquad t = \tfrac{2x}{3} \\
& \qquad dt = \tfrac{2}{3}dx \\
\tfrac{1}{2}y^2 &= \tfrac{1}{6}\mathrm{arctg}\tfrac{2}{3}x + C_1 \qquad (C_1\in\mathbb{R}) \\
y &= \pm\sqrt{\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{2}{3}x + 2C_1} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{2}{3}x + C} \qquad C := 2C_1 \qquad (C\in\mathbb{R})
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

b) $y' = \dfrac{4y}{x(y-3)}$

Megoldás.
Elsőrendű, nem lineáris differenciálegyenlet. Megoldás szempontjából pedig szétválasztható változójú.

i) ha $y=0 \Leftrightarrow y'=0 \Leftrightarrow y\equiv 0$
$0 = \frac{4\cdot 0}{x\cdot(-3)}$, azaz az $y\equiv 0$ függvény szinguláris megoldás.

ii) ha $y\neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{y-3}{y}\cdot y' &= 4\cdot\frac{1}{x} \\
\int \frac{y-3}{y}\cdot y'\,dx &= 4\cdot\int\frac{1}{x}\,dx \\
\int \frac{y-3}{y}\,dy &= 4\cdot\ln|x| + C \qquad (C\in\mathbb{R}) \\
\int 1-\frac{3}{y}\,dy = y - 3\ln|y| &= 4\ln|x| + C \qquad (C\in\mathbb{R}) \\
y &= 3\ln|y| + 4\ln|x| + C \qquad (C\in\mathbb{R})
\end{aligned}$$

A fenti alakból nem tudjuk y-t kifejezni. Az ilyen alakban megadott megoldásokat *implicit megoldás*oknak nevezzük. Most a szinguláris megoldást sem tudjuk beépíteni.

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

c) $x^3dx + (y+1)^2dy = 0$

Megoldás.
Elsőrendű, nem lineáris differenciálegyenlet. Megoldás szempontjából pedig szétválasztható változójú.

$$\begin{aligned}
x^3dx &= -(y+1)^2dy \\
\int x^3dx &= -\int (y+1)^2dy = -\int t^2\, dt = -\frac{1}{3}t^3 = -\frac{(y+1)^3}{3} \\
&\qquad \scriptstyle t = y+1 \\
&\qquad \scriptstyle dt = dy \\
\frac{x^4}{4} + C_1 &= -\frac{(y+1)^3}{3} \qquad {\scriptstyle (C_1 \in \mathbb{R})} \\
\sqrt[3]{-\frac{3}{4}x^4 - 3C_1} - 1 &= y \qquad C := 3C_1 \\
y &= \sqrt[3]{-\frac{3}{4}x^4 - C} - 1 \qquad {\scriptstyle (C \in \mathbb{R})}
\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

d) $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$

Megoldás.
Elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet.

I. A homogén egyenlet: $Y' - \frac{Y}{x} = 0$.
Megoldása során a változók szétválasztásához Y-nal kell osztani. Ezt csak akkor tehetjük meg, ha $Y \neq 0$.

i) ha $Y = 0 \Leftrightarrow Y' = 0 \Leftrightarrow Y \equiv 0$ a homogén egyenlet szinguláris megoldása.

ii) ha $Y \neq 0$

$$\begin{aligned}
Y' - \frac{Y}{x} &= 0 \\
Y' &= \frac{Y}{x} \\
\frac{Y'}{Y} &= \frac{1}{x} \\
\int \frac{Y'}{Y}\, dx &= \int \frac{1}{x}\, dx \\
\int \frac{1}{Y}\, dY &= \ln|x| + C_1 \\
\ln|Y| &= \ln|x| + C_1 \\
|Y| &= e^{\ln|x| + C_1} = e^{C_1} \cdot |x|, \qquad C := \pm e^{C_1}
\end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy a szinguláris megoldás a $C = 0$ eset megengedésével az általános megoldásba beolvasztható. A homogén egyenlet általános megoldása tehát

$$Y_{\text{hom}}^{\text{ált}} = C \cdot x. \qquad {\scriptstyle (C \in \mathbb{R})}$$

II. Állandó variálásának módszere:
Keressük a megoldást $y = c(x) \cdot x$ alakban. Ekkor

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

Ezeket visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned}
\underbrace{c'(x) \cdot x + c(x)}_{y'} - \underbrace{c(x) \cdot x}_{y} \cdot \frac{1}{x} &= x^2 + 3x - 2 \\
c'(x) \cdot x &= x^2 + 3x - 2 \\
c'(x) &= x + 3 - \frac{2}{x} \\
c(x) = \int c'(x)\, dx &= \int x + 3 - \frac{2}{x}\, dx = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x|
\end{aligned}$$

Így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása felírható az alábbi alakban:

$$y_{\text{inh}}^{\text{part}} = \left(\frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x|\right) \cdot x = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 2x\ln|x|$$

Előadáson ismertetett tétel alapján:

$$y_{\text{inh}}^{\text{ált}} = y_{\text{inh}}^{\text{part}} + Y_{\text{hom}}^{\text{ált}} = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 2x\ln|x| + Cx. \qquad {\scriptstyle (C \in \mathbb{R})}$$

◊

vissza a feladathoz

e) $y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = -1$

Megoldás.
Elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet.

I. A homogén egyenlet: $Y' \cdot \sin x - Y \cdot \cos x = 0$. Megoldása során a változók szétválasztásához Y-nal kell osztani. Ezt csak akkor tehetjük meg, ha $Y \neq 0$.
   i) ha $Y = 0 \;\Leftrightarrow\; Y' = 0 \Leftrightarrow\; Y \equiv 0$ a homogén egyenlet szinguláris megoldása.
   ii) ha $Y \neq 0$

$$\begin{aligned}
Y' \cdot \sin x - Y \cdot \cos x &= 0 \\
Y' \cdot \sin x &= Y \cdot \cos x \\
\frac{Y'}{Y} &= \frac{\cos x}{\sin x} \\
\int \frac{Y'}{Y}\, dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx \\
\int \frac{1}{Y}\, dY &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + C_1 = \ln|\sin x| + C_1 \\
& \quad {\scriptstyle \begin{aligned} t &= \sin x \\ dt &= \cos x\; dx \end{aligned}} \\
\ln|Y| &= \ln|\sin x| + C_1 \qquad {\scriptstyle (C_1 \in \mathbb{R})} \\
|Y| &= e^{\ln|\sin x| + C_1} = e^{C_1} \cdot |\sin x|, \quad C := \pm e^{C_1}
\end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy a szinguláris megoldás a $C=0$ eset megengedésével az általános megoldásba beolvasztható. A homogén egyenlet általános megoldása tehát

$$Y_{\text{hom}}^{\text{ált}} = C \cdot \sin x. \qquad {\scriptstyle (C\in\mathbb{R})}$$

II. Állandó variálásának módszere:
Keressük a megoldást $y = c(x) \cdot \sin x$ alakban. Ekkor

$$y' = c'(x) \cdot \sin x + c(x) \cdot \cos x$$

Ezeket visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned}
\underbrace{c'(x) \cdot \sin x + c(x) \cdot \cos x}_{y'} \cdot \sin x - \underbrace{c(x) \cdot \sin x}_{y} \cdot \cos x &= -1 \\
c'(x) \cdot \sin^2 x &= -1 \\
c'(x) &= -\frac{1}{\sin^2 x} \\
c(x) = \int c'(x)\ dx &= \int -\frac{1}{\sin^2 x}\ dx = \mathrm{ctg} x
\end{aligned}$$

Így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása felírható az alábbi alakban:

$$y_{\text{inh}}^{\text{part}} = \mathrm{ctg} x \cdot \sin x = \cos x$$

Előadáson ismertetett tétel alapján:

$$y_{\text{inh}}^{\text{ált}} = y_{\text{inh}}^{\text{part}} + Y_{\text{hom}}^{\text{ált}} = \cos x + C \cdot \sin x. \qquad {\scriptstyle (C\in\mathbb{R})}$$

♢

vissza a feladathoz

f) $y' - y = \sin x + \cos x + 1$

Megoldás.
Elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet.

I. A homogén egyenlet: $Y' - Y = 0$. Megoldása során a változók szétválasztásához Y-nal kell osztani. Ezt csak akkor tehetjük meg, ha $Y \neq 0$.

   i) ha $Y = 0 \Leftrightarrow Y' = 0 \Leftrightarrow Y \equiv 0$ a homogén egyenlet szinguláris megoldása.

   ii) ha $Y \neq 0$

$$\begin{aligned}
Y' - Y &= 0 \\
Y' &= Y \\
\frac{Y'}{Y} &= 1 \\
\int \frac{Y'}{Y}\ dx &= \int 1\ dx \\
\int \frac{1}{Y}\ dY &= x + C_1 \qquad {\scriptstyle (C_1\in\mathbb{R})} \\
\ln|Y| &= x + C_1 \\
|Y| &= e^{x+C_1} = e^{C_1} \cdot e^x, \qquad C := \pm e^{C_1}
\end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy a szinguláris megoldás a $C=0$ eset megengedésével az általános megoldásba beolvasztható. A homogén egyenlet általános megoldása tehát

$$Y_{\text{hom}}^{\text{ált}} = C \cdot e^{x}. \qquad {\scriptstyle (C \in \mathbb{R})}$$

II. Állandó variálásának módszere:
Keressük a megoldást $y = c(x) \cdot e^{x}$ alakban. Ekkor

$$y' = c'(x) \cdot e^{x} - c(x) \cdot e^{x}$$

Ezeket visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\underbrace{c'(x) \cdot e^{x} - c(x) \cdot e^{x}}_{y'} - \underbrace{c(x) \cdot e^{x}}_{y} = \sin x + \cos x + 1$$

$$\begin{aligned} c'(x) \cdot e^{x} &= \sin x + \cos x + 1 \\ c'(x) &= e^{-x} \cdot (\sin x + \cos x + 1) \\ c(x) = \int c'(x)\, dx &= \int \sin x \cdot e^{-x}\, dx + \int \cos x \cdot e^{-x}\, dx + \int e^{-x}\, dx ⊜ \end{aligned}$$

A jobb oldalon szereplő integrálok kiszámításához parciális integrálást végzünk:

$$\int \sin x \cdot e^{-x}\, dx = -e^{-x} \cdot \cos x - \int e^{-x} \cdot \cos x\, dx$$

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} f'(x) & = & \sin x & g(x) & = & e^{-x} \\ f(x) & = & -\cos x & g'(x) & = & -e^{-x} \end{array}$$

Most nem érdemes a szokásos módon folytatni a parciális integrálást, helyette a fenti egyenletet átrendezve:

$$\int \sin x \cdot e^{-x}\, dx + \int e^{-x} \cdot \cos x\, dx = -e^{-x} \cdot \cos x$$

$$⊜ -e^{-x} \cdot \cos x + \int e^{-x}\, dx = -e^{-x} \cdot \cos x - e^{-x} = e^{-x} \cdot (-\cos x - 1)$$

Így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása felírható az alábbi alakban:

$$y_{\text{inh}}^{\text{part}} = e^{-x} \cdot (-\cos x - 1) \cdot e^{x} = -1 - \cos x$$

Előadáson ismertetett tétel alapján:

$$y_{\text{inh}}^{\text{ált}} = y_{\text{inh}}^{\text{part}} + Y_{\text{hom}}^{\text{ált}} = -1 - \cos x + C \cdot e^{x}. \qquad {\scriptstyle (C \in \mathbb{R})}$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

g) $(1+\sin x)^2 y'' + \cos x = 0$

Megoldás.
Másodrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet. Megoldás szempontjából pedig tiszta hiányos másodrendű differenciálegyenlet.

$$y'' = -\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$y' = \int y''\,dx = -\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}\,dx = -\int \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{t} + C_1 = \frac{1}{1+\sin x} + C_1$$

$$t = 1+\sin x \qquad dt = \cos x\,dx$$

$$y = \int y'\,dx = \int \frac{1}{1+\sin x} + C_1\,dx = \int \frac{1}{1+\sin x}\,dx + \int C_1\,dx =$$

$$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \qquad x \in (-\pi,\pi) \qquad \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \qquad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

$$= \int \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du + C_1 x = \int \frac{1+u^2}{u^2+2u+1} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du + C_1 x =$$

$$= 2\int \frac{1}{(u+1)^2}\,du + C_1 x = 2\int \frac{1}{z^2}\,dz + C_1 x = -\frac{2}{z} + C_1 x + C_2 =$$

$$z = 1+u \qquad dz = du$$

$$= -\frac{2}{u+1} + C_1 x + C_2 = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1} + C_1 x + C_2 \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

vissza a feladathoz

h) $y'' = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

Megoldás.
Másodrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet. Megoldás szempontjából pedig tiszta hiányos másodrendű differenciálegyenlet.

$$y' = \int y''\,dx = \int \frac{1-\ln x}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2} - \int \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{x} - \int \frac{t}{e^t}\,dt =$$

$$t = \ln x \qquad dt = \frac{1}{x}\,dx \qquad x = e^t$$

$$= -\frac{1}{x} - \int t \cdot e^{-t}\,dt = -\frac{1}{x} - \left(-te^{-t} + \int e^{-t}\,dt\right) =$$

$$f'(t) = e^{-t} \qquad f(t) = -e^{-t} \qquad g(t) = t \qquad g'(t) = 1$$

$$= -\frac{1}{x} + te^{-t} + e^{-t} + C_1 = -\frac{1}{x} + \ln x \cdot \underbrace{e^{-\ln x}}_{=\frac{1}{x}} + e^{-\ln x} + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \ln x + \frac{1}{x} + C_1 = \frac{1}{x} \cdot \ln x + C_1$$

$$y=\int y''\,dx \;=\; \int \frac{1}{x}\cdot\ln x+C_1\,dx=\int \frac{1}{x}\cdot\ln x\,dx+\int C_1\,dx=\int t\,dt+C_1x=$$

$$\begin{aligned} t &= \ln x\\ dt &= \tfrac{1}{x}\,dx\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}t^2+C_1x+C_2=\frac{1}{2}\ln^2 x+C_1x+C_2 \qquad (C_1,C_2\in\mathbb{R})$$

vissza a feladathoz

i) $y''-y'-6y=0$

Megoldás.
Másodrendű, lineáris, homogén állandó-együtthatós differenciálegyenlet. Keressük a megoldást $y=e^{\lambda x}$ alakban! Ekkor

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda x}\\ y' &= \lambda\cdot e^{\lambda x}\\ y'' &= \lambda^2\cdot e^{\lambda x}\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned} \lambda^2\cdot e^{\lambda x}-\lambda\cdot e^{\lambda x}-6e^{\lambda x} &= 0\\ \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}\cdot\left(\lambda^2-\lambda-6\right) &= 0\\ \lambda^2-\lambda-6 &= 0 \quad \text{(Karakterisztikus egyenlet)}\end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}=\begin{cases}\lambda_1 = -2\\ \lambda_2 = 3.\end{cases}$$

Ekkor a két lineárisan független partikuláris megoldás:

$$y_1=e^{-2x} \qquad y_2=e^{3x}.$$

Az általános megoldás ezen partikuláris megoldások lineáris kombinációiként kapható:

$$y=C_1\cdot e^{-2x}+C_2\cdot e^{3x}. \qquad (C_1,C_2\in\mathbb{R})$$ ♢

vissza a feladathoz

j) $4y''-4y'-y=0$

Megoldás.
Másodrendű, lineáris, homogén állandó-együtthatós differenciálegyenlet.

Keressük a megoldást $y=e^{\lambda x}$ alakban! Ekkor

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda x}\\ y' &= \lambda\cdot e^{\lambda x}\\ y'' &= \lambda^2\cdot e^{\lambda x}\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned} 4\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} - 4\lambda \cdot e^{\lambda x} - e^{\lambda x} &= 0 \\ \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \cdot \left(4\lambda^2 - 4\lambda - 1\right) &= 0 \\ 4\lambda^2 - 4\lambda - 1 &= 0 \quad \text{(Karakterisztikus egyenlet)} \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{8} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ekkor a két lineárisan független partikuláris megoldás:

$$y_1 = e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x} \quad y_2 = e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x}.$$

Az általános megoldás ezen partikuláris megoldások lineáris kombinációiként kapható:

$$y = C_1 \cdot e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x} + C_2 \cdot e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x}. \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

◊

vissza a feladathoz

k) $9y'' + 6y' + y = 0$

Megoldás.
Másodrendű, lineáris, homogén állandó-együtthatós differenciálegyenlet.

Keressük a megoldást $y = e^{\lambda x}$ alakban! Ekkor

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda x} \\ y' &= \lambda \cdot e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned} 9\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + 6\lambda \cdot e^{\lambda x} + e^{\lambda x} &= 0 \\ \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \cdot \left(9\lambda^2 + 6\lambda + 1\right) &= 0 \\ 9\lambda^2 + 6\lambda + 1 &= 0 \quad \text{(Karakterisztikus egyenlet)} \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{18} = -\frac{1}{3}$$

Ekkor a két lineárisan független partikuláris megoldás:

$$y_1 = e^{-\frac{1}{3}x} \quad y_2 = xe^{-\frac{1}{3}x}.$$

Az általános megoldás ezen partikuláris megoldások lineáris kombinációiként kapható:

$$y = C_1 \cdot e^{-\frac{1}{3}x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{3}x}. \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

◊

vissza a feladathoz

l) $y'' - 8y' + 16y = 0$

Megoldás.
Másodrendű, lineáris, homogén állandó-együtthatós differenciálegyenlet.

Keressük a megoldást $y = e^{\lambda x}$ alakban! Ekkor

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda x} \\ y' &= \lambda \cdot e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned} \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} - 8\lambda \cdot e^{\lambda x} + 16e^{\lambda x} &= 0 \\ \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \cdot \left(\lambda^2 - 8\lambda + 16\right) &= 0 \\ \lambda^2 - 8\lambda + 16 &= 0 \quad \text{(Karakterisztikus egyenlet)} \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = 4$$

Ekkor a két lineárisan független partikuláris megoldás:

$$y_1 = e^{4x} \quad y_2 = xe^{4x}.$$

Az általános megoldás ezen partikuláris megoldások lineáris kombinációiként kapható:

$$y = C_1 \cdot e^{4x} + C_2 \cdot x \cdot e^{4x}. \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

m) $y'' - 4y' + 13y = 0$

Megoldás.
Másodrendű, lineáris, homogén állandó-együtthatós differenciálegyenlet.

Keressük a megoldást $y = e^{\lambda x}$ alakban! Ekkor

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda x} \\ y' &= \lambda \cdot e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned} \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} - 4\lambda \cdot e^{\lambda x} + 13e^{\lambda x} &= 0 \\ \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \cdot \left(\lambda^2 - 4\lambda + 13\right) &= 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda + 13 &= 0 \quad \text{(Karakterisztikus egyenlet)} \end{aligned}$$

$$D = 16 - 4 \cdot 13 < 0$$

Ekkor legyen:

$$\alpha := \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \quad \beta := \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{36}}{2} = 3.$$

Az előadáson igazolt tétel alapján a két lineárisan független partikuláris megoldás legyen:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x = e^{2x}\cdot\cos 3x \\ &\text{és} \\ y_2 &= e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x = e^{2x}\cdot\sin 3x \end{aligned}$$

Így az általános megoldás:

$$y = C_1\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x + C_2\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x. \qquad {\scriptstyle (C_1,C_2\in\mathbb{R})}$$ ♢

vissza a feladathoz

n) $2y'' - y' + y = 0$

Megoldás.

Másodrendű, lineáris, homogén állandó-együtthatós differenciálegyenlet.

Keressük a megoldást $y = e^{\lambda x}$ alakban! Ekkor

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda x} \\ y' &= \lambda\cdot e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2\cdot e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned} 2\lambda^2\cdot e^{\lambda x} - \lambda\cdot e^{\lambda x} + e^{\lambda x} &= 0 \\ \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}\cdot\left(2\lambda^2-\lambda+1\right) &= 0 \\ 2\lambda^2-\lambda+1 &= 0 \quad \text{(Karakterisztikus egyenlet)} \end{aligned}$$

$$D = 1-8 = -7 < 0$$

Ekkor legyen:

$$\alpha := \frac{-b}{2a} = -\frac{1}{4} \quad \beta := \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Az előadáson igazolt tétel alapján a két lineárisan független partikuláris megoldás legyen:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x = e^{-\frac{1}{4}x}\cdot\cos\tfrac{\sqrt{7}}{4}x \\ &\text{és} \\ y_2 &= e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x = e^{-\frac{1}{4}x}\cdot\sin\tfrac{\sqrt{7}}{4}x \end{aligned}$$

Így az általános megoldás:

$$y = C_1\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\cdot\cos\tfrac{\sqrt{7}}{4}x + C_2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\cdot\sin\tfrac{\sqrt{7}}{4}x. \qquad {\scriptstyle (C_1,C_2\in\mathbb{R})}$$ ♢

vissza a feladathoz

21. fejezet

Kétváltozós függvények

21.1. Gyakorlat

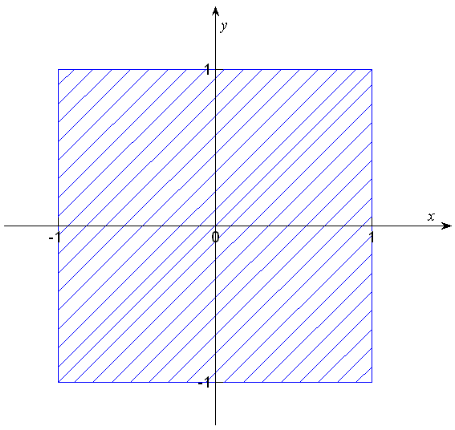
21.1. Feladat. *Írjuk fel a következő függvények értelmezési tartományát! Vázlatosan ábrázoljuk is a tartományokat!*

a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$

Megoldás.
A páros-gyökök miatt:

$$\begin{array}{rcl} 1-x^2 & \geq & 0 \\ 1 & \geq & x^2 \\ 1 & \geq & |x| \end{array} \qquad \text{és} \qquad \begin{array}{rcl} 1-y^2 & \geq & 0 \\ 1 & \geq & y^2 \\ 1 & \geq & |y| \end{array}$$

Azaz $\mathscr{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ -1 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 1\}$



$f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$ értelmezési tartománya ♢

b) $f(x,y) = \ln(4-x^2-y^2) + \sqrt{x^2+1-y}$

Megoldás.
A logaritmus függvény értelmezési tartománya miatt:

$$\begin{array}{rcl} 4-x^2-y^2 & > & 0 \\ 4 & > & x^2+y^2 \end{array}$$

Ezt a feltételt tehát az origó középpontú $r = 2$ sugarú nyílt körlap pontjai elégítik ki.

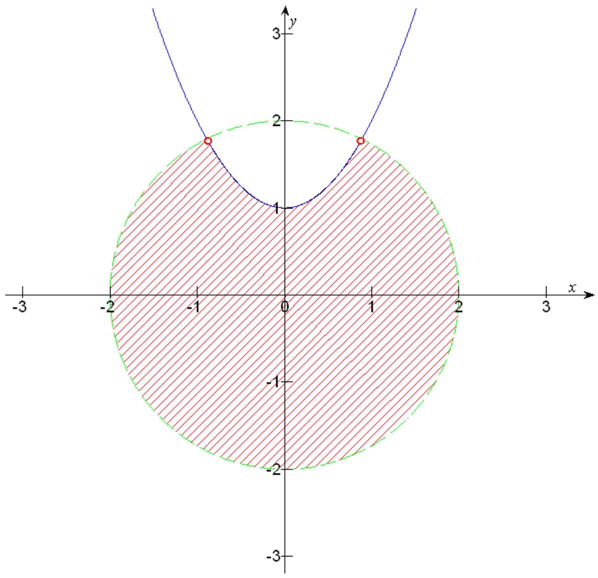
A páros-gyök miatt:

$$\begin{aligned} x^2+1-y &\geq 0 \\ x^2+1 &\geq y \end{aligned}$$

Ennek a feltételnek az $y = x^2+1$ parabola pontjai és az az alatti pontok tesznek eleget.

Az értelmezési tartomány a két halmaz közös része:

$$\mathscr{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 4 > x^2+y^2,\ \text{és } x^2+1 \geq y\}$$



$f(x,y) = \ln(4-x^2-y^2) + \sqrt{x^2+1-y}$ értelmezési tartománya ♢

c) $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-1)\cdot(4-x^2-y^2)}$

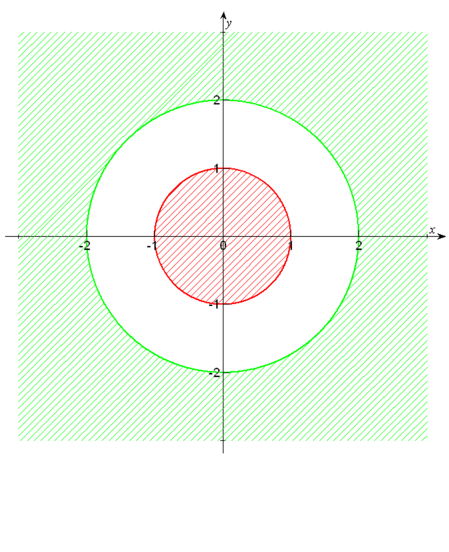
Megoldás.

A páros-gyök miatt: $(x^2+y^2-1)\cdot(4-x^2-y^2) \geq 0$, ami az alábbi két esetben teljesülhet:

I.)

$$\begin{aligned} x^2+y^2-1 &\leq 0 \qquad \text{és} \qquad & 4-x^2-y^2 &\leq 0 \\ x^2+y^2 &\leq 1 \qquad \text{és} \qquad & 4 &\leq x^2+y^2 \end{aligned}$$

Ha a két halmazt közös koordinátarendszerben ábrázoljuk, jól látható, hogy diszjunktak, azaz nincs olyan pont, amely egyidejűleg kielégítené mindkét feltételt:

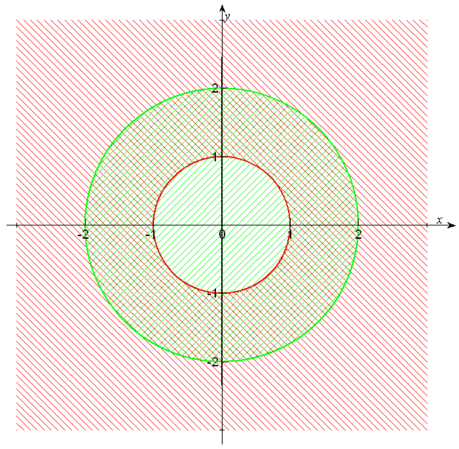


II.)

$$\begin{array}{rclcrcl} x^2+y^2-1 & \geq & 0 & \text{és} & 4-x^2-y^2 & \geq & 0 \\ x^2+y^2 & \geq & 1 & \text{és} & 4 & \geq & x^2+y^2 \end{array}$$

A két halmaz közös része:

$$\mathscr{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$



$f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-1)\cdot(4-x^2-y^2)}$ értelmezési tartománya ◊

d) $f(x,y) = \dfrac{1}{\log_2(x+y)}$

Megoldás.

A logaritmus függvény értelmezési tartománya miatt:

$$\begin{array}{rcl} x+y & > & 0 \\ y & > & -x \end{array}$$

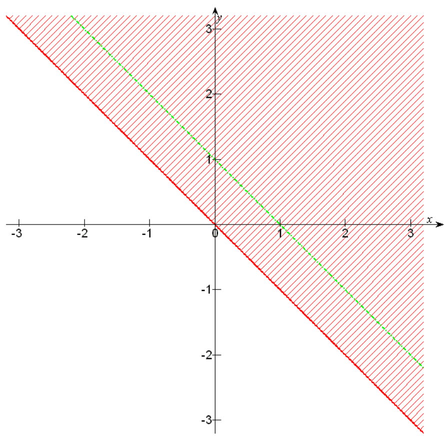
Azaz az $y = -x$ egyenes feletti pontok elégítik ki a feltételt.

Mivel a tört nevezője nem lehet 0, ezért

$$\begin{array}{rcl} \log_2(x+y) & \neq & 0 \\ x+y & \neq & 1 \\ y & \neq & 1-x \end{array}$$

Az $y = 1-x$ egyenes pontjait kivéve minden, az előbbi halmazba tartozó pont megfelelő, azaz

$\mathscr{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y > -x,\ \text{és}\ y \neq 1-x\}$



$f(x,y) = \frac{1}{\log_2(x+y)}$ értelmezési tartománya ◊

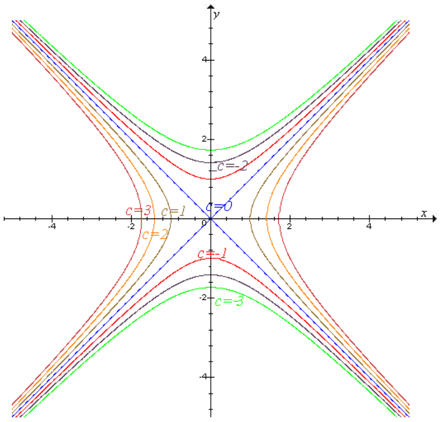
21.2. Feladat. *Ábrázoljuk a következő függvények szintvonalait!*

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$

Megoldás.

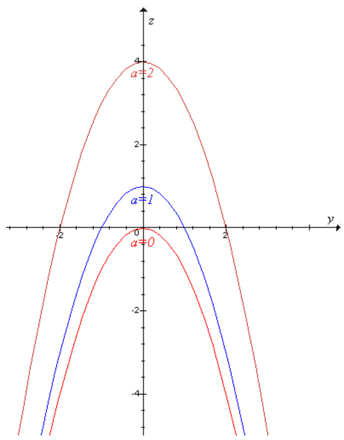
Ha $f(x,y) = c$, akkor $x^2 - y^2 = c$.

Ha $c \neq 0$, akkor a szintvonalak hiperbolák, ha $c = 0$, akkor egy metsző egyenes-pár.

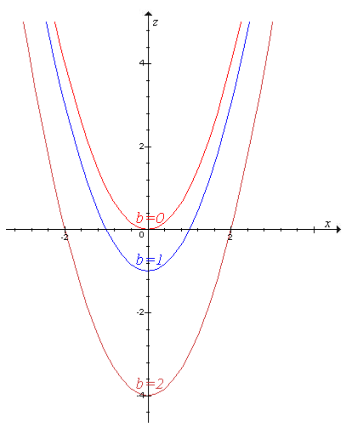


Sokszor érdemes elkészíteni az $x = a$, illetve az $y = b$ síkokkal vett metszetgörbék képét is.

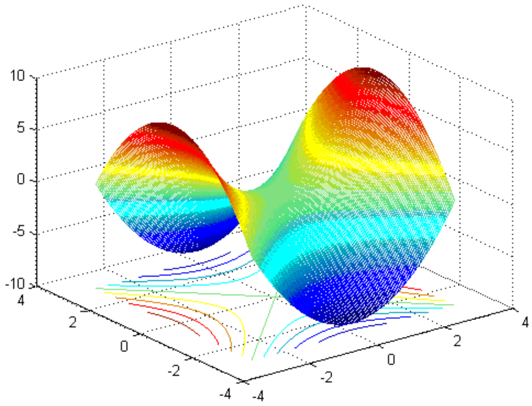
Ha $x = a \;\Rightarrow\; z = a^2 - y^2$, azaz a metszetgöbék parabolák.



Ha $y = b \;\Rightarrow\; z = x^2 - b^2$, azaz a metszetgöbék itt is parabolák.



A felület 3 dimenziós látszati-képe:



$\diamondsuit$

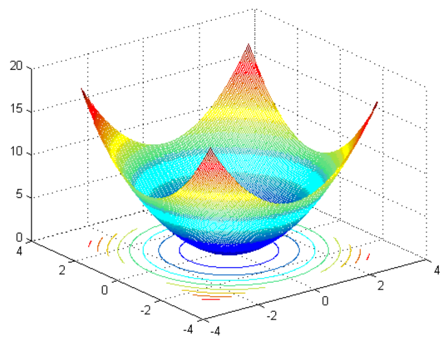
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$

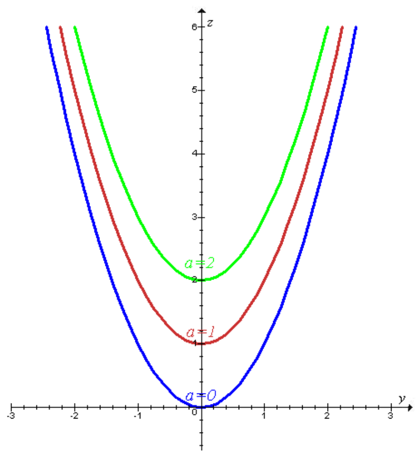
Ha $f(x,y) = c$, akkor $x^2 + y^2 = c$.

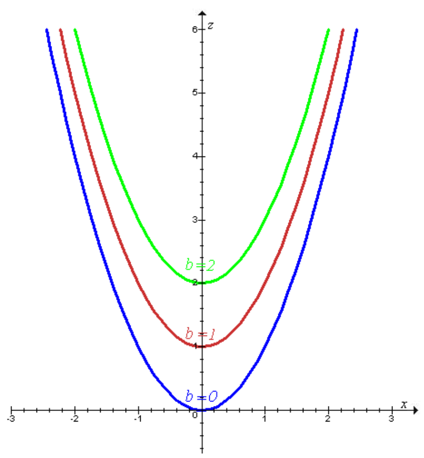
Ha $c > 0$, akkor a szintvonalak origó középpontú körök, ha $c = 0$, akkor a szintvonal az origó.

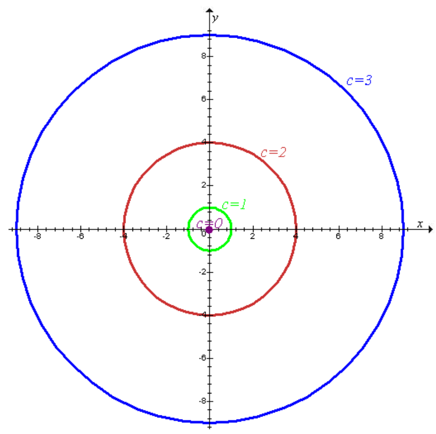
Ha $x = a \;\Rightarrow\; z = a^2 + y^2$, azaz a metszetgörbék parabolák.

Ha $y = b \;\Rightarrow\; z = x^2 + b^2$, azaz a metszetgörbék itt is parabolák.









21.3. Feladat. *Számítsuk ki a kijelölt határértékeket, ha léteznek.*

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$

Megoldás.

i) Iterált határértékekkel:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1$$

Mivel az iterált határértékek nem egyeznek meg, ezért a függvénynek az origóban nem létezik a határértéke.

ii) Polár-transzformációval:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

Így az eredeti határérték helyett az alábbit vizsgálhatjuk:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r\cos\varphi - r\sin\varphi}{r\cos\varphi + r\sin\varphi} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi} = \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi}$$

Mivel a határérték nem független φ-től, ezért az origóban nem létezik a határérték.$\diamondsuit$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

Megoldás.

Mivel $f(x,y)$ x-ben és y-ban szimmetrikus és a határértéket az origóban viszgáljuk, garantálható, hogy az iterált határértékek megegyeznek. De, mivel ezek egyezése szükséges, de nem elégséges feltétele a határérték létezésének, ezért ezeket ki sem számítjuk, hanem rögtön a polár-transzformációhoz folyamodunk.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

Így az eredeti határérték helyett az alábbit vizsgálhatjuk:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{2r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\sin 2\varphi}{1} = \sin 2\varphi$$

Mivel a határérték nem független φ-től, ezért a függvénynek az origóban nem létezik a határértéke. $\diamondsuit$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-1)} \dfrac{x^2(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$

Megoldás.

Írjuk fel az iterált határértékeket:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to -1} \frac{x^2(y+1)}{x^2+(y+1)^2} = 0, \qquad \lim_{y\to -1}\lim_{x\to 0} \frac{x^2(y+1)}{x^2+(y+1)^2} = 0.$$

Az iterált határértékek megegyeznek, ami szükséges, de nem elégséges feltétel, tovább vizsgáljuk a határértéket egy polártranszformáció után.

Ehhez először a vizsgált pontot az origóba toljuk:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y+1 &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

Így az eredeti határérték helyett az alábbit vizsgálhatjuk:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2\varphi \cdot r\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \lim_{r\to 0^+} \underbrace{r}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi}_{\text{korlátos}} = 0$$

Mivel a határérték független φ-től, ezért a függvénynek az origóban létezik a határértéke és az 0. ♢

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,0^+)} \dfrac{x^y}{1+x^y}$

Megoldás.
Írjuk fel az iterált határértékeket:

$$\lim_{x\to\infty} \lim_{y\to 0^+} \frac{x^y}{1+x^y} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to 0^+} \lim_{x\to\infty} \frac{x^y}{1+x^y} = \lim_{y\to 0^+} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^{-y}} = 1$$

Mivel $y > 0$ esetén $x^{-y} \to 0$, ha $x \to \infty$. Az iterált határértékek tehát léteznek, de nem egyeznek meg, így a határérték nem létezik. ♢

21.4. Feladat. *Írjuk fel az alábbi függvények x-szerinti és y-szerinti parciális deriváltfüggvényeit!*

a) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{y^3}$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y^3 \cdot \tfrac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \\ f'_y(x,y) &= \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^{\frac{1}{3}} \cdot (-3) y^{-4} \end{aligned}$$

♢

b) $f(x,y) = \ln(x+\sqrt{y})$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \tfrac{1}{x+\sqrt{y}} \cdot 1 \\ f'_y(x,y) &= \tfrac{1}{x+\sqrt{y}} \cdot \tfrac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

♢

c) $f(x,y) = (\sin x)^{\cos y}$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \cos y \cdot (\sin x)^{\cos y - 1} \cdot \cos x \\ f'_y(x,y) &= (\sin x)^{\cos y} \cdot \ln\sin x \cdot (-\sin y) \end{aligned}$$

♢

d) $f(x,y) = \arcsin\left(\ln \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Megoldás.

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}} \cdot \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \cdot \frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x^2+y^2}$$
$$f'_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}} \cdot \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \cdot x\cdot(-\tfrac{1}{2})(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y$$

◊

21.5. Feladat. *Írjuk fel a következő függvények összes másodrendű parciális deriváltfüggvényét!*

a) $f(x,y) = x^3y^3 + x^2y + xy^2$

Megoldás.

$$f'_x(x,y) = y^3\cdot 3\cdot x^2 + y\cdot 2x + y^2\cdot 1$$
$$f'_y(x,y) = x^3\cdot 3y^2 + x^2\cdot 1 + x\cdot 2y$$

$$f''_{xx}(x,y) = \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 3y^3\cdot 2x + 2y\cdot 1 + 0$$
$$f''_{yy}(x,y) = \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 3x^3\cdot 2y + 0 + 2x\cdot 1$$
$$f''_{xy}(x,y) = \tfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = 3x^2\cdot 3y^2 + 2x\cdot 1 + 2y$$
$$f''_{yx}(x,y) = \tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 3y^2\cdot 3x^2 + 2x + 2y\cdot 1$$

◊

b) $f(x,y) = x^y$

Megoldás.

$$f'_x(x,y) = y\cdot x^{y-1}$$
$$f'_y(x,y) = x^y\cdot \ln x$$

$$f''_{xx}(x,y) = \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y\cdot(y-1)\cdot x^{y-2}$$
$$f''_{yy}(x,y) = \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \ln x\cdot x^y\cdot \ln x$$
$$f''_{xy}(x,y) = \tfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = 1\cdot x^{y-1} + y\cdot x^{y-1}\cdot \ln x$$
$$f''_{yx}(x,y) = \tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = y\cdot x^{y-1}\cdot \ln x + x^y\cdot \tfrac{1}{x}$$

◊

21.2. Házi Feladatok

21.1. Házi Feladat. *Írjuk fel a következő függvények értelmezési tartományát! Vázlatosan ábrázoljuk is a tartományokat!*

a) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sin 2x \cdot \cos 3y$ *megoldás*

b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{\sin \frac{\pi}{2}x \cdot \cos \frac{\pi}{2}y}}$ *megoldás*

c) $f(x,y) = \ln\left(x \cdot \ln(y-x)\right)$ *megoldás*

d) $f(x,y) = \arcsin\left(2y \cdot (1+x^2) - 1\right)$ *megoldás*

21.2. Házi Feladat. *Ábrázoljuk a következő függvények szintvonalait!*

a) $f(x,y) = x^2 + y$ *megoldás*

b) $f(x,y) = x \cdot y$ *megoldás*

c) $f(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$ *megoldás*

21.3. Házi Feladat. *Számítsuk ki a kijelölt határértékeket, ha léteznek.*

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y+x^2+y^2}$ *megoldás*

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2-y^2}{x^2+y^2-2x+1}$ *megoldás*

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+1)x+y(y+1)}{x+y}$ *megoldás*

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}$ *megoldás*

21.4. Házi Feladat. *Írjuk fel az alábbi függvények x-szerinti és y-szerinti parciális deriváltfüggvényeit!*

a) $f(x,y) = \dfrac{x^y+y^x}{x^y-y^x}$ *megoldás*

b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ *megoldás*

c) $f(x,y) = x^{y^2}$ *megoldás*

21.5. Házi Feladat. *Írjuk fel a következő függvények összes másodrendű parciális deriváltfüggvényét!*

a) $f(x,y) = x \cdot \ln(x \cdot y) - y \cdot \ln(x \cdot y) = \ln(x \cdot y) \cdot (x-y)$ *megoldás*

b) $f(x,y) = x^3 \cdot \sin y + y^3 \cdot \sin x$ *megoldás*

c) $f(x,y) = \ln(x+e^y)$ *megoldás*

21.3. Megoldások

21.1. Házi Feladat. *Írjuk fel a következő függvények értelmezési tartományát! Vázlatosan ábrázoljuk is a tartományokat!*

a) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sin 2x\cdot\cos 3y$

Megoldás.
A páros gyök miatt $x^2+y^2\geq 0$, ami minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esetén fennáll.

A tört nevezője nem lehet 0, így

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x^2+y^2} & \neq & 0 \\ x^2+y^2 & \neq & 0 \end{array}$$

Azaz $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}^2\setminus\{(0{,}0)\}$, az ábrázolástól eltekintünk. $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

b) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\cos\frac{\pi}{2}y}}$

Megoldás.
A páros gyök miatt $\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\cos\frac{\pi}{2}y\geq 0$, ami az alábbi két esetben teljesülhet:

I.) $\sin\frac{\pi}{2}x\geq 0$ és $\cos\frac{\pi}{2}y\geq 0$

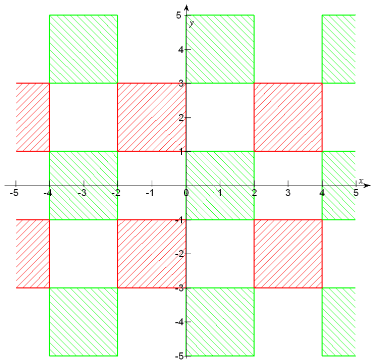
$$\begin{array}{rcccl c rcccl l} 0+2k\pi & \leq & \frac{\pi}{2}x & \leq & \pi+2k\pi & \text{és} & -\frac{\pi}{2}+2\ell\pi & \leq & \frac{\pi}{2}y & \leq & \frac{\pi}{2}+2\ell\pi & k,\ell\in\mathbb{Z} \\ 4k & \leq & x & \leq & 2+4k & & -1+4\ell & \leq & y & \leq & 1+4\ell & k,\ell\in\mathbb{Z} \end{array}$$

II.) $\sin\frac{\pi}{2}x\leq 0$ és $\cos\frac{\pi}{2}y\leq 0$

$$\begin{array}{rcccl c rcccl l} \pi+2k\pi & \leq & \frac{\pi}{2}x & \leq & 2\pi+2k\pi & \text{és} & \frac{\pi}{2}+2\ell\pi & \leq & \frac{\pi}{2}y & \leq & \frac{3}{2}\pi+2\ell\pi & k,\ell\in\mathbb{Z} \\ 2+4k & \leq & x & \leq & 4+4k & & 1+4\ell & \leq & y & \leq & 3+4\ell & k,\ell\in\mathbb{Z} \end{array}$$

Tehát

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{D}_f & = & \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ (4k\leq x\leq 2+4k \text{ és } -1+4\ell\leq y\leq 1+4\ell) \quad \text{vagy} \\ & & (2+4k\leq x\leq 4+4k \text{ és } 1+4\ell\leq y\leq 3+4\ell) \quad k,\ell\in\mathbb{Z}\} \end{array}$$



$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\cos\frac{\pi}{2}y}}$ értelmezési tartománya $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

c) $f(x,y) = \ln(x \cdot \ln(y-x))$

Megoldás.
A „belső" logaritmus függvény értelmezési tartománya miatt:
$y - x > 0 \quad \Rightarrow y > x,$

A „külső" logaritmus függvény értelmezési tartománya miatt:
$x \cdot \ln(y-x) > 0$, ami az alábbi két esetben teljesül:

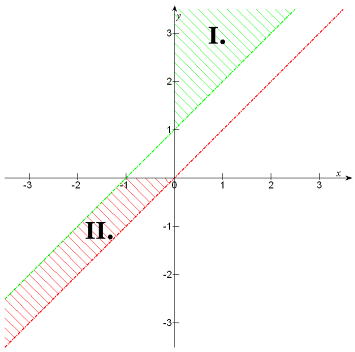
I.) $x > 0$ és $\ln(y-x) > 0$

$$\begin{array}{rclcrcl} x & > & 0 & \text{és} & y-x & > & 1 \\ & & & & y & > & 1+x \end{array}$$

II.) $x < 0$ és $\ln(y-x) < 0$

$$\begin{array}{rclcrcl} x & < & 0 & \text{és} & y-x & < & 1 \\ & & & & y & < & 1+x \end{array}$$

Azaz $\mathscr{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y > x \quad \text{és} \quad ((0 < x \text{ és } y > 1+x) \quad \text{vagy} \quad (0 > x \text{ és } y < 1+x))\}$



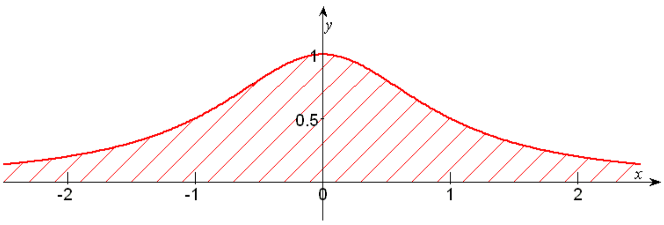
$f(x,y) = \ln(x \cdot \ln(y-x))$ értelmezési tartománya ♢

vissza a feladathoz

d) $f(x,y) = \arcsin\left(2y \cdot (1+x^2) - 1\right)$
Az arkusz-szinusz függvény értelmezési tartománya miatt:

$$\begin{array}{rcccl} -1 & < & 2y \cdot (1+x^2) - 1 & < & 1 \\ 0 & < & 2y \cdot (1+x^2) & < & 2 \\ 0 & < & y \cdot (1+x^2) & < & 1 \\ 0 & < & y & < & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

Azaz $\mathscr{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 < y < \dfrac{1}{1+x^2}\}$



$f(x,y) = \arcsin(2y \cdot (1+x^2) - 1)$ értelmezési tartománya

vissza a feladathoz

21.2. Házi Feladat. *Ábrázoljuk a következő függvények szintvonalait!*

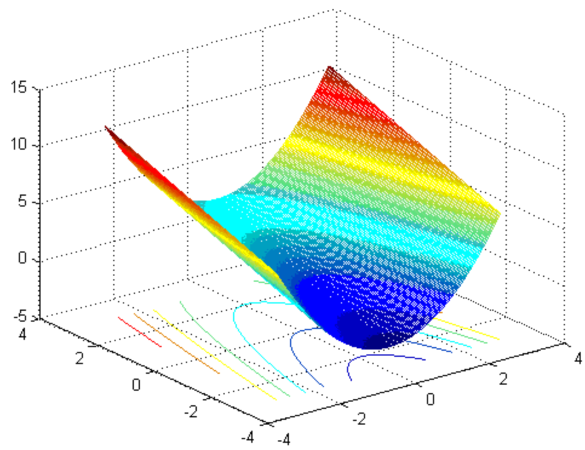
a) $f(x,y) = x^2 + y$

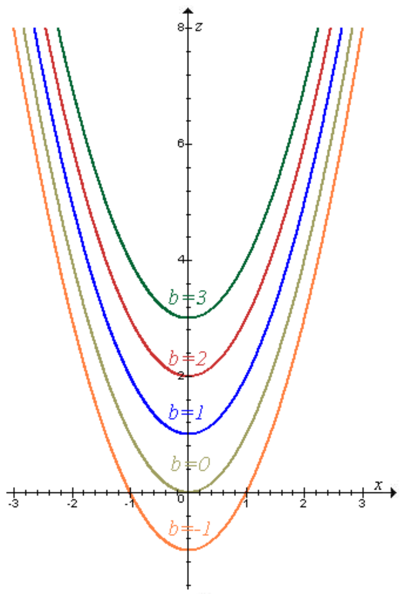
Megoldás.
Ha $f(x,y) = c$, akkor $x^2 + y = c \quad \Rightarrow \quad y = c - x^2$.

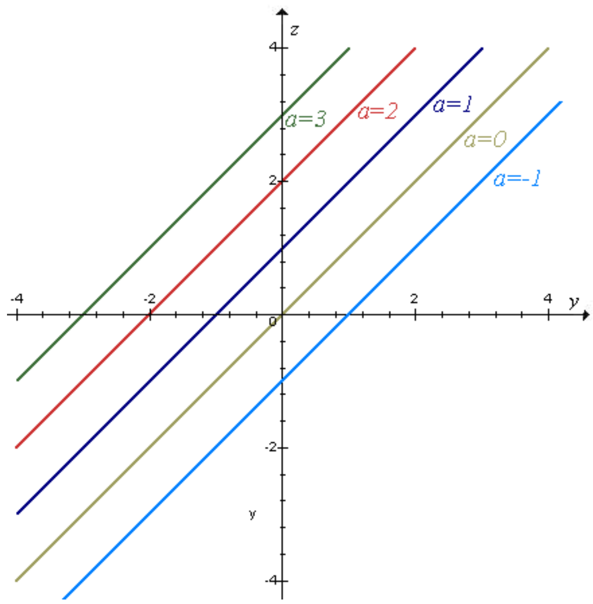
A szintvonalak parabolák (konkávak).

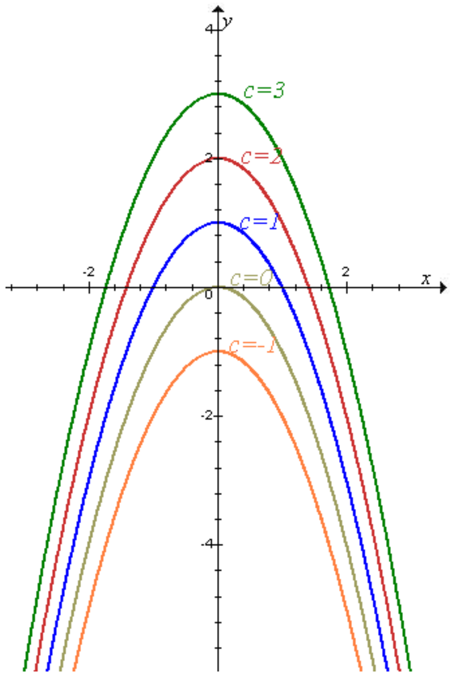
Ha $x = a \;\Rightarrow\; z = a^2 + y$, azaz a metszetgörbék egyenesek.

Ha $y = b \;\Rightarrow\; z = x^2 + b$, azaz a metszetgörbék itt is parabolák.









$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

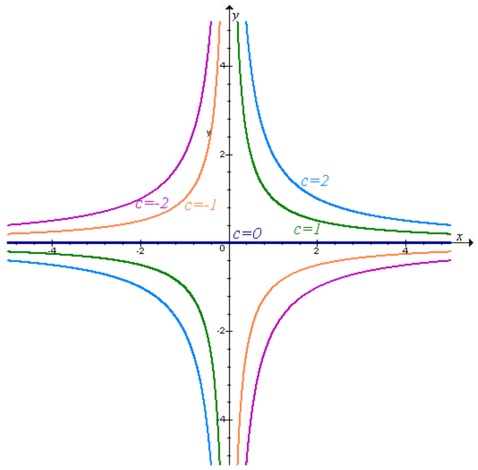
b) $f(x,y) = x \cdot y$

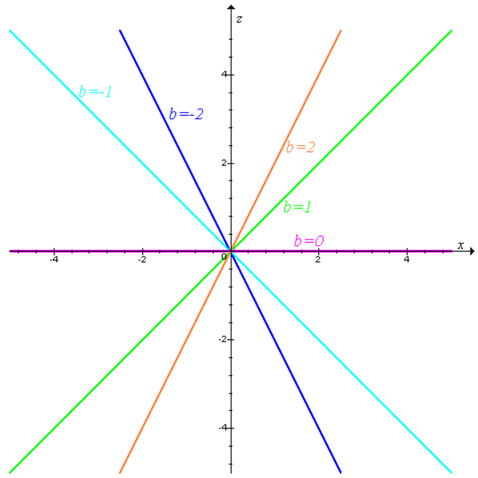
Megoldás.
Ha $f(x,y) = c$, akkor $x \cdot y = c \quad \Rightarrow \quad y = \frac{c}{x}$.

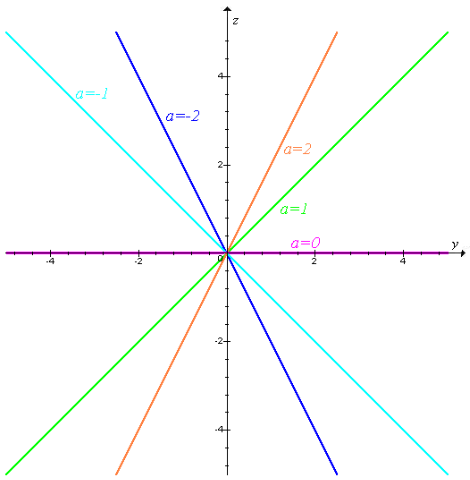
A szintvonalak hiperbolák.

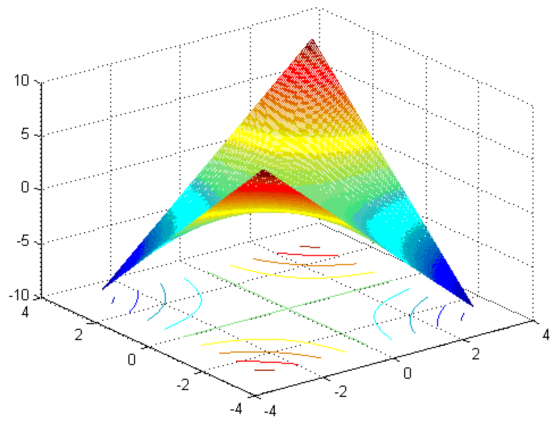
Ha $x = a \;\Rightarrow\; z = a \cdot y$, azaz a metszetgörbék origón átmenő egyenesek.

Ha $y = b \;\Rightarrow\; z = b \cdot x$, azaz a metszetgörbék itt is origón átmenő egyenesek.









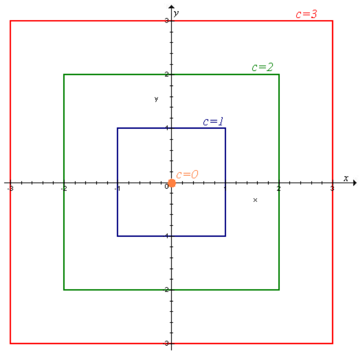
$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

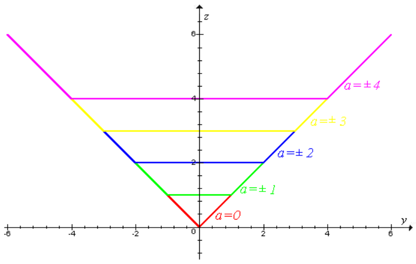
c) $f(x,y) = \max\{|x|,|y|\}$

Megoldás.
Ha $f(x,y) = c$, akkor $\max\{|x|,|y|\} = c$.

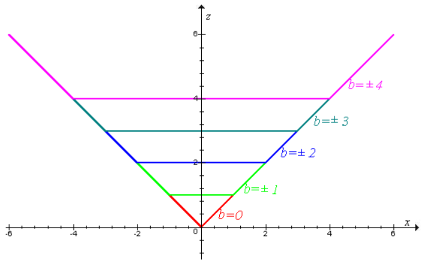
A szintvonalak origó középpontú négyzetek.



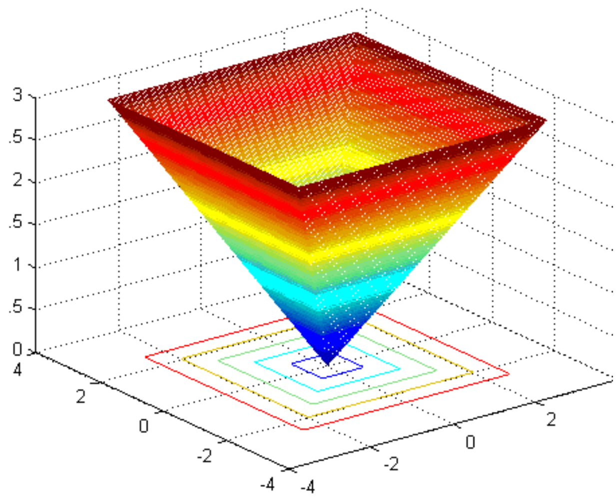
Ha $x = a \;\Rightarrow\; z = \max\{|a|,|y|\}$:



Ha $y = b \;\Rightarrow\; z = \max\{|x|,|b|\}$



A felület 3 dimenziós látszati-képe:



$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

21.3. Házi Feladat. *Számítsuk ki a kijelölt határértékeket, ha léteznek.*

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y+x^2+y^2}$

Megoldás.
Írjuk fel az iterált határértékeket:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y+x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x+x^2}=1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y+x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-y+y^2}{y+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-1+y}{1+y}=-1$$

Mivel az iterált határértékek nem egyeznek meg, ezért a függvénynek az origóban nem létezik a határértéke. ♢

vissza a feladathoz

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{xy^2-y^2}{x^2+y^2-2x+1}$

Megoldás.
Írjuk fel az iterált határértékeket:

$$\lim_{x\to 1}\lim_{y\to 0}\frac{xy^2-y^2}{x^2+y^2-2x+1}=0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 1}\frac{xy^2-y^2}{x^2+y^2-2x+1}=0$$

Az iterált határértékek megegyeznek, ami szükséges, de nem elégséges feltétel, tovább vizsgáljuk a határértéket egy polártranszformáció után.

Ehhez először a vizsgált pontot az origóba toljuk:

$$\begin{aligned} x-1 &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

Így az eredeti határérték helyett az alábbit vizsgálhatjuk:

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{(1+r\cos\varphi)\cdot r^2\sin^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}{(1+r\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi-2(1+r\cos\varphi)+1}=\lim_{r\to 0^+}\frac{r^3\cdot\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi-2-2r\cos\varphi+1}=$$

$$=\lim_{r\to 0^+}\underbrace{r}_{\to 0}\cdot\underbrace{\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi}_{\text{korlátos}}=0$$

Mivel a határérték független φ-től, ezért a függvénynek a $(0,\ 1)$ pontban létezik a határértéke és az 0. ♢

vissza a feladathoz

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+1)x+y(y+1)}{x+y}$

Megoldás.
Mivel $f(x,y)$ x-ben és y-ban szimmetrikus és a határértéket az origóban viszgáljuk, garantálható, hogy az iterált határértékek megegyeznek. De, mivel ezek egyezése szükséges, de nem elégséges feltétele a határérték létezésének, ezért ezeket ki sem számítjuk, hanem rögtön a polár-transzformációhoz folyamodunk.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

Így az eredeti határérték helyett az alábbit vizsgálhatjuk:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{(r\cos\varphi+1)\cdot r\cos\varphi+(r\sin\varphi+1)\cdot r\sin\varphi}{r\cos\varphi+r\sin\varphi} = \lim_{r\to 0^+} \frac{(r\cos\varphi+1)\cdot\cos\varphi+(r\sin\varphi+1)\cdot\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi} =$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{r\cos^2\varphi+r\sin^2\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi}+1 = 1$$

Mivel a határérték független φ-től, ezért a függvénynek az origóban létezik a határértéke és

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+1)x+y(y+1)}{x+y} = 1$$

♢

vissza a feladathoz

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}$

Megoldás.
Mivel $f(x,y)$ x-ben és y-ban szimmetrikus és a határértéket az origóban viszgáljuk, garantálható, hogy az iterált határértékek megegyeznek. De, mivel ezek egyezése szükséges, de nem elégséges feltétele a határérték létezésének, ezért ezeket ki sem számítjuk, hanem rögtön a polár-transzformációhoz folyamodunk.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

Így az eredeti határérték helyett az alábbit vizsgálhatjuk:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi-\cos\varphi\cdot\sin\varphi+\sin^2\varphi)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{1-\cos\varphi\cdot\sin\varphi} = \frac{1}{1-\cos\varphi\cdot\sin\varphi}$$

Mivel a határérték nem független φ-től, ezért a függvénynek az origóban nem létezik a határértéke. ♢

vissza a feladathoz

21.4. Házi Feladat. *Írjuk fel az alábbi függvények x-szerinti és y-szerinti parciális deriváltfüggvényeit!*

a) $f(x,y)=\dfrac{x^y+y^x}{x^y-y^x}$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &&= \tfrac{(y\cdot x^{y-1}+y^x\cdot\ln y)\cdot(x^y-y^x)-(x^y+y^x)\cdot(y\cdot x^{y-1}-y^x\cdot\ln y)}{(x^y-y^x)^2} \\ f'_y(x,y) &= \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &&= \tfrac{(x^y\cdot\ln x+x\cdot y^{x-1})\cdot(x^y-y^x)-(x^y+y^x)\cdot(x^y\cdot\ln x-x\cdot y^{x-1})}{(x^y-y^x)^2} \end{aligned}$$ $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

b) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &&= \tfrac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\tfrac{1}{y} \\ f'_y(x,y) &= \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &&= \tfrac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\tfrac{-x}{y^2} \end{aligned}$$ $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

c) $f(x,y)=x^{y^2}$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &&= y^2\cdot x^{y^2-1} \\ f'_y(x,y) &= \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &&= x^{y^2}\cdot\ln x\cdot 2y \end{aligned}$$ $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

21.5. Házi Feladat. *Írjuk fel a következő függvények összes másodrendű parciális deriváltfüggvényét!*

a) $f(x,y)=x\cdot\ln(x\cdot y)-y\cdot\ln(x\cdot y)=\ln(x\cdot y)\cdot(x-y)$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 1\cdot\ln(x\cdot y)+(x-y)\cdot\tfrac{1}{x\cdot y}\cdot y=\ln(x\cdot y)+\tfrac{x-y}{x}=\ln(x\cdot y)+1-\tfrac{y}{x} \\ f'_y(x,y) &= -1\cdot\ln(x\cdot y)+(x-y)\cdot\tfrac{1}{x\cdot y}\cdot x=\tfrac{x}{y}-1-\ln(x\cdot y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &&= \tfrac{1}{x\cdot y}\cdot y+\tfrac{y}{x^2}=\tfrac{1}{x}+\tfrac{y}{x^2} \\ f''_{yy}(x,y) &= \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &&= -\tfrac{x}{y^2}-\tfrac{1}{x\cdot y}\cdot x=-\tfrac{x}{y^2}-\tfrac{1}{y} \\ f''_{xy}(x,y) &= f''_{yx}(x,y) &&= \tfrac{1}{x\cdot y}\cdot x-\tfrac{1}{x}=\tfrac{1}{y}-\tfrac{1}{x} \end{aligned}$$ $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

b) $f(x,y) = x^3 \cdot \sin y + y^3 \cdot \sin x$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= 3x^2 \cdot \sin y + y^3 \cdot \cos x \\
f'_y(x,y) &= x^3 \cdot \cos y + 3y^2 \cdot \sin x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''_{xx}(x,y) &= \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 6x \cdot \sin y - y^3 \cdot \sin x \\
f''_{yy}(x,y) &= \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 6y \cdot \sin x - x^3 \cdot \sin y \\
f''_{xy}(x,y) &= f''_{yx}(x,y) &= 3x^2 \cdot \cos y + 3y^2 \cdot \cos x
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

c) $f(x,y) = \ln(x + e^y)$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= \tfrac{1}{x+e^y} \cdot 1 \\
f'_y(x,y) &= \tfrac{1}{x+e^y} \cdot e^y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''_{xx}(x,y) &= \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \tfrac{-1}{(x+e^y)^2} \\
f''_{yy}(x,y) &= \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \tfrac{e^y \cdot (x+e^y) - e^{2y}}{(x+e^y)^2} \\
f''_{xy}(x,y) &= f''_{yx}(x,y) &= \tfrac{-e^y}{(x+e^y)^2}
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

Harmadik rész

Analízis III.

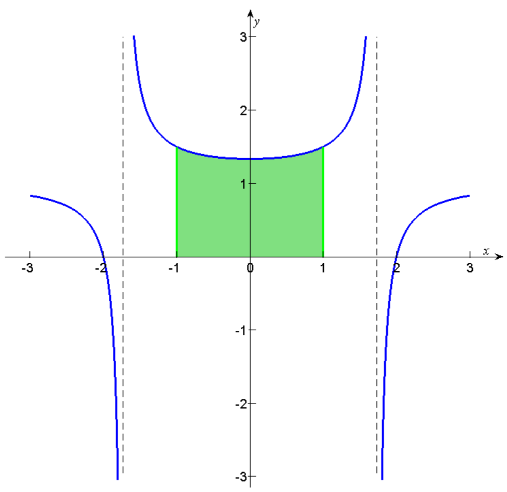
22. fejezet

Integrálszámítás alkalmazásai I.

22.1. Gyakorlat

22.1. Feladat. *Számoljuk ki az* $f(x)=1+\frac{1}{3-x^2}$ *függvény szubgrafikonjának területét a* $[-1{,}1]$ *intervallumon és az* $[1{,}8,\ 2{,}5]$ *intervallumon!*

Megoldás.
Tekintsük először a függvény $[-1{,}1]$ intervallum fölé eső darabját!
Készítsünk ábrát!



Mivel f a $[-1{,}1]$ intervallumon folytonos, ezért Riemann-integrálható. Továbbá minden $x\in[-1{,}1]$ pontban $f(x)>0$, ezért a terület

$$T=\int_{-1}^{1} f(x)\ dx=\int_{-1}^{1} 1+\frac{1}{3-x^2}\ dx \ominus$$

primitív függvény keresése:

$$\int 1+\frac{1}{3-x^2}\ dx = x+\int \frac{1}{(\sqrt{3}-x)\cdot(\sqrt{3}+x)}\ dx \overset{*}{=}$$

Elemi törtekre bontás:

$$\frac{1}{3-x^2}=\frac{1}{(\sqrt{3}-x)\cdot(\sqrt{3}+x)}=\frac{A}{\sqrt{3}-x}+\frac{B}{\sqrt{3}+x}=\frac{(A-B)\cdot x+\sqrt{3}\cdot(A+B)}{(\sqrt{3}-x)\cdot(\sqrt{3}+x)}$$

ahonnan:

$$\left.\begin{array}{rcl} A-B & = & 0 \\ A+B & = & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad A=B=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

$$\overset{*}{=} x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\int\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}-x}\ dx}_{\substack{t\ =\ \sqrt{3}-x\\ dt\ =\ -dx}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\int\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}+x}\ dx}_{\substack{u\ =\ \sqrt{3}+x\\ du\ =\ dx}}=x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\int\frac{1}{t}\ dt+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\int\frac{1}{u}\ du=$$

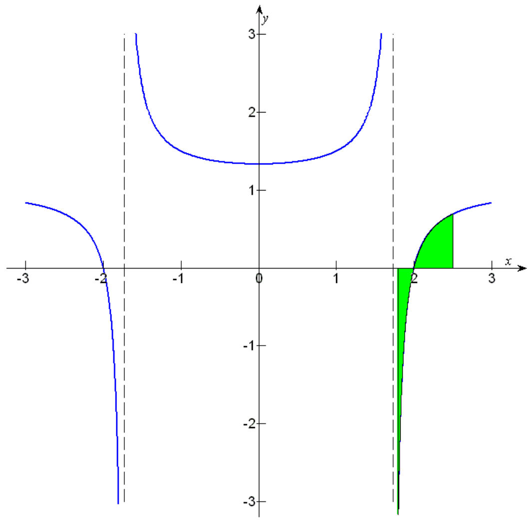
$$=x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\ln|t|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\ln|u|+C=x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\ln|\sqrt{3}-x|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\ln|\sqrt{3}+x|+C.$$

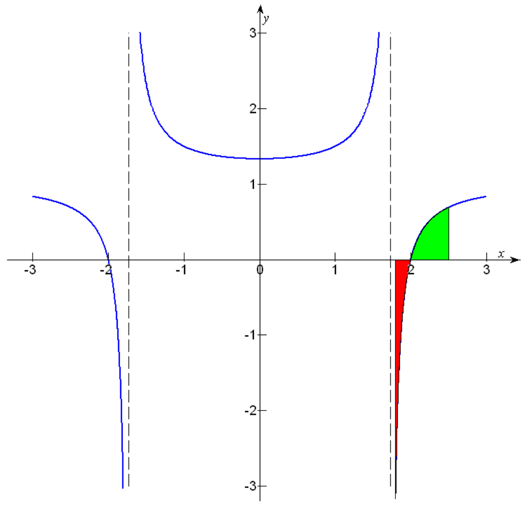
A kapott eredményben kihasználható, hogy mivel $-1\le x\le 1$, ezért $\sqrt{3}+x>0$ és $\sqrt{3}-x>0$, így $|\sqrt{3}+x|=\sqrt{3}+x$ és $|\sqrt{3}-x|=\sqrt{3}-x$.

A területképletbe visszahelyettesítve és a Newton-Leibniz formulát alkalmazva:

⊜ $$\left[x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\ln(\sqrt{3}-x)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\ln(\sqrt{3}+x)\right]_{-1}^{1}=2\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\left(\ln(\sqrt{3}+1)-\ln(\sqrt{3}-1)\right)\right)\approx 2{,}76.$$

A feladat második felének vizsgálata során azt tapasztaljuk, hogy a függvény az $[1{,}8,\ 2{,}5]$ intervallumon nem állandó előjelű, ezért az előző gondolatmenet most nem alkalmazható. Helyette az intervallumot olyan részintervallumokra bontjuk, melyeken a függvény állandó előjelű. Az egyes részintervallumokhoz tartozó síkidomok területeit külön-külön számoljuk ki.





Az első feladatunk tehát, hogy megkeressük azt a pontot, vagy azokat a pontokat, ahol a függvény előjelet vált. Mivel a kérdéses intervallumon a függvény minden pontban értelmezett és folytonos, ezért azokban a pontokban válthat előjelet ahol a függvényérték 0:

$$1+\frac{1}{3-x^2}=\frac{3-x^2+1}{3-x^2}=\frac{4-x^2}{3-x^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4-x^2=0.$$

Ebből $x=\pm 2$ adódik, melyek közül csak az $x=2$ pont esik a vizsgált intervallumba.

Mivel a függvény az adott intervallumon szigorúan monoton növő, ezért a függvény értéke az $[1{,}8,\ 2]$ intervallum pontjaiban nem-pozitív, a $[2,\ 2{,}5]$ intervallum pontjaiban pedig nem-negatív. (A függvény monotonitása vizsgálható a derivált előjelével: $f'(x)=\frac{2x}{(3-x^2)^2}$, de elemi meggondolásokkal is vizsgálható a függvény előjele.)

Az $[1{,}8,\ 2]$ intervallum pontjaiban $f(x)\le 0$, ezért a terület a

$$T_1=-\int_{1{,}8}^{2} f(x)\ dx$$

formula alapján számolható. A $[2,\ 2{,}5]$ intervallum pontjaiban $f(x)\ge 0$, ezért az intervallumhoz tartozó síkidom területe:

$$T_2=\int_{2}^{2{,}5} f(x)\ dx.$$

Mindkét intervallumon a függvény folytonos, így Riemann-integrálható. A Newton-Leibniz formula alkalmazásához a primitív függvényt már nem kell újra meghatároznunk:

$$T_1+T_2=-\left[x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\left(\ln(\sqrt{3}+x)-\ln|\sqrt{3}-x|\right)\right]_{1,8}^{2}+\left[x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\left(\ln(\sqrt{3}+x)-\ln|\sqrt{3}-x|\right)\right]_{2}^{2,5}=$$

$$=-2-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\ln(\sqrt{3}+2)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\ln(2-\sqrt{3})+1{,}8+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\ln(\sqrt{3}+1{,}8)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\ln(1{,}8-\sqrt{3})+$$

$$+2{,}5+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\ln(\sqrt{3}+2{,}5)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\ln(2{,}5-\sqrt{3})-2-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\ln(\sqrt{3}+2)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\ln(2-\sqrt{3})\approx$$

$$\approx 0{,}18+0{,}23=0{,}41$$

♢

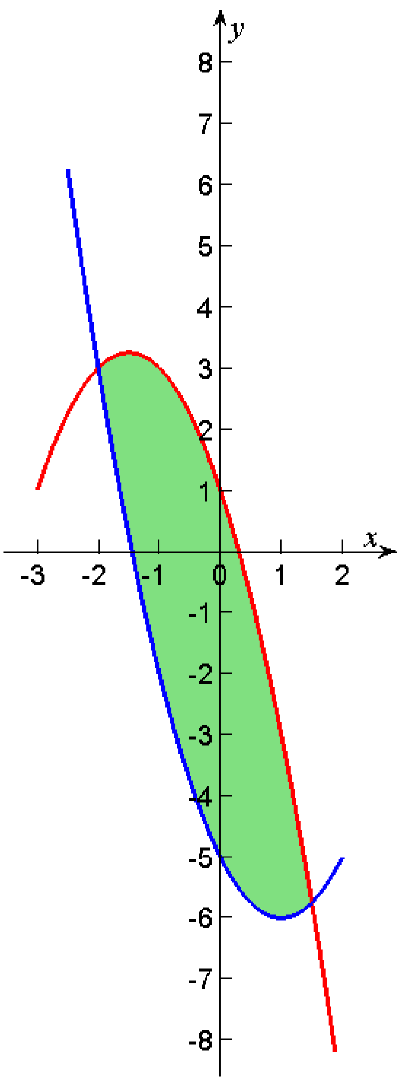
22.2. Feladat. *Számoljuk ki az*

$$\begin{aligned} y &= x^2-2x-5 \\ y &= -x^2-3x+1 \end{aligned}$$

görbék által közrezárt síkidom területét!

Megoldás.

Készítsünk ábrát!



A metszéspontok meghatározása:
Olyan $P(x_0,y_0)$ pontokat keresünk, melyek koordinátái mindkét parabola egyenletét kielégítik, azaz szeretnénk megoldani az

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2-2x-5 \\ y &= -x^2-3x+1 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Ahonnan a baloldalak egyenlőségéből következik, hogy a kérdéses pont x koordinátájára:

$$x^2-2x-5=-x^2-3x+1 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2+x-6=0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét felírva:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\frac{-1\pm 7}{4}\Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 1{,}5 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

A metszéspontok y koordinátája is egyszerűen meghatározható lenne, de a feladat megoldásához nincs rá szükség. Könnyen látható, hogy a két metszéspont között

$$f(x):=x^2-2x-5\le -x^2-3x+1:=g(x).$$

A terület tehát az alábbi formula alapján számolható:

$$T=\int_{-2}^{1,5}|f(x)-g(x)|\,dx=\int_{-2}^{1,5}-2x^2-x+6\,dx=$$

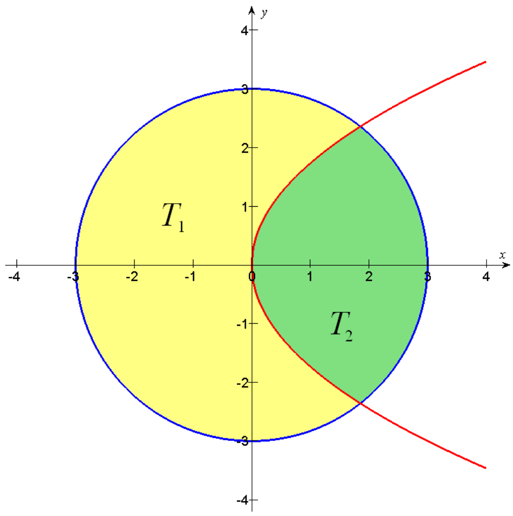
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{-2}^{1,5}=13{,}5.$$

♢

22.3. Feladat. *Határozzuk meg az $x^2+y^2=9$ egyenletű kör és az $y^2=3x$ egyenletű parabola által meghatározott zárt síkrészek területét!*

Megoldás.

Készítsünk ábrát!



Az ábra alapján is nyílvánvaló, hogy a zölddel és a sárgával jelölt síkidomok együttes területe megegyezik a kör területével, azaz

$$T_1+T_2=r^2\pi=9\pi.$$

Így elegendő mondjuk a T_2 területet kiszámítani, majd $T_1=9\pi-T_2$ formula alapján számolni T_1-et.

Vegyük észre továbbá azt is, hogy mindkét görbe, így az általuk határolt síkrészek is, szimmetrikus az x-tengelyre.

Metszéspont megkeresése:

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2 &=& 9 \\ y^2 &=& 3x \end{array}\right\}.$$

A második egyenletből y^2-et visszahelyettesítve az első egyenletbe, az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$x^2+3x-9=0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét felírva:

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+36}}{2}=\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}.$$

$x_1=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$ esetén valóban metszéspontot kapunk, de az $x_2=\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}$ eredmény hamis gyök hiszen ekkor az $y^2=3\cdot x<0$ egyenletnek nem lenne valós megoldása.

Legyen $f(x):=\sqrt{3x}$ és $g(x):=\sqrt{9-x^2}$. Ekkor a szimmetriát és a terület definícióját kihasználva:

$$T_2=2\cdot\left(\int_0^{x_1} f(x)\,dx+\int_{x_1}^{3} g(x)\,dx\right)\ominus$$

A primitív függvények meghatározása:

$$\int f(x)\,dx=\int\sqrt{3x}\,dx=\sqrt{3}\cdot\int\sqrt{x}\,dx=\sqrt{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

$$\int g(x)\,dx=\int\sqrt{9-x^2}\,dx=3\int\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx \underset{\substack{t\,=\,\frac{x}{3}\\ dt\,=\,\frac{1}{3}dx}}{=} 9\cdot\int\sqrt{1-t^2}\,dt \underset{\substack{t\,=\,\sin u\ (-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2})\\ dt\,=\,\cos u\ du}}{=} 9\int\sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,dt=$$

$$=9\int\sqrt{\cos^2 u}\cos u\,dt=9\int|\cos u|\cdot\cos u\,du \underset{-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \cos u\ge0}{=} 9\int\cos^2 u\,du=\frac{9}{2}\int 1+cos2u\,du=$$

$$=\frac{9}{2}u+\frac{9}{4}\sin 2u+C=\frac{9}{2}\arcsin t+\frac{9}{4}\sin(2\arcsin t)+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{4}\sin(2\arcsin\frac{x}{3})+C.$$

A kapott primitív függvényeket visszaírva a terület formulába és a Newton-Leibniz tételt alkalmazva:

$$\ominus \left[\frac{2}{\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{x_1} + \left[\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{9}{4}\sin(2\arcsin\frac{x}{3})\right]_{x_1}^3 =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}x_1^{\frac{3}{2}} + 9\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{9}{2}\arcsin\frac{x_1}{3} - \frac{9}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x_1}{3}\right) =$$
$$\approx 2{,}92 + 1{,}88 = 4{,}8.$$

És így

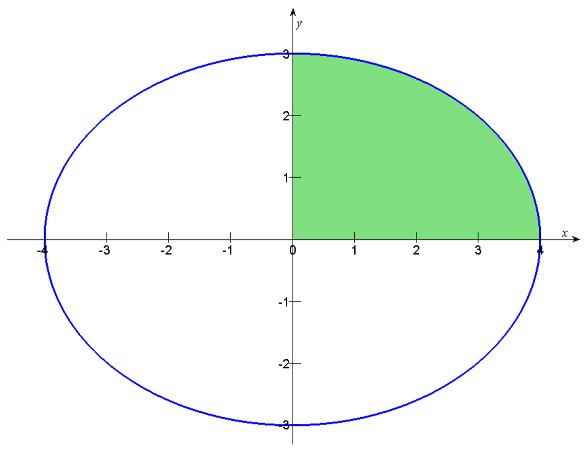
$$T_1 = 9\pi - T_2 \approx 23{,}48.$$ ♢

22.1. Megjegyzés. *Az előző feladatban a T_2 terület megkapható lett volna a $h_1(y) = y^2$ és $h_2(y) = \sqrt{9-y^2}$ függvények által közrezárt területként is.*

22.4. Feladat. *Számítsuk ki az ellipszis területét, ha a nagytengelye 8, kistengelye pedig 6 egység! Adjunk a feladatra két megoldást is!*

Megoldás.

Készítsünk ábrát!



A szóban forgó ellipszis egyenlete:

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Elegendő az első síknegyedbe eső darabja és a tengelyek által közrezárt síkidom területét kiszámolni, hiszen szimmetriai okok miatt ez éppen negyede az ellipszis területének.
Itt az

$$f(x) = y = \sqrt{9 - \frac{9}{16}x^2}, \qquad 0 \le x \le 4$$

függvényalak használható.

A színezett síkidom területe:

$$T = \int_0^4 \sqrt{9 - \frac{9}{16}x^2}\,dx \ominus$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int \sqrt{9 - \frac{9}{16}x^2}\,dx = 3\cdot\underset{\substack{t\,=\,\frac{x}{4}\\ dt\,=\,\frac{dx}{4}}}{\int \sqrt{1 - \frac{x^2}{4^2}}\,dx} = 12\cdot\underset{\substack{t\,=\,\sin u\ (-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2})\\ dt\,=\,\cos u\ du}}{\int \sqrt{1-t^2}\,dt} = 12\cdot\int\sqrt{1-\sin^2 u}\ \cos u\ du =$$

$$= 12\cdot\int\sqrt{\cos^2 u}\ \cos u\ du = 12\cdot\underset{-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \cos u\ge 0}{\int |\cos u|\cdot\cos u\ du} = 12\int\cos^2 u\ du =$$

$$= 6\int 1+\cos 2u\ du = 6u + 3\sin 2u + C = 6\arcsin\frac{x}{4} + 3\sin 2\arcsin\frac{x}{4} + C.$$

$$⊜ \left[6\arcsin\frac{x}{4}+3\sin 2\arcsin\frac{x}{4}\right]_0^4 = 6\cdot\frac{\pi}{2}+3\sin 2\cdot\frac{\pi}{2} = 3\pi \approx 9{,}42.$$

Így az ellipszis területe: $4T \approx 37{,}7$. ♢

Megoldás.
A második megoldás során induljunk ki az ellipszis paraméteres egyenletéből:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & 4\cdot\cos t \\ y(t) & = & 3\cdot\sin t \end{array}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

A szimmetriai észrevételek most is megtehetők és ezek alapján elegendő az első síknegyedbe eső darab területét számolni, amelyhez $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$:

$$T = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y(t)\cdot x'(t)\ dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 3\cdot\sin t\cdot(-4\cdot\sin t)\ dt = 12\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\ dt ⊜$$

A primitív függvény meghatározása:

$$12\int \sin^2 t\ dt = 6\int 1-\cos 2t\ dt = 6t-3\sin 2t+C.$$

És így a terület:

$$⊜ \Big[6t-3\sin 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3\cdot\pi \approx 9{,}42.$$

Így az ellipszis területe: $4T \approx 37{,}7$. ♢

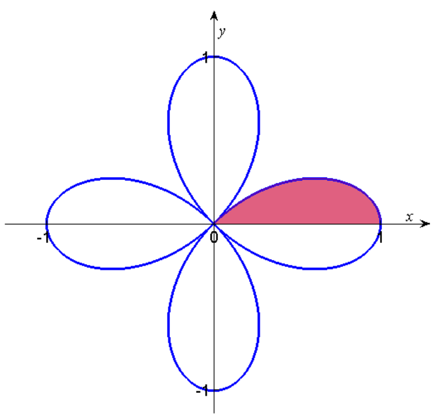
22.5. Feladat. *Számoljuk ki az*

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos^3 t-\sin^2 t\cdot\cos t \\ y(t) & = & \cos^2 t\cdot\sin t-\sin^3 t \end{array}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott lemniszkáta területét!

Megoldás.

Készítsünk ábrát!



Vegyük észre, hogy a koordináta-rendszer tengelyei a síkidomot nyolc egybevágó darabra bontják, így elegendő mondjuk a besatírozott darab területét kiszámítani.
A szóban forgó darab megrajzolása során a t paraméter 0 és $\frac{\pi}{4}$ között változik.

Így a részsíkidom területe:

$$T=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} y(t)\cdot x'(t)\ dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}(\cos^2 t\cdot\sin t-\sin^3 t)\cdot(-3\cdot\cos^2 t\cdot\sin t-2\sin t\cdot\cos^2 t+\sin^3 t)\ dt=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} -5\cos^4 t\cdot\sin^2 t+6\cos^2 t\cdot\sin^4 t-\sin^6 t\ dt \ominus$$

A primitív függvények meghatározása:

$$-5\int\cos^4 t\cdot\sin^2 t\ dt=-5\int(\cos^2 t)^2\cdot\sin^2 t\ dt=-\frac{5}{8}\int(1+\cos 2t)^2\cdot(1-\cos 2t)\ dt=$$
$$=-\frac{5}{8}\int-\cos^3 2t-\cos^2 2t+\cos 2t+1\ dt \overset{①}{=}$$

$$6\int\cos^2 t\cdot\sin^4 t\ dt=6\int\cos^2 t\cdot(\sin^2 t)^2\ dt=\frac{3}{4}\int(1+\cos 2t)\cdot(1-\cos 2t)^2\ dt=$$
$$=\frac{3}{4}\int\cos^3 2t-\cos^2 2t-\cos 2t+1\ dt \overset{②}{=}$$

$$-\int\sin^6 t\ dt=-\int(\sin^2 t)^3\ dt=-\frac{1}{8}\int(1-\cos 2t)^3\ dt=\frac{1}{8}\int\cos^3 2t-3\cos^2 2t+3\cos 2t-1\ dt \overset{③}{=}$$

A fenti határozatlan integrálok kiszámítása során az alábbi függvények primitív függvényeire lesz szükség:

$$\int\cos^3 2t\ dt=\int(1-\sin^2 2t)\cdot\cos 2t\ dt=\frac{1}{2}\int 1-u^2\ du=\frac{1}{2}u-\frac{1}{6}u^3+C=\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{6}\sin^3 2t+C.$$

$$\begin{aligned} u &= \sin 2t \\ du &= 2\cos 2t\ dt \end{aligned}$$

$$\int\cos^2 2t\ dt=\frac{1}{2}\int 1+\cos 4t\ dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}\sin 4t+C$$

$$\int\cos 2t\ dt=\frac{1}{2}\cdot\sin 2t+C$$

$$\int 1\ dt=t+C$$

A fentieket visszaírva a félbehagyott számításokba:

$$\overset{①}{=}\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{6}\sin^3 2t\right)+\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}\sin 4t\right)-\frac{5}{16}\cdot\sin 2t-\frac{5}{8}t+C=-\frac{5}{48}\cdot\sin^3 2t+\frac{5}{64}\cdot\sin 4t-\frac{5}{16}t+C.$$

$$\overset{②}{=}\frac{3}{4}\cdot\left(\sin 2t-\frac{1}{6}\sin^3 2t\right)-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}\sin 4t\right)-\frac{3}{8}\cdot\sin 2t+\frac{3}{4}t+C=-\frac{1}{8}\cdot\sin^3 2t-\frac{3}{32}\cdot\sin 4t+\frac{3}{8}t+C.$$

$$\overset{③}{=}\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{6}\sin^3 2t\right)-\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}\sin 4t\right)+\frac{3}{16}\cdot\sin 2t-\frac{1}{8}t+C=$$
$$=-\frac{1}{48}\cdot\sin^3 2t+\frac{1}{4}\cdot\sin 2t-\frac{5}{16}t-\frac{3}{64}\cdot\sin 4t+C.$$

Így a terület:

$$\ominus \left[-\frac{1}{4}\cdot\sin^3 2t+\frac{1}{4}\cdot\sin 2t-\frac{1}{4}t-\frac{1}{16}\cdot\sin 4t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{0} = -\frac{1}{4}\cdot\sin^3\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{16}\cdot\pi.$$

Így a teljes lemniszkáta területe: $8T=\frac{\pi}{2}$. ♢

Megoldás.
A második megoldás során induljunk ki a görbe polár-koordinátás felírásából. Ehhez a következő transzformációs képleteket használhatjuk:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\cos^3 t-\sin^2 t\cdot\cos t)^2+(\cos^2 t\cdot\sin t-\sin^3 t)^2}= \\ &= \sqrt{\cos^2 t\cdot(\cos^2 t-\sin^2 t)^2+\sin^2 t\cdot(\cos^2 t-\sin^2 t)^2}=|\cos 2t| \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\operatorname{arctg}\frac{\cos 2t\cdot\sin t}{\cos 2t\cdot\cos t}=\begin{cases} t, & \text{ha } t\in[0,\frac{\pi}{2}], \\ t-\pi, & \text{ha } t\in[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi], \\ t-2\pi, & \text{ha } t\in[\frac{3}{2}\pi,2\pi]. \end{cases} \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy egyszerűsítések után az $r(\varphi)=\cos 2\varphi$ polárkoordinátás alak kapható, ahol $0\le\varphi\le 2\pi$.

Az első megoldásban leírt szimmetriai tulajdonságok most is kihasználhatók. Most is elegendő a satírozott síkidom területét kiszámolni. Ebben az esetben a φ polárszög 0-tól $\frac{\pi}{4}$-ig változik. Így a terület:

$$T=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\varphi\,d\varphi\ominus$$

A primitív függvény meghatározása:
$$\frac{1}{2}\cdot\int\cos^2 2\varphi(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{4}\cdot\int 1-\cos 4\varphi(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{4}\varphi-\frac{1}{16}\sin 4\varphi+C$$

$$\ominus\left[\frac{1}{4}\varphi-\frac{1}{16}\sin 4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{16}\pi.$$

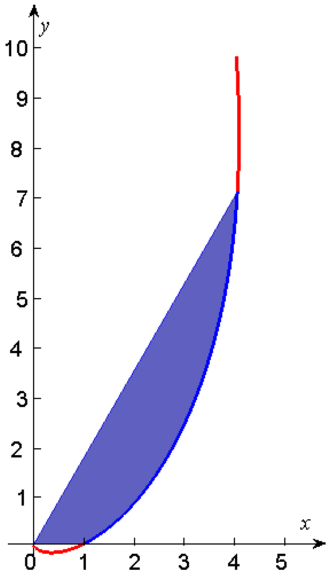
Így a teljes lemniszkáta területe: $8T=\frac{\pi}{2}$. ♢

22.6. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$r(\varphi)=e^{2\varphi}$$

polárkoordinátás egyenlettel adott logaritmikus spirál és a $\varphi_1=0$ és $\varphi_2=\frac{\pi}{3}$ polárszögek által határolt szektorszerű idom területét!

Megoldás.
Bár a feladat megoldásához nincs rá szükség, de szemléltetési céllal most is készíthetünk ábrát:



Alkalmazzuk a szektor-szerű idom területére igazolt összefüggést:

$$T = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\ d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(e^{2\varphi}\right)^2\ d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} e^{4\varphi}\ d\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{4\varphi}}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$
$$= \frac{1}{8}e^{\frac{4}{3}\pi} - \frac{1}{8} \approx 8{,}12.$$

$\diamondsuit$

22.2. Házi Feladatok

22.1. Házi Feladat. *Számoljuk ki az $f(x)=\ln(x+3)$ függvény szubgrafikonjának területét a $[0,2]$ intervallumon!* megoldás

22.2. Házi Feladat. *Számoljuk ki az $f(x)=\cos^2 2x-\frac{1}{4}$ függvény szubgrafikonjának területét a $[0,\frac{\pi}{2}]$ intervallumon!* megoldás

22.3. Házi Feladat. *Számoljuk ki az*

$$\begin{aligned} y &= x^2-4 \\ y &= 2x-1 \end{aligned}$$

görbék által közrezárt síkidom területét! megoldás

22.4. Házi Feladat. *Számoljuk ki az*

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{x} \\ y &= -x+3 \\ y &= 2x-2 \end{aligned}$$

görbék által közrezárt síkidomok területét! megoldás

22.5. Házi Feladat. *Számoljuk ki az*

$$\begin{aligned} y &= 3x^2-9 \\ y &= -3x^2+2x-1 \end{aligned}$$

görbék által közrezárt síkidom területét! megoldás

22.6. Házi Feladat. *Számoljuk ki az origó középpontú egységkör és az $y=-x^2+1$ egyenletű parabola által közrezárt síkidomok területét!* megoldás

22.7. Házi Feladat. *Legyen adott az*

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= t^2 \\ y(t) &= \sin t \end{aligned}\right\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel egy görbe. Számítsuk ki a görbe és az x-tengely által határolt síkidom területét $t_1=0$ és a $t_2=\frac{\pi}{2}$ határ-paraméterek esetén! megoldás

22.8. Házi Feladat. *Határozzuk meg az*

$$r(\varphi)=2\,(1+\cos\varphi)$$

polárkoordinátás egyenlettel adott kardioid területét! ($\varphi_1=0$ és $\varphi_2=2\pi$ polárszögek által határolt szektorszerű idom területeként érdemes számolni.) megoldás

22.9. Házi Feladat. *Számítsuk ki az $r=3$ sugarú negyedkör területét,*

a) szubgrafikon területeként,

b) paraméteresen adott görbe által bezárt területként,

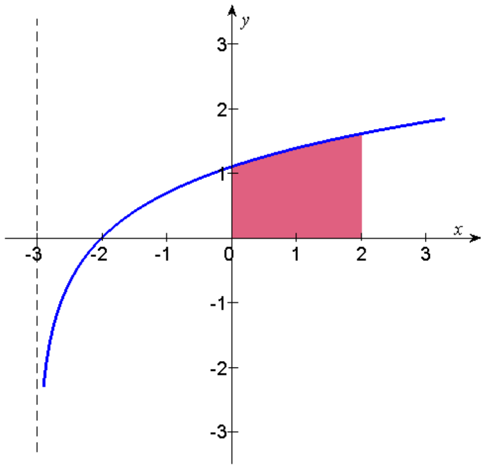
c) szektorszerű idom területeként. megoldás

22.3. Megoldások

22.1. Házi Feladat. *Számoljuk ki az $f(x)=\ln(x+3)$ függvény szubgrafikonjának területét a $[0,2]$ intervallumon!*

Megoldás.

Készítsünk ábrát!



A grafikon felrajzolása a feladat megoldásához nem feltétlenül szükséges, de az előjelvizsgálat során segítségünkre lehet.

Mivel f a $[0,2]$ intervallumon folytonos, ezért Riemann-integrálható. Továbbá minden $x\in[0,2]$ pontban $f(x)>0$, ezért a terület

$$T=\int_0^2 f(x)\ dx=\int_0^2 \ln(x+3)\ dx \ominus$$

primitív függvény keresése:

$$\int \ln(x+3)\ dx=\int 1\cdot\ln(x+3)\ dx = x\cdot\ln(x+3)-\int \frac{x}{x+3}\ dx=$$

$$\begin{array}{rclrcl} f(x) & = & \ln(x+3) & g'(x) & = & 1 \\ f'(x) & = & \frac{1}{x+3} & g(x) & = & x \end{array}$$

$$=x\cdot\ln(x+3)-\int \frac{x+3-3}{x+3}\ dx=$$

$$=x\cdot\ln(x+3)-\int 1-\frac{3}{x+3}\ dx=$$

$$=x\cdot\ln(x+3)-x+3\ln(x+3)+C.$$

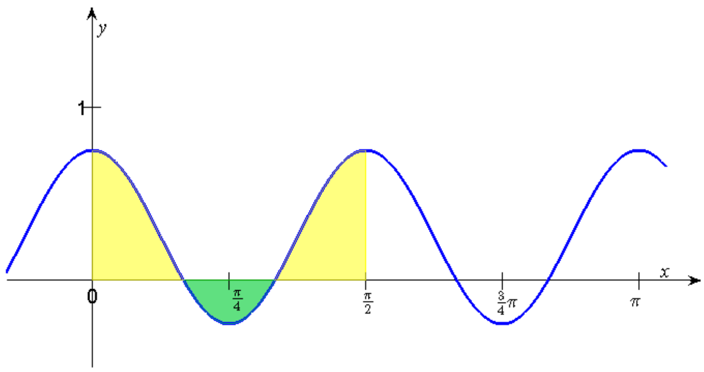
$$\ominus\Big[x\cdot\ln(x+3)-x+3\ln(x+3)\Big]_0^2=2\cdot\ln 5-2+3\cdot\ln 5-3\cdot\ln 3=5\cdot\ln 5-2-3\cdot\ln 3\approx 2{,}75.$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

22.2. Házi Feladat. *Számoljuk ki az $f(x)=\cos^2 2x-\frac{1}{4}$ függvény szubgrafikonjának területét a $[0,\frac{\pi}{2}]$ intervallumon!*

Megoldás.
A szemléltetés kedvéért most is felrajzoltuk a függvény grafikonját:



A grafikonról is látszik, hogy a függvény a szóban forgó intervallumon nem állandó előjelű, ezért megkeressük azokat a pontokat, ahol előjelet vált:

Zérushelyek:

$$\begin{aligned}\cos^2 2x &= \tfrac{1}{4}\\ \cos 2x &= \pm\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\cos 2x = \tfrac{1}{2}$$

$$\begin{array}{ccc} 2x_1 = \tfrac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}) & & 2x_2 = -\tfrac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \\ x_1 = \tfrac{\pi}{6}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}) & & x_2 = -\tfrac{\pi}{6}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{Csak } x_1=\tfrac{\pi}{6}\in[0,\ \tfrac{\pi}{2}] & & \text{Nincs } [0,\ \tfrac{\pi}{2}]\text{-beli eleme.} \end{array}$$

$$\cos 2x = -\tfrac{1}{2}$$

$$\begin{array}{ccc} 2x_3 = \tfrac{2}{3}\pi+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}) & & 2x_4 = -\tfrac{2}{3}\pi+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \\ x_3 = \tfrac{\pi}{3}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}) & & x_4 = -\tfrac{\pi}{3}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{Csak } x_3=\tfrac{\pi}{3}\in[0,\ \tfrac{\pi}{2}] & & \text{Nincs } [0,\ \tfrac{\pi}{2}]\text{-beli eleme.} \end{array}$$

Megvizsgálva a függvény előjelét az egyes részintervallumokon, azt kapjuk, hogy:

$$\begin{array}{lll} f(x) \geq 0 & & x\in[0,\ \tfrac{\pi}{6}] \\ f(x) \leq 0 & & x\in[\tfrac{\pi}{6},\ \tfrac{\pi}{3}] \\ f(x) \geq 0 & & x\in[\tfrac{\pi}{3},\ \tfrac{\pi}{2}] \end{array}$$

Így a terület

$$T=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 2x-\frac{1}{4}\ dx-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 2x-\frac{1}{4}\ dx+\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2x-\frac{1}{4}\ dx \ominus$$

Primitív függvény meghatározása:

$$\int\cos^2 2x-\frac{1}{4}\ dx=\int\frac{1+\cos 4x}{2}-\frac{1}{4}\ dx=\frac{1}{2}\int\cos 4x\ dx+\frac{1}{4}\int\ dx=\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}x+C.$$

$$\ominus\left[\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}-\left[\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}+\left[\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\frac{1}{8}\sin\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{24}-\frac{1}{8}\sin\frac{4}{3}\pi-\frac{\pi}{12}+\frac{1}{8}\sin\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{24}+\frac{1}{8}\sin 2\pi+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{8}\sin\frac{4}{3}\pi-\frac{\pi}{12}=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}2}{+}\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}2}{+}\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}2}{+}\frac{\pi}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}2}{-}\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}2}{+}\frac{\pi}{24}\approx 0{,}56.$$

◊

vissza a feladathoz

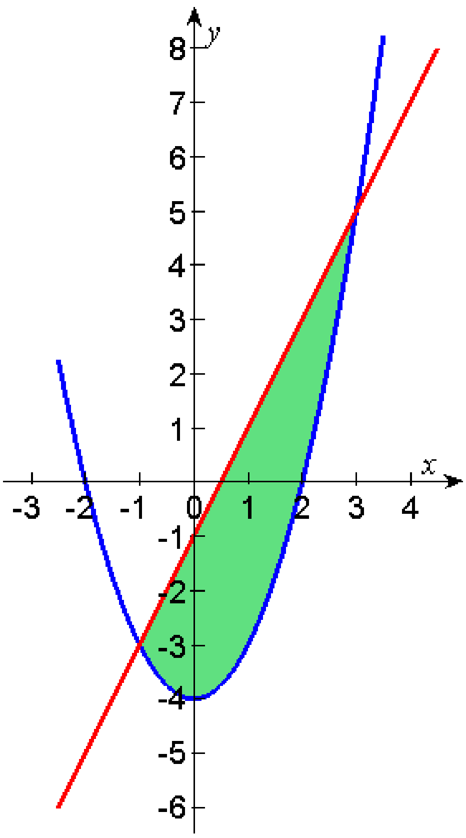
22.3. Házi Feladat. *Számoljuk ki az*

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4 \\ y &= 2x - 1 \end{aligned}$$

görbék által közrezárt síkidom területét!

Megoldás.

Készítsünk ábrát!



Metszéspontok meghatározása:
Olyan $P(x_0, y_0)$ pontokat keresünk, melyek koordinátái mind a parabola mind pedig az egyenes egyenletét kielégítik, azaz szeretnénk megoldani az

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - 4 \\ y &= 2x - 1 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. A baloldalak egyenlőségéből következik, hogy a kérdéses pont x koordinátájára:

$$x^2 - 4 = 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = (x-3)\cdot(x+1) = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai:

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 3.$$

A metszéspontok y koordinátája is egyszerűen meghatározható lenne, de a feladat megoldásához nincs rá szükség. Könnyen látható továbbá, hogy a két metszéspont között

$$f(x) := x^2 - 4 \leq 2x - 1 := g(x).$$

A terület tehát az alábbi formula alapján számolható:

$$T = \int_{-1}^{3} |f(x) - g(x)| \; dx = \int_{-1}^{3} -x^2 + 2x + 3 \; dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_{-1}^{3} = \frac{32}{3}.$$

◇

vissza a feladathoz

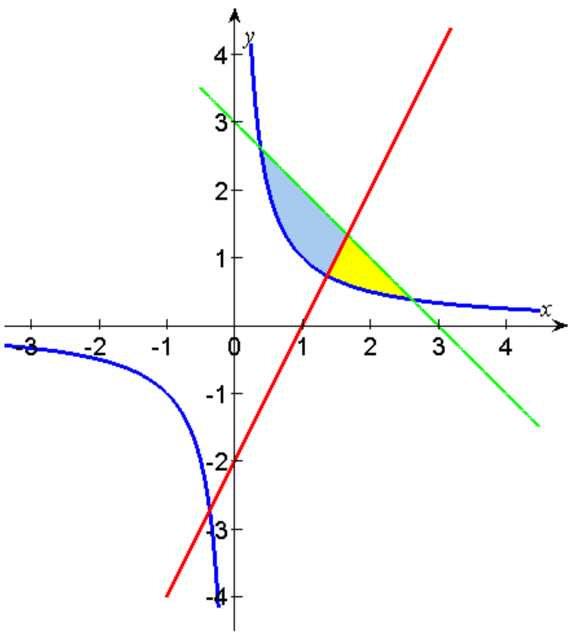
22.4. Házi Feladat. *Számoljuk ki az*

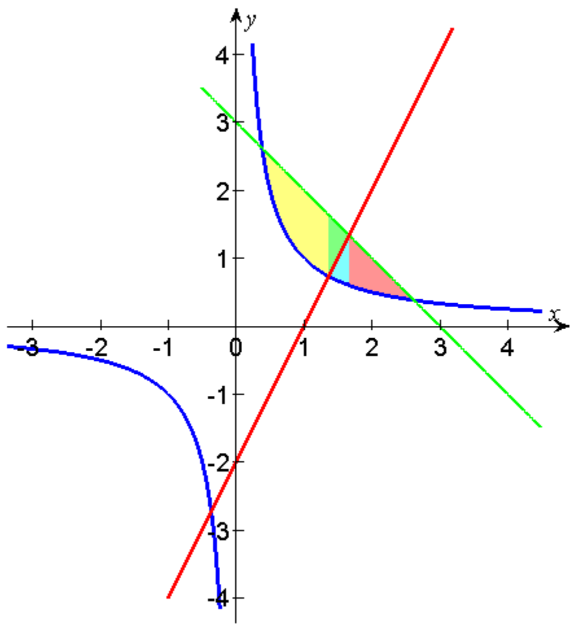
$$\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{x} \\ y &= -x + 3 \\ y &= 2x - 2 \end{aligned}$$

görbék által közrezárt síkidomok területét!

Megoldás.

Készítsünk ábrát!





Metszéspontok meghatározása:
Az $y = -x+3$ egyenes (zöld egyenes) és a hiperbola metszéspontjai kielégítik az:

$$\left.\begin{array}{rcl} y &=& -x+3 \\ y &=& \frac{1}{x} \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert. Ahonnan a baloldalak egyenlőségéből következik, hogy a kérdéses pontok x koordinátájára:

$$-x+3=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2-3x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Az $y = 2x-2$ egyenes (piros egyenes) és a hiperbola metszéspontjai kielégítik az:

$$\left.\begin{array}{rcl} y &=& 2x-2 \\ y &=& \frac{1}{x} \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert. Ahonnan a baloldalak egyenlőségéből következik, hogy a kérdéses pontok x koordinátájára:

$$2x-2=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad 2x^2-2x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Az $x_4 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ abszcisszájú metszéspont a hiperbola negatív ágán van. A síkidomok szempontjából ez a pont nem játszik szerepet.
A két egyenes metszéspontja kielégíti az:

$$\left.\begin{array}{rcl} y &=& -x+3 \\ y &=& 2x-2 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert, ahonnan

$$2x-2 = -x+3 \quad \Rightarrow \quad x_5 = \frac{5}{3}.$$

A felső ábrán kékkel jelölt síkidom területét, az alsó ábrán szemléltetett felbontás alapján fogjuk számolni:

Az $[x_1, x_3]$ intervallumon az $f(x) = -x+3$ és a $g(x) = \frac{1}{x}$ görbék alatti területek különbségeként kapható a részsíkidom területe. (Az intervallumon az f függvény van fölül.) Az $[x_3, x_5]$ intervallumon pedig az $f(x) = -x+3$ és a $h(x) = 2x-2$ görbék alatti területek különbségeként számolhatunk. (Itt is az f függvény van fölül.) Így a terület:

$$T_1 = \int_{x_1}^{x_3} f(x)-g(x)\,dx + \int_{x_3}^{x_5} f(x)-h(x)\,dx = \int_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{5}{3}} -x+3-\frac{1}{x}\,dx + \int_{\frac{5}{3}}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} -x+3-2x+2\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2+3x-\ln x\right]_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{5}{3}} + \left[-\frac{3}{2}x^2+5x\right]_{\frac{5}{3}}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \approx 0{,}95.$$

A másik síkidom területe hasonló indoklás után az alábbi formula alaján számolható:

$$T_2 = \int_{x_5}^{x_3} h(x)-g(x)\ dx + \int_{x_3}^{x_2} f(x)-g(x)\ dx = \int_{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}^{\frac{5}{3}} 2x-2-\frac{1}{x}\ dx + \int_{\frac{5}{3}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} -x+3-\frac{1}{x}\ dx =$$

$$= \left[x^2-2x-\ln x\right]_{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}^{\frac{5}{3}} + \left[-\frac{1}{2}x^2+3x-\ln x\right]_{\frac{5}{3}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \approx 0{,}48. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

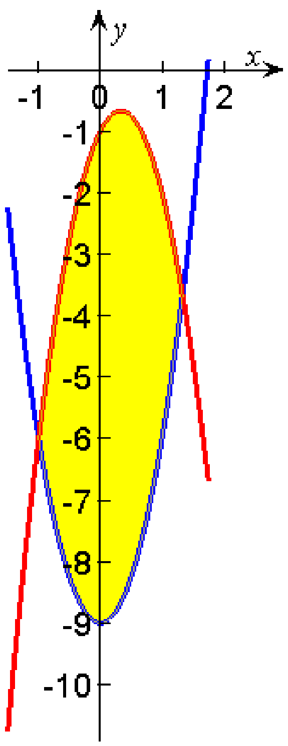
22.5. Házi Feladat. *Számoljuk ki az*

$$\begin{aligned} y &= 3x^2-9 \\ y &= -3x^2+2x-1 \end{aligned}$$

görbék által közrezárt síkidom területét!

Megoldás.

Készítsünk ábrát!



Metszéspontok meghatározása:
A két parabola metszéspontjai kielégíti az:

$$\left.\begin{aligned} y &= 3x^2-9 \\ y &= -3x^2+2x-1 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert, ahonnan

$$3x^2-9 = -3x^2+2x-1 \quad\Leftrightarrow\quad 3x^2-x-4=0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét használva:

$$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+48}}{6} = \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{4}{3}, \\ x_2 &= -1. \end{aligned}$$

A $[-1,\ \frac{4}{3}]$ intervallumon:

$$f(x) := 3x^2-9 \le -3x^2+2x-1 := g(x),$$

ezért a terület:

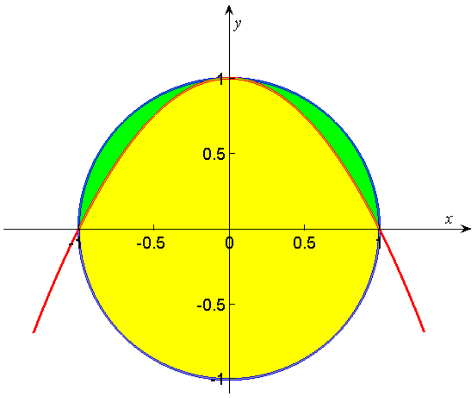
$$T = \int_{-1}^{\frac{4}{3}} g(x)-f(x)\ dx = \int_{-1}^{\frac{4}{3}} -6x^2+2x+8\ dx = \left[-2x^3+x^2+8x\right]_{-1}^{\frac{4}{3}} = \frac{343}{27} \approx 12{,}7. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

22.6. Házi Feladat. *Számoljuk ki az origó középpontú egységkör és az $y = -x^2 + 1$ egyenletű parabola által közrezárt síkidomok területét!*

Megoldás.

Készítsünk ábrát!



Metszéspontok meghatározása:
A két parabola metszéspontjai kielégíti az:

$$\left.\begin{aligned} y &= -x^2+1 \\ x^2+y^2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből $x^2=1-y$, ahonnan

$$y^2 - y = y\cdot(y-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 0,\ y_2 = 1.$$

Így a metszéspontok abszcisszái:
$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0.$

Szimmetriai okok miatt nyílvánvaló, hogy a két zölddel jelölt síkidom területe azonos, így elegendő a sárgával jelölt síkidom területét kiszámítani. A síkidom a parabola $[-1,\ 1]$ intervallum fölötti darabja és az alsó félkör által közrezárt terület:

$$T = \int\limits_{-1}^{1} 1 - x^2 - (-\sqrt{1-x^2})\ dx = \int\limits_{-1}^{1} 1 - x^2 + \sqrt{1-x^2}\ dx \ominus$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int 1 - x^2 + \sqrt{1-x^2}\ dx = x - \frac{1}{3}x^3 + \int \sqrt{1-x^2}\ dx = x - \frac{1}{3}x^3 + \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\ dt =$$

$$\begin{aligned} x &= \sin t \ \left(-\tfrac{\pi}{2} \le t \le \tfrac{\pi}{2}\right) \\ dx &= \cos t\ dt \end{aligned}$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t\ dt = x - \frac{1}{3}x^3 + \int |\cos t|\cdot\cos t\ dt =$$

$$-\tfrac{\pi}{2} \le u \le \tfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos u \ge 0$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \int \cos^2 t\ dt = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\int 1 + \cos 2t\ dt =$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin 2\arcsin x + C$$

$$\ominus \left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin 2\arcsin x\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} \approx 2{,}9.$$

A zöld síkidomok területe pedig:

$$T_2 = \frac{r^2\pi - T}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \approx 0{,}12.$$

◊

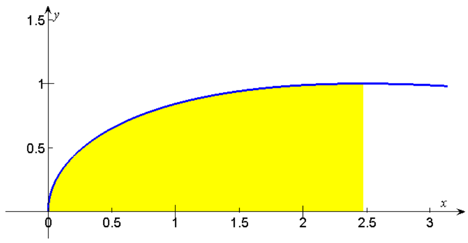
vissza a feladathoz

22.7. Házi Feladat. *Legyen adott az*

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t^2 \\ y(t) & = & \sin t \end{array}\right\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel egy görbe. Számítsuk ki a görbe és az x-tengely által határolt síkidom területét $t_1 = 0$ és a $t_2 = \frac{\pi}{2}$ határ-paraméterek esetén!

Megoldás.
Most is készíthetünk ábrát:



A paraméteresen adott görbe által határolt terület képletét felírva:

$$T = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot 2t\ dt \ominus$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int 2t \cdot \sin t\ dt = -2t\cos t + 2\int \cos t\ dt = -2t\cos t + 2\sin t + C.$$

$$\begin{array}{rclcrcl} f(t) & = & 2t & \quad & g'(t) & = & \sin t \\ f'(t) & = & 2 & \quad & g(t) & = & -\cos t \end{array}$$

$$\ominus \Big[-2t\cos t + 2\sin t \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 2.$$

◊

vissza a feladathoz

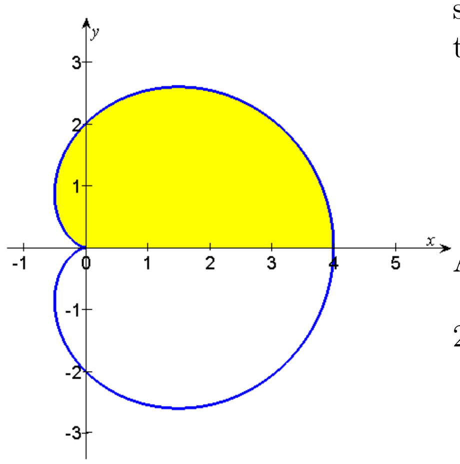
22.8. Házi Feladat. *Határozzuk meg az*

$$r(\varphi) = 2\,(1 + \cos\varphi)$$

polárkoordinátás egyenlettel adott kardioid területét! ($\varphi_1 = 0$ és $\varphi_2 = 2\pi$ polárszögek által határolt szektorszerű idom területeként érdemes számolni.)

Megoldás.

Készítsünk ábrát!



Szimmetriai okok miatt elegendő a satírozott területet kiszámítani, amely $\varphi_1 = 0$ és $\varphi_2 = \pi$ polárszögek közötti tartomány. Így a terület:

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\, d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi} 1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\, d\varphi \ominus$$

A primitív függvény meghatározása:

$$2\int 1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\, d\varphi = 2\varphi+4\sin\varphi+2\int \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2\varphi+4\sin\varphi+\int 1+\cos 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2\varphi+4\sin\varphi+\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi+C.$$

$$\ominus \left[2\varphi+4\sin\varphi+\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{\pi} = 3\pi.$$

Így a teljes kardioid területe $2T = 6\pi$. ♢

vissza a feladathoz

22.9. Házi Feladat. *Számítsuk ki az $r = 3$ sugarú negyedkör területét,*

a) szubgrafikon területeként,

b) paraméteresen adott görbe által bezárt területként,

c) szektorszerű idom területeként.

Megoldás.
Mindhárom részfeladathoz tekintsük az origó középpontú kör első síknegyedbe eső darabját!

a) A kör egyenlete $x^2+y^2 = 9$, ahonnan $y = \pm\sqrt{9-x^2}$. Az első síknegyedbe eső negyedkör a felső félkör $[0,\ 3]$ intervallum felletti darabjának szubgrafikonjaként kapható:

$$T = \int\limits_0^3 \sqrt{9-x^2}\, dx \ominus$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int \sqrt{9-x^2}\, dx = 3\int \sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\, dx = 3\int \sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}\, dx = 9\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\, dt =$$

$$\begin{aligned} \tfrac{x}{3} &= \sin t \ \left(-\tfrac{\pi}{2} \le t \le \tfrac{\pi}{2}\right) \\ \tfrac{1}{3}dx &= \cos t\ dt \end{aligned}$$

$$= 9\int \sqrt{\cos^2 t}\cdot\cos t\ dt \underset{-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \cos t\ge 0}{=} 9\int |\cos t|\cdot\cos t\ dt = 9\int \cos^2 t\ dt =$$

$$= \frac{9}{2}\int 1+\cos 2t\ dt = \frac{9}{2}t+\frac{9}{4}\sin 2t + C = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{4}\sin 2\arcsin\frac{x}{3}+C.$$

$$\ominus\ \left[\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{4}\sin 2\arcsin\frac{x}{3}\right]_0^3 = \frac{9}{2}\cdot\arcsin 1+\frac{9}{4}\sin 2\cdot\arcsin 1-\frac{9}{2}\arcsin 0-\frac{9}{4}\sin 2\arcsin 0 = \frac{9}{4}\pi.$$

b) A negyedkör paraméteres egyenlete:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& 3\cdot\cos t \\ y(t) &=& 3\cdot\sin t \end{array}\right\}\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$$

A paraméteresen adott görbe által határolt terület képletét felírva:

$$T = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)\ dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 3\sin t\cdot(-3\sin t)\ dt = -9\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\ dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\ dt =$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos 2t\ dt = \left[\frac{9}{2}t-\frac{9}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{4}\pi.$$

c) A negyedkör polárkoordinátás egyenlete:

$$r(\varphi)=3,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

A szektorszerű idom területképletébe behelyettesítve:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3^2\ d\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ d\varphi = \left[\frac{9}{2}\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{4}\pi.$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

23. fejezet

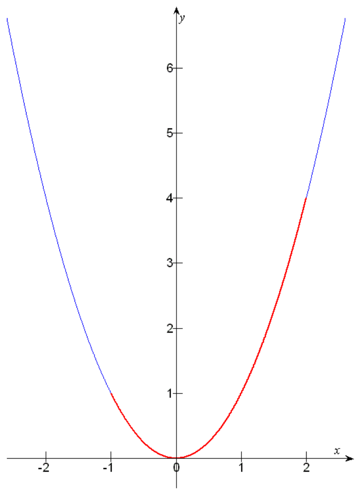
Integrálszámítás alkalmazásai II.

23.1. Gyakorlat

23.1. Feladat. *Számoljuk ki az $f(x)=x^2$ függvény ívhosszát az $x_1=-1$ és $x_2=2$ abszisszájú pontjai között!*

Megoldás.

Készítsünk ábrát!



Az ívhossz kiszámításához szükség lesz a függvény deriváltjára:

$$f'(x)=2x.$$

Mivel a függvény a vizsgált intervallumon differenciálható, ezért az ívhossza az alábbi formula alapján számolható:

$$s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_{-1}^{2}\sqrt{1+4x^2}\,dx =$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int\sqrt{1+4x^2}\,dx \;=\int\sqrt{1+(2x)^2}\,dx\;=\frac{1}{2}\int\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\,du=\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\,du=$$

$$2x=\operatorname{tg}u\;\left(-\tfrac{\pi}{2}<u<\tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$2dx=\tfrac{1}{\cos^2 u}\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{|\cos u|}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\,du=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^3 u}\,du\stackrel{*}{=}$$

$$-\tfrac{\pi}{2}<u<\tfrac{\pi}{2}\;\Rightarrow\;\cos u>0$$

Az $\int\frac{1}{\cos^3 u}\,du$ intergált korábban már kiszámoltuk (272. oldal.). Ez alapján

$$\stackrel{*}{=}-\frac{1}{8}\ln|1-\sin u|+\frac{1}{8}\ln|1+\sin u|+\frac{1}{8(1-\sin u)}-\frac{1}{8(1+\sin u)}+C=$$

$$=\frac{1}{8}\ln|1+\sin \operatorname{arctg}2x|-\frac{1}{8}\ln|1-\sin \operatorname{arctg}2x|+\frac{1}{8(1-\sin \operatorname{arctg}2x)}-\frac{1}{8(1+\sin \operatorname{arctg}2x)}+C.$$

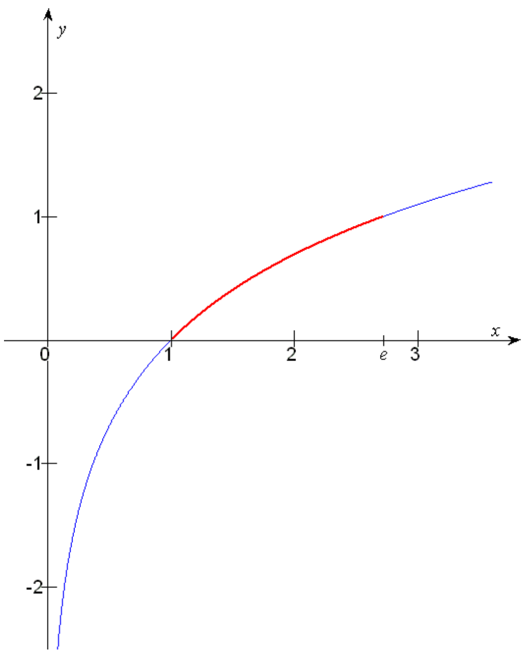
Visszaírva az ívhosszképletbe:

$$\ominus \left[\frac{1}{8}\ln|1+\sin \operatorname{arctg}2x|-\frac{1}{8}\ln|1-\sin \operatorname{arctg}2x|+\frac{1}{8(1-\sin \operatorname{arctg}2x)}-\frac{1}{8(1+\sin \operatorname{arctg}2x)}\right]_{-1}^{2}\approx 6{,}13.\diamondsuit$$

23.2. Feladat. *Számoljuk ki az $f(x)=\ln x$ függvény ívhosszát az $x_1=1$ és $x_2=e$ abszisszájú pontjai között!*

Megoldás.

Készítsünk ábrát!



Az ívhossz kiszámításához szükség lesz a függvény deriváltjára:

$$f'(x)=\frac{1}{x}.$$

Mivel a függvény a vizsgált intervallumon differenciálható, ezért az ívhossza az alábbi formula alapján számolható:

$$s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_1^e\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=$$

$$=\underbrace{\int_1^e\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx=\int_1^e\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx}_{x\in[1,e]\Rightarrow\ x>0}\ominus$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\cdot t\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt=\int\frac{t^2}{t^2-1}\,dt=\int 1+\frac{1}{t^2-1}\,dt=$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{x^2+1}\\ \sqrt{t^2-1} &= x\\ \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt &= dx \end{aligned}$$

$$=\int 1+\frac{1}{(t-1)\cdot(t+1)}\,dt=t+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t-1}\,dt-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t+1}\,dt=$$

$$=t+\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t+1|+C=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+C.$$

Visszaírva az ívhosszképletbe:

$$\ominus\left[\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x^2+1}-1)-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x^2+1}+1)\right]_1^e\approx 2.$$

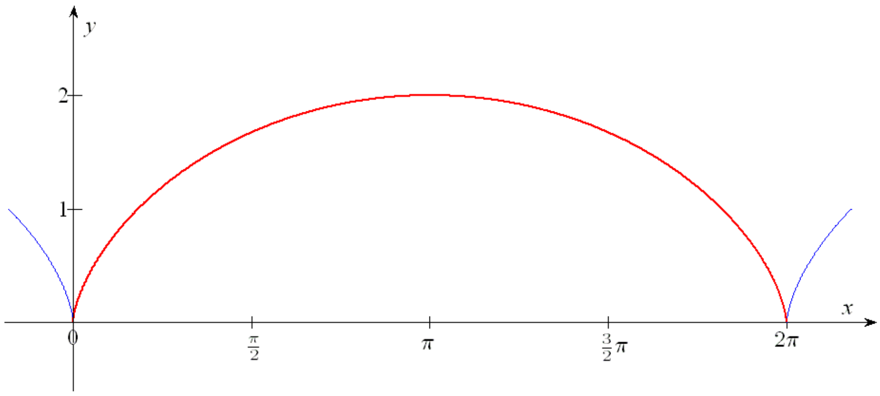
$\diamondsuit$

23.3. Feladat. *Számoljuk ki az*

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t-\sin t \\ y(t) & = & 1-\cos t \end{array}\right\} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott ciklois ívhosszát!

Megoldás.
A szemléltetés kedvéért most is készíthetünk ábrát!



A paraméteresen adott rektifikálható görbe ívhossza:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Ehhez szükségünk lesz a koordinátafüggvények deriváltjára:

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 1-\cos t \\ y'(t) & = & \sin t \end{array}\right\} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Így az ívhossz:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1-2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\, dt \ominus$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int \sqrt{2-2\cos t}\, dt = 2\int \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\, dt = 2\int \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 2\int \underbrace{\left|\sin \frac{t}{2}\right|}_{\substack{t\in[0,2\pi] \;\Rightarrow\; \frac{t}{2}\in[0,\pi] \\ \Downarrow \\ \sin\frac{t}{2}\geq 0}} dt =$$

$$= 2\int \sin \frac{t}{2}\, dt = -4\cos \frac{t}{2} + C$$

Visszaírva az ívhosszképletbe:

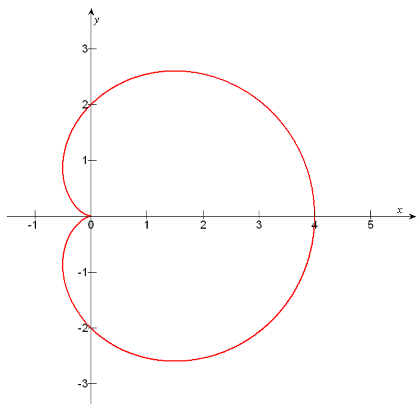
$$\ominus \left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = -4\cos\pi + 4\cos 0 = 8.$$

◊

23.4. Feladat. *Számoljuk ki az $r(\varphi)=2\cdot(1+\cos\varphi)$ polárkoordinátás egyenlettel adott kardioid ívhosszát ($\varphi_1=0$ és $\varphi_2=2\pi$)!*

Megoldás.

A szemléltetés kedvéért most is készíthetünk ábrát!



A polárkoordinátásan adott rektifikálható görbe ívhossza:

$$s=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

Ehhez $r'(\varphi)=-2\sin\varphi$. Így az ívhossz:

$$s=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{4(1+\cos\varphi)^2+4\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=4\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}\,d\varphi=4\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=4\int\limits_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|\,d\varphi=$$

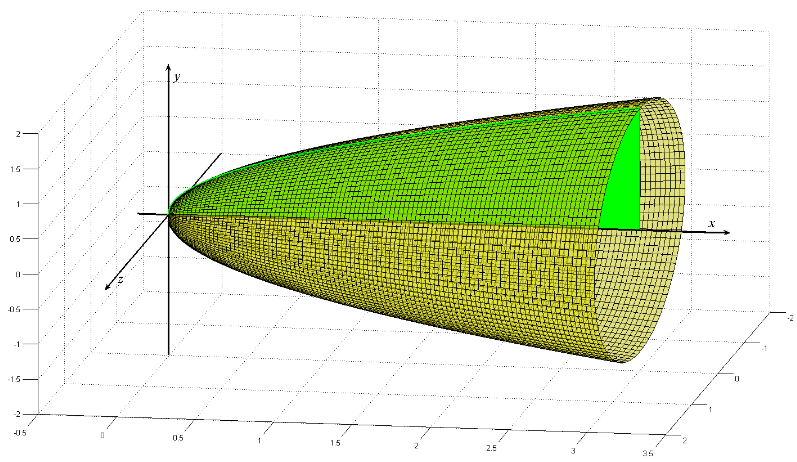
$$=\underbrace{4\int\limits_0^{\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|\,d\varphi}_{\substack{\varphi\in[0,\pi]\ \Rightarrow\ \frac{\varphi}{2}\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ \Downarrow\\ \cos\frac{\varphi}{2}\geq 0}}+\underbrace{4\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|\,d\varphi}_{\substack{\varphi\in[\pi,2\pi]\ \Rightarrow\ \frac{\varphi}{2}\in[\frac{\pi}{2},\pi]\\ \Downarrow\\ \cos\frac{\varphi}{2}\leq 0}}=4\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi-4\int\limits_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=\left[8\sin\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi}-\left[8\sin\frac{\varphi}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}=8\sin\frac{\pi}{2}-8\sin 0-8\sin\pi+8\sin\frac{\pi}{2}=16.$$

◊

23.5. Feladat. *Forgassuk meg az $f(x)=\sqrt{x}$ függvény grafikonjának $[0,\ 3]$ intervallum fölé eső darabját az x-tengely körül! Számítsuk ki a kapott forgástest térfogatát!*

Megoldás.
A szemléltetés kedvéért most is készíthetünk ábrát!



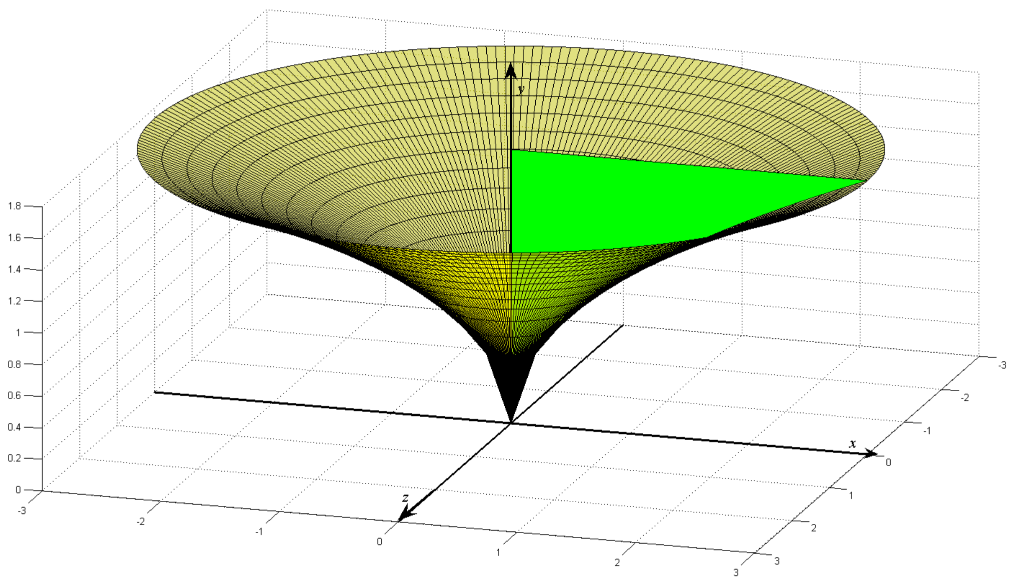
A forgástest térfogatképletét felírva:

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\ dx = \pi \cdot \int_0^3 x\ dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{9}{2}\pi.$$

◊

23.6. Feladat. *Forgassuk meg az előző függvény grafikonját az y-tengely körül! Számítsuk ki a kapott forgástest térfogatát!*

Megoldás.
A szemléltetés kedvéért most is készíthetünk ábrát!



A térfogat kiszámításához a függvény $\overline{f}$ inverzét fogjuk használni:

$$\overline{f}(y) = x = y^2.$$

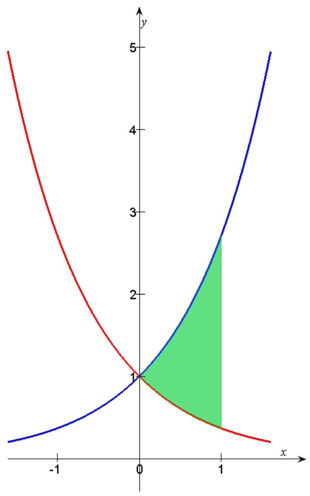
A görbedarab végpontjainak ordinátái: $y_1 = \sqrt{x_1} = 0$ és $y_2 = \sqrt{x_2} = \sqrt{3}$. Ekkor a térfogat az alábbi formula alapján számolható:

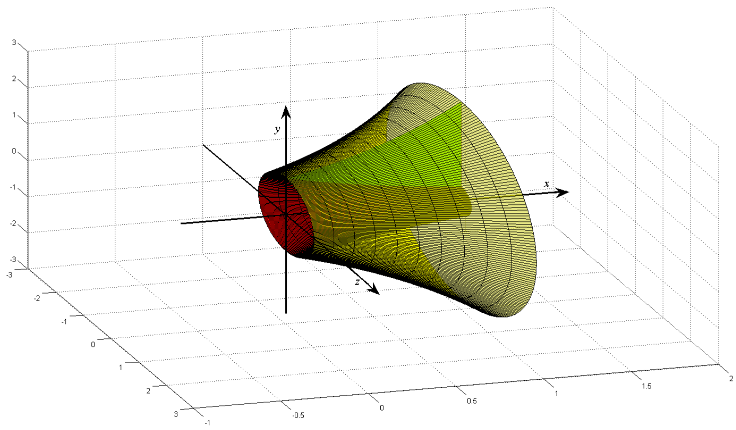
$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} \overline{f}^2(y)\ dy = \pi \cdot \int_0^{\sqrt{3}} y^4\ dy = \pi \cdot \left[\frac{y^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{9}{5}\sqrt{3}\pi.$$

◊

23.7. Feladat. *Legyen $f(x) = e^x$ és $g(x) = e^{-x}$! Határozzuk meg a két görbe és az $x = 1$ egyenes által közrezárt terület x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogatát!*

Megoldás.
Készítsünk ábrát!





A kérdéses térfogatot két forgástest térfogatának különbségeként kaphatjuk.

Az $f(x) = e^x$ függvény $[0,\ 1]$ intervallum fölé eső darabjának x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogata:

$$V_1 = \pi \cdot \int\limits_{x_1}^{x_2} f^2(x)\ dx = \pi \cdot \int\limits_0^1 e^{2x}\ dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}e^2 - \frac{\pi}{2}.$$

Az $g(x) = e^{-x}$ függvény $[0,\ 1]$ intervallum fölé eső darabjának x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogata:

$$V_2 = \pi \cdot \int\limits_{x_1}^{x_2} g^2(x)\ dx = \pi \cdot \int\limits_0^1 e^{-2x}\ dx = \pi \cdot \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{\pi}{2e^2} + \frac{\pi}{2}.$$

Így a keresett test térfogata:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2}e^2 - \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2e^2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}e^2 + \frac{\pi}{2e^2} - \pi.$$

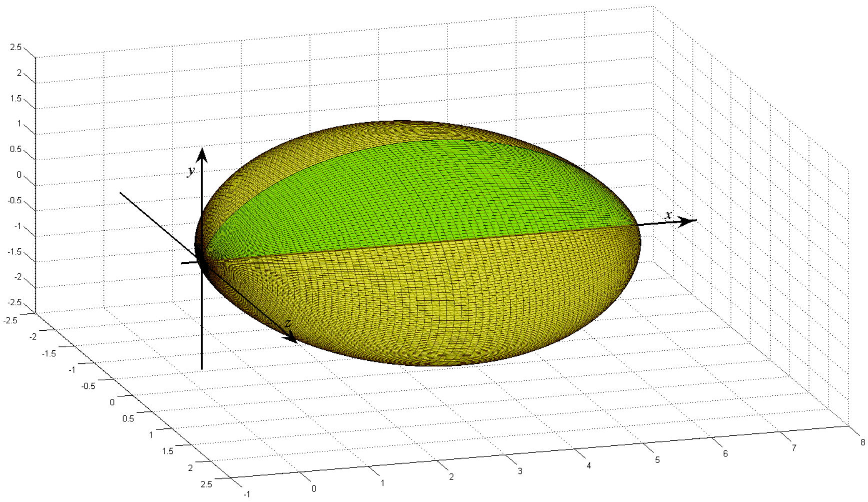
◊

23.8. Feladat. *Számoljuk ki az*

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t - \sin t \\ y(t) & = & 1 - \cos t \end{array}\right\} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott ciklois x-tengely körüli forgatásával nyert forgástest térfogatát!

Megoldás.
A szemléltetés kedvéért most is készíthetünk ábrát!



Paraméteresen adott görbe x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogatát az alábbi formula alapján számolhatjuk:

$$V_x = \pi \cdot \int\limits_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot x'(t) \; dt.$$

Ehhez $x'(t) = 1 - \cos t$, így

$$V_x = \pi \cdot \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \cdot (1-\cos t) \; dt = \pi \cdot \int\limits_0^{2\pi} 1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t \; dt =$$

Primitív függvények meghatározása:

$$\int \cos t \; dt = \sin t + C$$

$$\int \cos^2 t \; dt = \frac{1}{2} \int 1 + \cos 2t \; dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + C$$

$$\int \cos^3 t \; dt = \int \cos^2 t \cdot \cos t \; dt = \int (1-\sin^2 t) \cdot \cos t \; dt = \int 1 - u^2 \; du = u - \frac{1}{3} u^3 + C =$$

$$\begin{aligned} u &= \sin t \\ du &= \cos t \; dt \end{aligned}$$

$$= \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t + C.$$

Visszaírva a térfogatképletbe:

$$= \pi \cdot \left[-4 \sin t + \frac{5}{2} \cdot t + \frac{3}{4} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right]_0^{2\pi} = 5\pi^2.$$

$\diamondsuit$

23.2. Házi Feladatok

23.1. Házi Feladat. *Számoljuk ki az $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ függvény grafikonjának ívhosszát a $[2,\ 4]$ intervallumon!*
megoldás

23.2. Házi Feladat. *Számoljuk ki az*

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos^3 t \\ y(t) & = & \sin^3 t \end{array}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott csillaggörbe (asztrois) ívhosszát!
megoldás

23.3. Házi Feladat. *Határozzuk meg az $r(\varphi) = e^{-\varphi}$ polárkoordinátákkal adott görbe (logaritmikus spirál) ívhosszát a $\varphi_1 = 0$ és $\varphi_2 = 2\pi$ polárszögek között!*
megoldás

23.4. Házi Feladat. *Számítsuk ki az $r = 3$ sugarú kör kerületét,*

a) $y = f(x)$ görbe ívhosszaként,

b) paraméteresen adott görbe ívhosszaként,

c) polárkoordinátákkal adott görbe ívhosszaként.
megoldás

23.5. Házi Feladat. *Vezessük le forgástest térfogataként az r sugarú, m magasságú egyenes körkúp térfogatát!*
megoldás

23.6. Házi Feladat. *Számítsuk ki a $f(x) = \sin x$ függvény $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ intervallumra eső darabjának x illetve y-tengely körüli megforgatásával kapott forgástestek térfogatát.*
megoldás

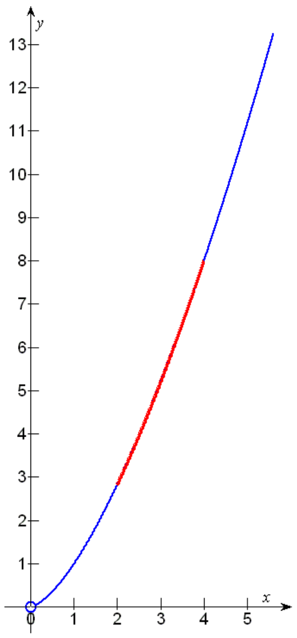
23.7. Házi Feladat. *Forgassuk meg a $C(2;1)$ középpontú, $r = 1$ sugarú kört az x, illetve az y-tengely körül! Számoljuk ki a kapott forgástestek térfogatát! Oljuk meg a feladatot kétféleképpen is.*
megoldás

23.3. Megoldások

23.1. Házi Feladat. *Számoljuk ki az $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ függvény grafikonjának ívhosszát a* $[2,\ 4]$ *intervallumon!*

Megoldás.

Készítsünk ábrát!



Az ívhossz kiszámításához szükség lesz a függvény deriváltjára:

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Mivel a függvény a vizsgált intervallumon differenciálható, ezért az ívhossza az alábbi formula alapján számolható:

$$s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_2^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx \ominus$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\int\sqrt{t}\,dt=\frac{4}{9}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}+C.$$

$$\begin{aligned} t &= 1+\tfrac{9}{4}x \\ dt &= \tfrac{9}{4}\,dx \end{aligned}$$

Visszaírva az ívhosszképletbe:

$$\ominus\left[\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_2^4=\frac{8}{27}\sqrt{10^3}-\frac{8}{27}\cdot\left(\frac{11}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\approx 5{,}55.$$

vissza a feladathoz ♢

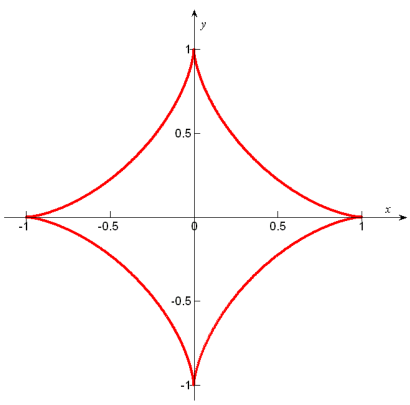
23.2. Házi Feladat. *Számoljuk ki az*

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \cos^3 t \\ y(t) &= \sin^3 t \end{aligned}\right\}\quad 0\le t\le 2\pi.$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott csillaggörbe (asztrois) ívhosszát!

Megoldás.

Készítsünk ábrát!



A paraméteres egyenletrendszer alapján:

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= -3\cos^2 t\cdot\sin t \\ y'(t) &= 3\sin^3 t\cdot\cos t \end{aligned}\right\}\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Szimmetriai okok miatt elegendő a $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ paramétertartományba eső görbedarab ívhosszát kiszámolni, hiszen ez éppen a negyede az asztrois teljes kerületének.

Így az ívhossz:

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9\cos^4 t\cdot\sin^2 t+9\cos^2 t\cdot\sin^4 t}\;dt=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t\cdot\sin^2 t\cdot(\cos^2 t+\sin^2 t)}\;dt=$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{|\cos t\cdot\sin t|}_{0\le t\le\frac{\pi}{2}\;\Rightarrow\;\cos t,\ \sin t\ge 0}\cdot\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\;dt=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\sin t\;dt\circledequal$$

A primitív függvény meghatározása:

$$12\int\cos t\cdot\sin t\;dt\underset{\substack{u\,=\,\sin t\\ du\,=\,\cos t\;dt}}{=}12\int u\;du=6u^2+C=6\sin^2 t+C.$$

Visszaírva az ívhosszképletbe:

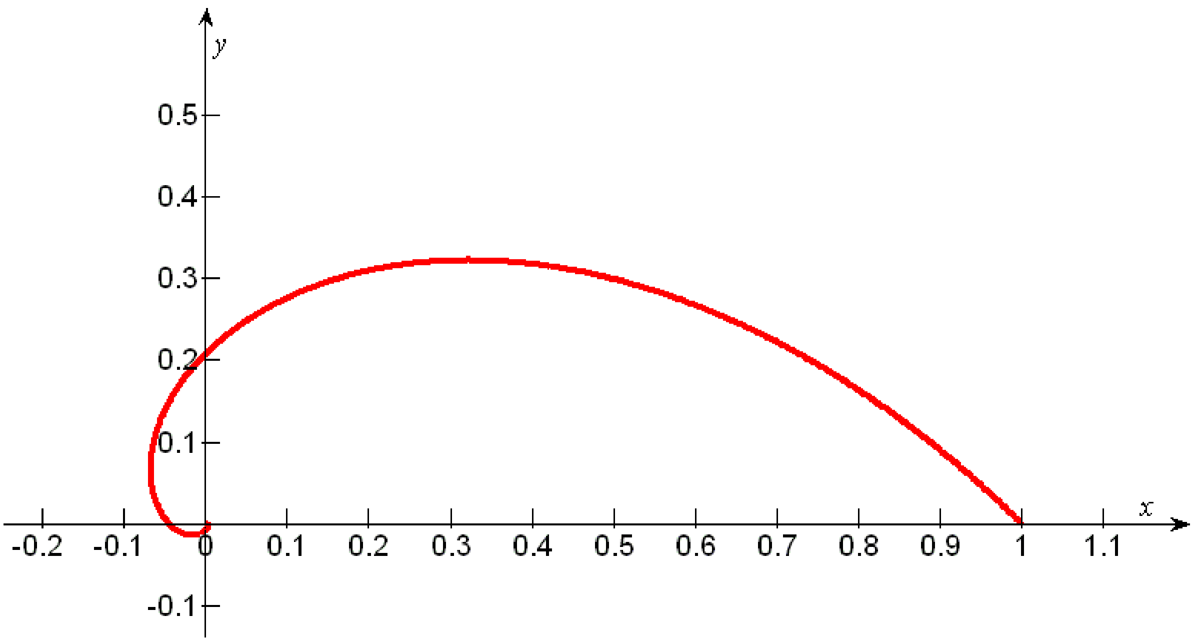
$$\circledequal\left[6\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=6.$$

◊

vissza a feladathoz

23.3. Házi Feladat. *Határozzuk meg az* $r(\varphi)=e^{-\varphi}$ *polárkoordinátákkal adott görbe (logaritmikus spirál) ívhosszát a* $\varphi_1=0$ *és* $\varphi_2=2\pi$ *polárszögek között!*

Megoldás.
A szemléltetés kedvéért most is készíthetünk ábrát!



Az ívhossz felírásához: $r'(\varphi)=-e^{-\varphi}$, így

$$s=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\;d\varphi=\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{-2\varphi}+e^{-2\varphi}}\;d\varphi=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{-2\varphi}}\;d\varphi=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\underbrace{\sqrt{\left(e^{-\varphi}\right)^2}}_{e^{-\varphi}\ge 0,\ \forall\varphi\in\mathbb{R}}\;d\varphi=$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} e^{-\varphi}\, d\varphi = \left[-\sqrt{2} e^{-\varphi} \right]_0^{2\pi} = \sqrt{2} - \sqrt{2} e^{-2\pi} \approx 1{,}41. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

23.4. Házi Feladat. *Számítsuk ki az $r = 3$ sugarú kör kerületét,*

a) $y = f(x)$ görbe ívhosszaként,

b) paraméteresen adott görbe ívhosszaként,

c) polárkoordinátákkal adott görbe ívhosszaként.

Megoldás.
Mindhárom esetben az origó középpontú első síknegyedbe eső negyedkörív hosszát fogjuk kiszámolni. A kör kerülete nyilvánvalóan a kapott ívhossz négyszerese.

a) Az első síknegyedbe $y = \sqrt{9 - x^2}$ felső félkör $0 \le x \le 3$ darabja esik.

Mivel $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$ és f a $[0,\ 3)$ intervallumon differenciálható, ezért a kerület az alábbi improprius integrállal számolható:

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{3-\varepsilon} \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{3-\varepsilon} \sqrt{\frac{9}{9 - x^2}}\, dx = 3 \cdot \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx \ominus$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}}\, dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt =$$

$$\begin{aligned} t &= \tfrac{x}{3} \\ dt &= \tfrac{1}{3}\, dx \end{aligned}$$

$$= \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{3} + C.$$

Visszaírva az ívhosszképletbe:

$$\ominus 3 \cdot \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[\arcsin \frac{x}{3} \right]_0^{3-\varepsilon} = 3 \cdot \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\arcsin \frac{3 - \varepsilon}{3} - \arcsin 0 \right) = 3 \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Így a teljes kör kerülete $K = 4 \cdot s = 6\pi$.

b) A negyedkör paraméteres egyenlete:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 3 \cdot \cos t \\ y(t) &= 3 \cdot \sin t \end{aligned} \right\} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

ahonnan

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= -3 \cdot \sin t \\ y'(t) &= 3 \cdot \cos t \end{aligned} \right\} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Felírva a paraméteresen adott görbe ívhosszának képletét:

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9\sin^2 t+9\cos^2 t}\,dt=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt=$$
$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dt=3\Big[\,t\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}\pi.$$

Így a teljes kör kerülete $K=4\cdot s=6\pi$.

c) A negyedkör polárkoordinátás egyenlete:

$$r(\varphi)=3,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

Ekkor $r'(\varphi)=0$. Felírva a polárkoordinátásan adott görbe ívhosszára vonatkozó összefüggést:

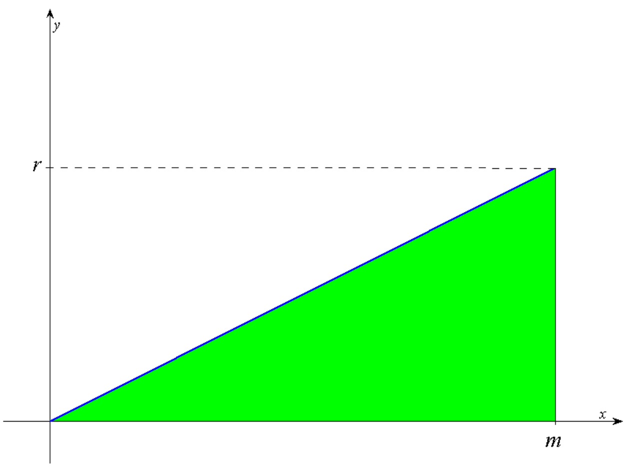
$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9}\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\,d\varphi=\frac{3}{2}\pi.$$

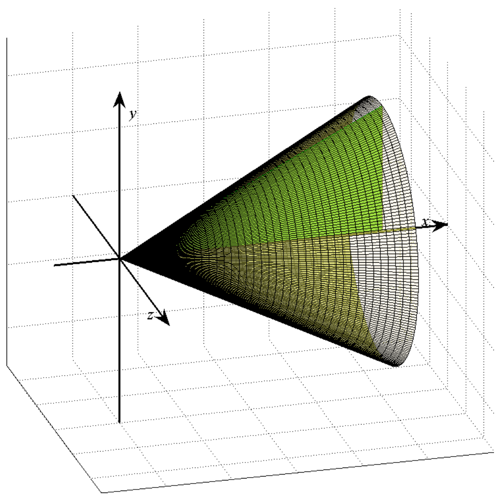
Így a teljes kör kerülete $K=4\cdot s=6\pi$. ♢

vissza a feladathoz

23.5. Házi Feladat. *Vezessük le forgástest térfogataként az r sugarú, m magasságú egyenes körkúp térfogatát!*

Megoldás.
A körkúp egy, az origón átmenő egyenes szakasz megforgatásával kapható:





Az egyenes meredeksége a baloldali ábráról könnyen leolvasható: $\mu=\frac{r}{m}$. Az egyenes egyenlete tehát $y=\mu\cdot x$. Így a térfogat

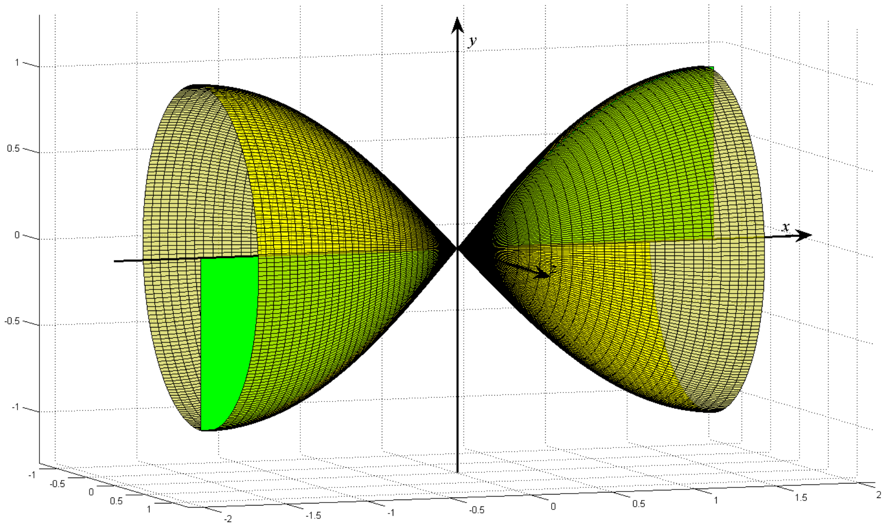
$$V=\pi\int_0^m(\mu\cdot x)^2\,dx=\pi\int_0^m\mu^2\cdot x^2\,dx=\pi\left[\frac{r^2}{3m^2}x^3\right]_0^m=\frac{r^2\cdot\pi\cdot m}{3}.$$

♢

vissza a feladathoz

23.6. Házi Feladat. *Számítsuk ki a $f(x) = \sin x$ függvény $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ intervallumra eső darabjának x illetve y-tengely körüli megforgatásával kapott forgástestek térfogatát.*

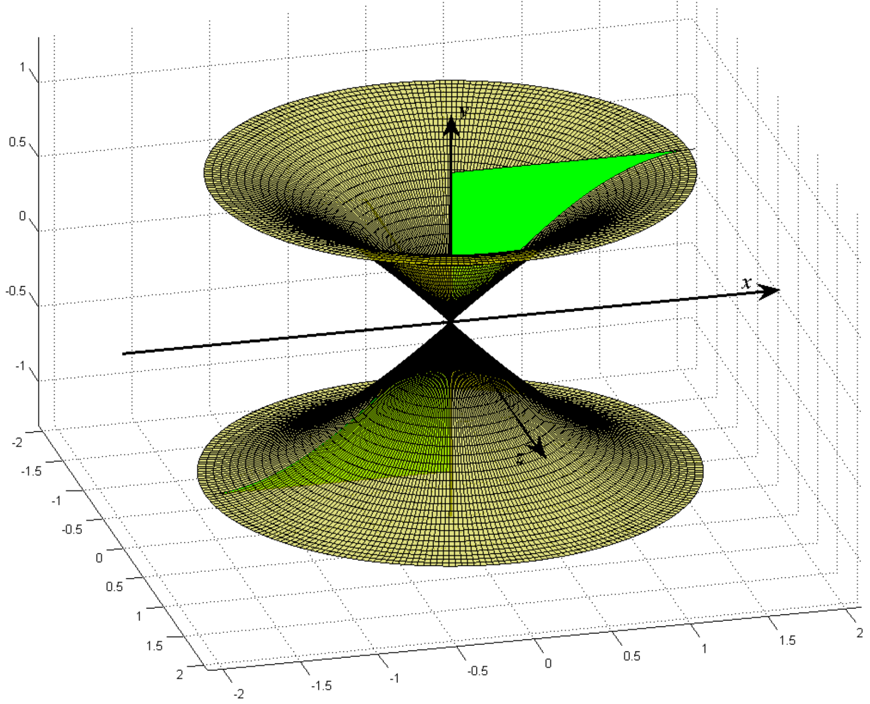
Megoldás.
Először forgassuk meg a függvény grafikonját az x-tengely körül! A szemléltetés kedvéért most is készíthetünk ábrát!



Szimmetriai okokból elegendő a függvény $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ intervallumra eső darabjának megforgatotjával foglalkozni, hiszen az így kapott test térfogata éppen fele a teljes forgástest térfogatának.

$$V_x = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\ dx = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2x\ dx = \pi \cdot \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Az y-tengely körüli forgatással származtatott forgástest esetén is kihasználható a szimmetria, ami az alábbi ábrán is látható.



A térfogat kiszámításához szükségünk van a függvény inverzére:

$$\overline{f}(y) = \arcsin y \quad y_1 = \sin 0, \ y_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Így a térfogat:

$$V_y = 2\pi \cdot \int_0^1 \arcsin^2 y \ dy$$ ⊜

A primitív függvény meghatározása:

$$\int \arcsin^2 y \ dy = \int t^2 \cdot \cos t \ dt = t^2 \cdot \sin t - \int 2t \cdot \sin t \ dt = t^2 \cdot \sin t + 2t \cos t - \int 2 \cos t \ dt =$$

$$\begin{array}{rcl} \arcsin y & = & t, \ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y & = & \sin t \\ dy & = & \cos t \ dt \end{array} \quad \begin{array}{rcl} f(t) & = & t^2 \\ f'(t) & = & 2t \end{array} \quad \begin{array}{rcl} g'(t) & = & \cos t \\ g(t) & = & \sin t \end{array} \quad \begin{array}{rcl} f(t) & = & 2t \\ f'(t) & = & 2 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} g'(t) & = & \sin t \\ g(t) & = & -\cos t \end{array}$$

$$= t^2 \cdot \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t + C = y \cdot \arcsin^2 y + 2 \arcsin y \cdot \cos \arcsin y - 2y + C.$$

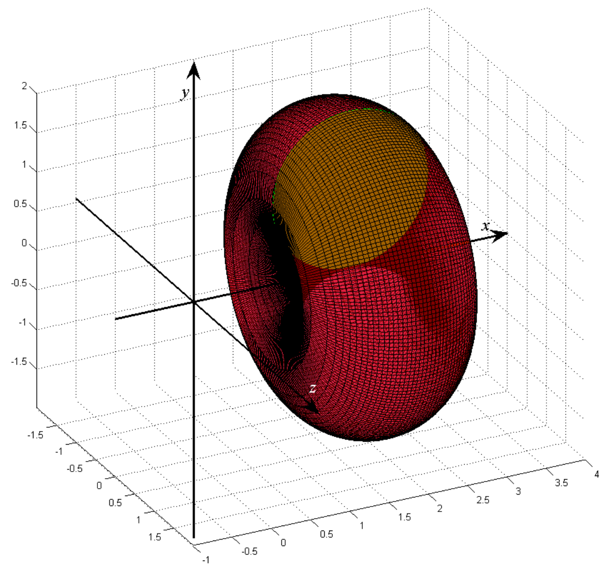
Visszaírva a térfogatképletbe:

⊜ $$2\pi \cdot \Big[y \cdot \arcsin^2 y + 2 \arcsin y \cdot \cos \arcsin y - 2y \Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4} - \pi = \frac{\pi^3}{8} - \pi \approx 0{,}73.$$ ♢

vissza a feladathoz

23.7. Házi Feladat. *Forgassuk meg a $C(2;1)$ középpontú, $r = 1$ sugarú kört az x, illetve az y-tengely körül! Számoljuk ki a kapott forgástestek térfogatát!*

Megoldás.
A kör x-tengely körüli forgatásával az alábbi ábrán látható forgástest kapható:



1. Megoldás:

A forgástest térfogata két test térfogatának különbségeként kapható. Legyen f az említett kör felső félköre, g pedig az alsó félkör, azaz

$$f(x) = 1 + \sqrt{1 - (x-2)^2}$$

és

$$g(x) = 1 - \sqrt{1 - (x-2)^2},$$

ahol $1 \leq x \leq 3$.
Így a forgástest térfogata:

$$V_x = \pi \cdot \int_1^3 f^2(x) \ dx - \pi \cdot \int_1^3 g^2(x) \ dx =$$

$$= \pi \cdot \int_1^3 f^2(x) - g^2(x)\ dx = \pi \cdot \int_1^3 \left(1+\sqrt{1-(x-2)^2}\right)^2 - \left(1-\sqrt{1-(x-2)^2}\right)^2\ dx =$$

$$= \pi \cdot \int_1^3 1 + 2\sqrt{1-(x-2)^2} + 1 - (x-2)^2 - 1 + 2\sqrt{1-(x-2)^2} - 1 + (x-2)^2\ dx =$$

$$= \pi \cdot \int_1^3 4\sqrt{1-(x-2)^2}\ dx = 4\pi \cdot \int_1^3 \sqrt{1-(x-2)^2}\ dx$$ ⊜

A primitív függvény meghatározása:

$$\int \sqrt{1-(x-2)^2}\ dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\ dt = \int \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t\ dt = \int |\cos t| \cdot \cos t\ dt =$$

$x-2 = \sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\qquad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ \cos u \ge 0$

$dx = \cos t\ dt$

$$= \int \cos^2 t\ dt = \frac{1}{2}\int 1 + \cos 2t\ dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(x-2) + \frac{1}{4}\sin 2\arcsin(x-2) + C.$$

Visszaírva a térfogatképletbe:

⊜ $$4\pi \cdot \left[\frac{1}{2}\arcsin(x-2) + \frac{1}{4}\sin 2\arcsin(x-2)\right]_1^3 = 2\pi^2.$$

2. Megoldás:

Kiindulhatunk a kör paraméteres egyenletrendszeréből is. Fontos azonban szemelőtt tartanunk, hogy a paraméteresen adott görbe megforgatásával nyert forgástest térfogatképlete csak akkor alkalmazható, hogyha a vizsgált paramétertartományban $x'(t) \neq 0$. Ez akkor biztosítható, ha most is külön kezeljük az alsó és a felső félkört. A felső félkör paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 2 + \cos t \\ y(t) &= 1 + \sin t \end{aligned}\right\} \quad 0 < t < \pi.$$

Így a felső félkör megforgatásával nyert forgástest térfogata:

$$V_x^f = \pi \cdot \int_\pi^0 y^2(t) \cdot x'(t)\ dt.$$

Ehhez $x'(t) = -\sin t$, így

$$V_x^f = \pi \cdot \int_\pi^0 (1+\sin t)^2 \cdot (-\sin t)\ dt = -\pi \cdot \int_{2\pi}^0 \sin t + 2\sin^2 t + \sin^3 t\ dt$$ ⊜

Primitív függvények meghatározása:

$$\int \sin t\ dt = -\cos t + C$$

$$\int 2\sin^2 t\ dt = \int 1-\cos 2t\ dt = t-\frac{1}{2}\sin 2t + C$$

$$\int \sin^3 t\ dt = \int \sin^2 t\cdot \sin t\ dt = \int (1-\cos^2 t)\cdot \sin t\ dt = \int u^2-1\ du = \frac{1}{3}u^3-u+C =$$

$$\begin{array}{rcl} u & = & \cos t \\ du & = & -\sin t\ dt \end{array}$$

$$= \frac{1}{3}\cos^3 t - \cos t + C.$$

Visszaírva a térfogatképletbe:

$$\circeq -\pi\cdot\left[-2\cos t + t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_{\pi}^{0} = \frac{10}{3}\pi+\pi^2.$$

Az alsó félkör paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2+\cos t \\ y(t) & = & 1+\sin t \end{array}\right\} \quad \pi < t < 2\pi.$$

Az alsó félkör megforgatásával kapott forgástest térfogata az előzőekhez hasonlóan számolható:

$$V_x^a = \pi\cdot\int_{\pi}^{2\pi}(1+\sin t)^2\cdot(-\sin t)\ dt \circeq$$

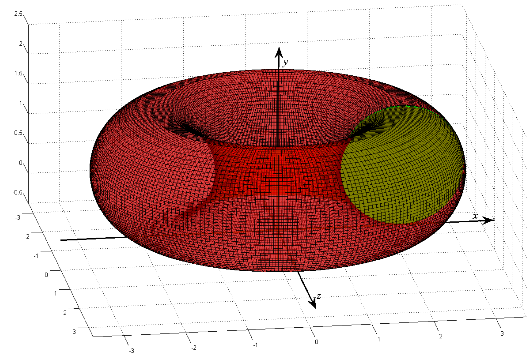
Nyilvánvaló, hogy a primitív függvények az előzőekkel megegyeznek, így

$$\circeq -\pi\cdot\left[-2\cos t + t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{10}{3}\pi-\pi^2.$$

A forgástest térfogata a fent kiszámolt két térfogat különbségeként kapható:

$$V_x = V_x^f - V_x^a = \frac{10}{3}\pi+\pi^2-\frac{10}{3}\pi+\pi^2 = 2\pi^2.$$

A kör y-tengely körüli forgatásával az alábbi ábrán látható forgástest kapható:



A kör $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ egyenletét x-re rendezzük, majd kiszámoljuk a jobb és balfélkör megforgatásával kapott forgástestek térfogatát. A jobb félkör egyenlete:

$$f(y) = x = 2+\sqrt{1-(y-1)^2},\ \ y\in[0,\ 2]$$

a bal félköré pedig

$$g(y) = x = 2-\sqrt{1-(y-1)^2},\ \ y\in[0,\ 2].$$

Így a forgástest térfogata:

$$V_y = \pi \cdot \int_0^2 f^2(y)\ dy - \pi \cdot \int_0^2 g^2(y)\ dy = \pi \cdot \int_0^2 f^2(y) - g^2(y)\ dy = 8\pi \cdot \int_0^2 \sqrt{1-(y-1)^2}\ dy =$$

A primitív függvény meghatározása során az $y-1=\sin t$ helyettesítés után a feladatban már vizsgált trigonometrikus integrálhoz jutottunk, melynek részletezésétől eltekintünk:

$$\int \sqrt{1-(y-1)^2}\ dx \underset{\substack{y-1 = \sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ dy = \cos t\ dt}}{=} \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\ dt = \cdots = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(y-1) + \frac{1}{4}\sin \arcsin(y-1) + C.$$

Visszaírva a térfogatképletbe:

$$= 8\pi \cdot \left[\frac{1}{2}\arcsin(y-1) + \frac{1}{4}\sin 2\arcsin(y-1)\right]_0^2 = 4\pi^2.$$

2. Megoldás:

Most is kiindulhatunk a paraméteres egyenletrendszerből. Az y-tengely körüli forgatással kapott forgástest térfogata:

$$V_y = \pi \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\cdot y'(t)\ dt,$$

feltéve, ha a paraméter tartományban $y'(t) \neq 0$. Ezt úgy tudjuk biztosítani, ha a jobb- és a bal félkört külön kezeljük. A jobb félkör paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2+\cos t \\ y(t) & = & 1+\sin t \end{array}\right\} \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Így a jobb félkör y-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata:

$$V_y^j = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2(t)\cdot y'(t)\ dt.$$

Ehhez $y'(t) = \cos t$. Így

$$V_y^j = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos t)^2 \cdot \cos t\ dt = \pi \int_0^{2\pi} 4\cos t + 4\cos^2 t + \cos^3 t\ dt =$$

Primitív függvények meghatározása:

$$\int 4\cos t\ dt = 4\sin t + C$$

$$\int 4\cos^2 t\ dt = 2\int 1+\cos 2t\ dt = 2t + \sin 2t + C$$

$$\int \cos^3 t\; dt = \int \cos^2 t \cdot \cos t\; dt = \int (1-\sin^2 t)\cdot \cos t\; dt = \int 1-u^2\; du = u-\frac{1}{3}u^3+C =$$

$$\begin{aligned} u &= \sin t \\ du &= \cos t\; dt \end{aligned}$$

$$= \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t + C.$$

Visszaírva a térfogatképletbe:

$$=\pi\cdot\left[5\sin t+2t+\sin 2t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{28}{3}\pi+2\pi^2.$$

A bal félkör paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 2+\cos t \\ y(t) &= 1+\sin t \end{aligned}\right\} \quad \frac{\pi}{2}<t<\frac{3}{2}\pi.$$

Az bal félkör megforgatásával kapott forgástest térfogata az előzőekhez hasonlóan számolható:

$$V_y^b = \pi \int_{\frac{3}{2}\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos t)^2\cdot \cos t\; dt =$$

Nyilvánvaló, hogy a primitív függvények az előzőekkel megegyeznek, így

$$=\pi\cdot\left[5\sin t+2t+\sin 2t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{28}{3}\pi+2\pi^2.$$

A forgástest térfogata a fent kiszámolt két térfogat különbségeként kapható:

$$V_y = V_y^j - V_y^b == \frac{28}{3}\pi+2\pi^2-\frac{28}{3}\pi+2\pi^2 = 4\pi^2.$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

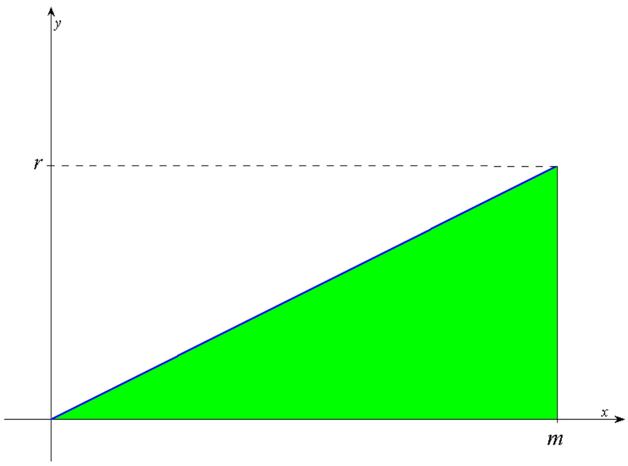
24. fejezet

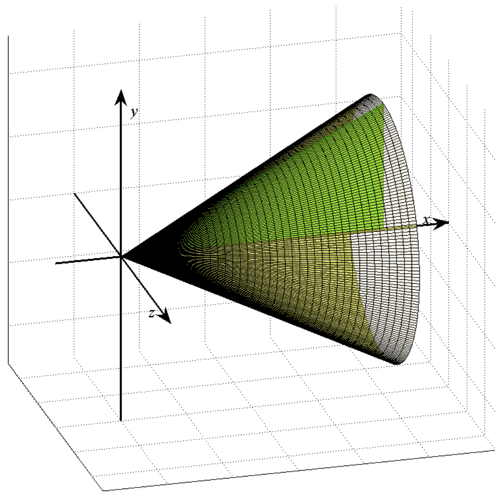
Integrálszámítás alkalmazásai III.

24.1. Gyakorlat

24.1. Feladat. *Vezessük le az M magasságú, r sugarú egyenes körkúp palástjára vonatkozó $A = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + m^2}$ képletet, mint forgásfelület felszínét!*

Megoldás.
A kúp egy, az origón átmenő μ meredekségű egyenes megforgatásával származtatható. Az egyenes meredeksége az alábbi ábráról olvasható le.





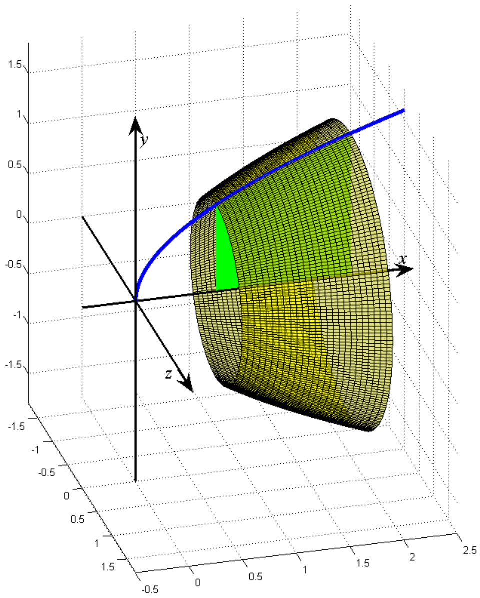
Az egyenes meredeksége: $\mu = \frac{r}{m}$. Így a szakasz az $f(x) = \frac{r}{m} \cdot x$ függvény $[0,\ m]$ intervallumra vett leszűkítése. Ekkor $f'(x) = \frac{r}{m}$ keresett felszín:

$$A = 2\pi \cdot \int_0^m \frac{r}{m} \cdot x \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2}{m^2}}\ dx = 2\pi \cdot \frac{r}{m} \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2}{m^2}} \cdot \int_0^m x\ dx = 2\pi \cdot \frac{r}{m} \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2}{m^2}} \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^m =$$

$$= \pi \cdot r \cdot m \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2}{m^2}} = \pi \cdot r \cdot m \cdot \sqrt{\frac{m^2 + r^2}{m^2}} = \pi \cdot r \cdot \sqrt{m^2 + r^2}. \qquad \diamondsuit$$

24.2. Feladat. *Számítsuk ki az $f(x)=\sqrt{x}$ függvény $[\frac{3}{4},\ 2]$ intervallum fölötti darabjának x-tengely körüli megforgatásával kapott forgásfelület felszínét.*

Megoldás.



Az x-tengely körüli forgatással kapott felület felszínéhez:

$$f(x)=\sqrt{x}, \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Így a forgásfelület felszíne:

$$A_x = 2\pi\cdot\int_{x_1}^{x_2} f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = = 2\pi\cdot\int_{\frac{3}{4}}^{2}\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx = = 2\pi\cdot\int_{\frac{3}{4}}^{2}\sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx \ominus$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int\sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}\cdot(x+\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}+C.$$

$$t = x+\tfrac{1}{4}$$
$$dt = dx$$

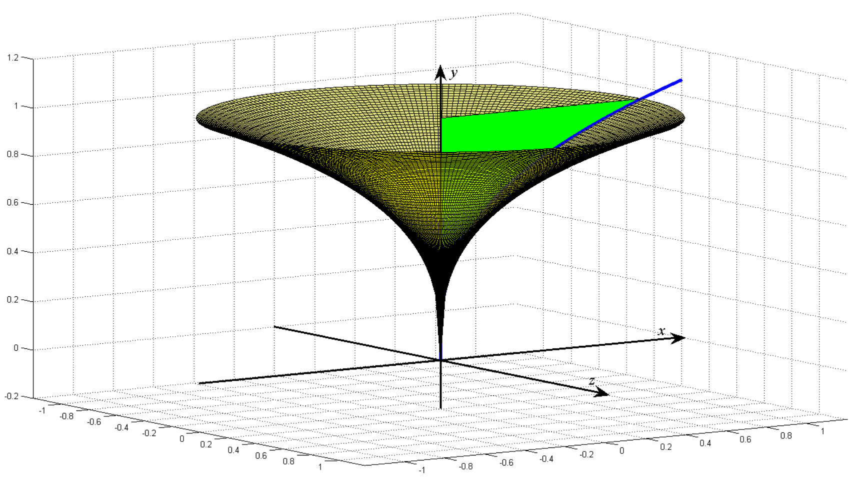
Visszaírva a felszín-képletbe:

$$\ominus 2\pi\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot(x+\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{3}{4}}^{2} = \frac{4}{3}\pi\cdot\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{27}{8}-1\right) = \frac{19}{6}\pi.$$

◊

24.3. Feladat. *Számítsuk ki az $f(x)=\sqrt[3]{x}$ függvény $[0,\ 1]$ intervallum fölötti darabjának y-tengely körüli megforgatásával kapott forgásfelület felszínét.*

Megoldás.



Az y-tengely körüli forgatással kapott felület felszínéhez:

$$\overline{f}(y) = y^3, \quad \Rightarrow \quad \overline{f}'(y) = 3y^2,$$

továbbá $y_1 = f(x_1) = \sqrt[3]{0}$ és $y_2 = f(x_2) = \sqrt[3]{1}$ így a felszín:

$$A_y = 2\pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} \overline{f}(y) \cdot \sqrt{1 + \left(\overline{f}'(y)\right)^2}\, dy = 2\pi \cdot \int_0^1 y^3 \cdot \sqrt{1+9y^4}\, dy \ominus$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int y^3 \cdot \sqrt{1+9y^4}\, dy = \frac{1}{36} \int t^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{36} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{48} \cdot (1+9y^4)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$\begin{aligned} t &= 1+9y^4 \\ dt &= 36y^3 dy \end{aligned}$$

Visszaírva a felszín-képletbe:

$$\ominus 2\pi \cdot \left[\frac{1}{48} \cdot (1+9y^4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{24}\pi \cdot \left(10^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) \approx 4{,}01.$$

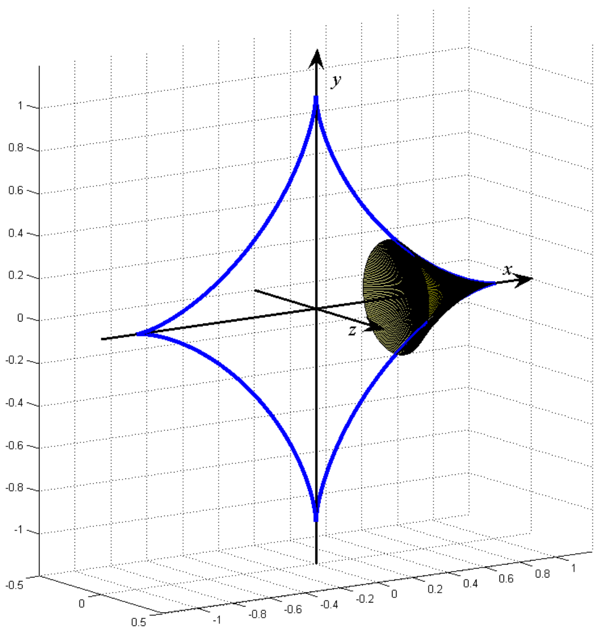
♢

24.4. Feladat. *Forgassuk meg az*

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \cos^3 t \\ y(t) &= \sin^3 t \end{aligned}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott csillaggörbe (asztrois), $t \in [0,\ \frac{\pi}{4}]$-hez tartozó darabját az x-tengely körül. Számítsuk ki a keletkező forgásfelület felszínét!

Megoldás.



A paraméteres egyenletrendszerből

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= -3\cos^2 t \cdot \sin t \\ y'(t) &= 3\sin^3 t \cdot \cos t \end{aligned}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Így a felszín:

$$A = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} y(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt =$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 t \cdot \sqrt{9\cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9\sin^4 t \cdot \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 6\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 t \cdot |\cos t| \cdot |\sin t| \cdot \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\ dt \underset{0 \le t \le \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos t, \sin t \ge 0}{=} 6\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 t \cdot \cos t\ dt =$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int \sin^4 t \cdot \cos t\ dt = \int u^4\ du = \frac{1}{5} \cdot u^5 + C = \frac{1}{5} \cdot \sin^5 t + C.$$

$$\begin{aligned} u &= \sin t \\ du &= \cos t\ dt \end{aligned}$$

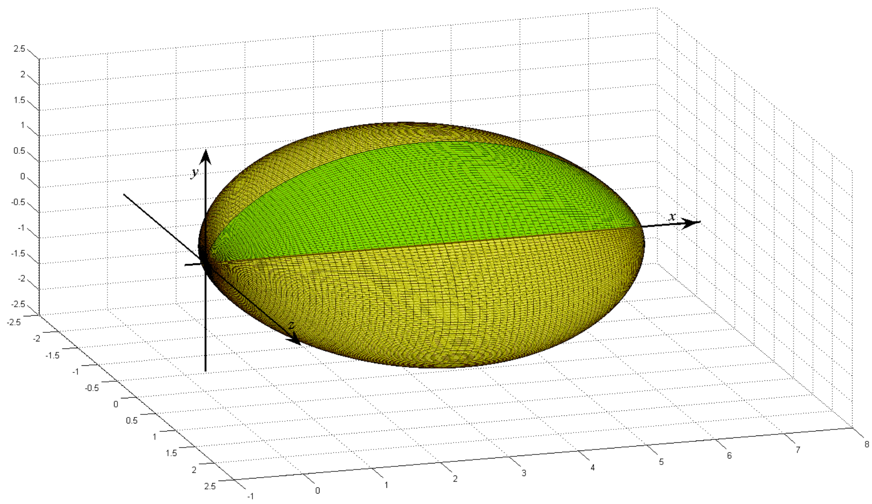
Visszaírva a felszín-képletbe:

$$= 6\pi \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot \sin^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{6}{5}\pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 = \frac{3\pi}{10\sqrt{2}} \approx 0{,}67.$$

♢

24.5. Feladat. *Forgassuk meg a polár-tengely körül az $r(\varphi) = 1 + \cos\varphi$ polárkordinátás egyenlettel adott ciklois $0 \le \varphi \le \pi$ ívét! Számítsuk ki a keletkező forgásfelület felszínét!*

Megoldás.
A szemléltetés kedvéért most is készíthetünk ábrát!



A felszín felírásához szükséges:

$$r'(\varphi) = -\sin\varphi,$$

így a felszín az alábbi formula alapján számolható:

$$A = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \cdot \sin\varphi \cdot \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\ d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi) \sin\varphi \sqrt{(1 + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\ d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi) \sin\varphi \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\ d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi) \sin\varphi \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\ d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi)^{\frac{3}{2}} \sin\varphi\ d\varphi =$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int (1+\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}\cdot\sin\varphi\ d\varphi = -\int t^{\frac{3}{2}}\ dt = -\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C = \frac{2}{5}\cdot(1+\cos\varphi)^{\frac{5}{2}}+C.$$

$$\begin{array}{rcl} t & = & \cos\varphi \\ dt & = & -\sin\varphi\ d\varphi \end{array}$$

Visszaírva a felszín-képletbe:

$$\circledequal 2\sqrt{2}\pi\cdot\left[-\frac{2}{5}\cdot(1+\cos\varphi)^{\frac{5}{2}}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{5}\sqrt{2}\pi\cdot 2^{\frac{5}{2}} \approx 20{,}11.$$

$\diamondsuit$

24.6. Feladat. *Igazoljuk, hogy* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$ *sor divergens, de bármely* $\varepsilon>0$ *esetén* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^{1+\varepsilon} n}$ *sor konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln x}$. Mivel $f:[2,\infty)\to\mathbb{R}_+$ monoton fogyó, ezért a $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$ végtelen sor és az $\int\limits_2^{\infty} f(x)\ dx$ improprius integrál ekvikonvergensek. Vizsgáljuk tehát az improprius integrált:

$$\int\limits_2^{\infty} f(x)\ dx = \int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x\cdot\ln x}\ dx = \lim_{\omega\to\infty}\int\limits_2^{\omega}\frac{1}{x\cdot\ln x}\ dx \circledequal$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int\frac{1}{x\cdot\ln x}\ dx = \int\frac{1}{t}\ dt = \ln|t|+C = \ln|\ln x|+C.$$

$$\begin{array}{rcl} t & = & \ln x \\ dt & = & \frac{1}{x}\ dx \end{array}$$

Így

$$\circledequal \lim_{\omega\to\infty}\left[\ln|\ln x|\right]_2^{\omega} = \lim_{\omega\to\infty}(\ln\ln\omega-\ln\ln 2) = \infty.$$

Mivel a fenti improprius integrál divergens, ezért a vizsgált végtelen sor is divergens.

A második állítás igazolásához rögzített $\varepsilon>0$ esetén legyen $g(x)=\frac{1}{x\cdot\ln^{1+\varepsilon} x}$. Mivel $g:[2,\infty)\to\mathbb{R}_+$ monoton fogyó, ezért a $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^{1+\varepsilon} n}$ végtelen sor és az $\int\limits_2^{\infty} g(x)\ dx$ improprius integrál ekvikonvergensek. Vizsgáljuk tehát az improprius integrált:

$$\int\limits_2^{\infty} g(x)\ dx = \int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^{1+\varepsilon} x}\ dx = \lim_{\omega\to\infty}\int\limits_2^{\omega}\frac{1}{x\cdot\ln^{1+\varepsilon} x}\ dx \circledequal$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int\frac{1}{x\cdot\ln^{1+\varepsilon} x}\ dx = \int t^{-1-\varepsilon}\ dt = -\frac{1}{\varepsilon}t^{-\varepsilon}+C = -\frac{1}{\varepsilon\cdot\ln^{\varepsilon} x}+C.$$

$$\begin{array}{rcl} t & = & \ln x \\ dt & = & \frac{1}{x}\ dx \end{array}$$

Így

$$\circledequal \lim_{\omega\to\infty}\left[-\frac{1}{\varepsilon\cdot\ln^{\varepsilon} x}\right]_2^{\omega} = \lim_{\omega\to\infty} -\frac{1}{\underbrace{\varepsilon\cdot\ln^{\varepsilon}\omega}_{\to 0}}+\frac{1}{\varepsilon\cdot\ln^{\varepsilon} 2} = \frac{1}{\varepsilon\cdot\ln^{\varepsilon} 2} < \infty.$$

Mivel az improprius integrál konvergens, ezért a végtelen sor is konvergens. $\square$

24.2. Házi Feladatok

24.1. Házi Feladat. *Forgassuk meg az x-tengely körül az $f(x)=e^x$ függvény grafikonjának* $[0,\ 1]$ *intervallumra eső darabját! Számítsuk ki a keletkező forgásfelület felszínét!* megoldás

24.2. Házi Feladat. *Vezessük le az R sugarú gömb felszínét,*

a) valamely $y=f(x)$ görbe megforgatásával kapott felület felszíneként,

b) paraméteresen adott görbe megforgatásával kapott felület felszíneként,

c) polárkoordinátákkal adott görbe megforgatásával kapott felület felszíneként. megoldás

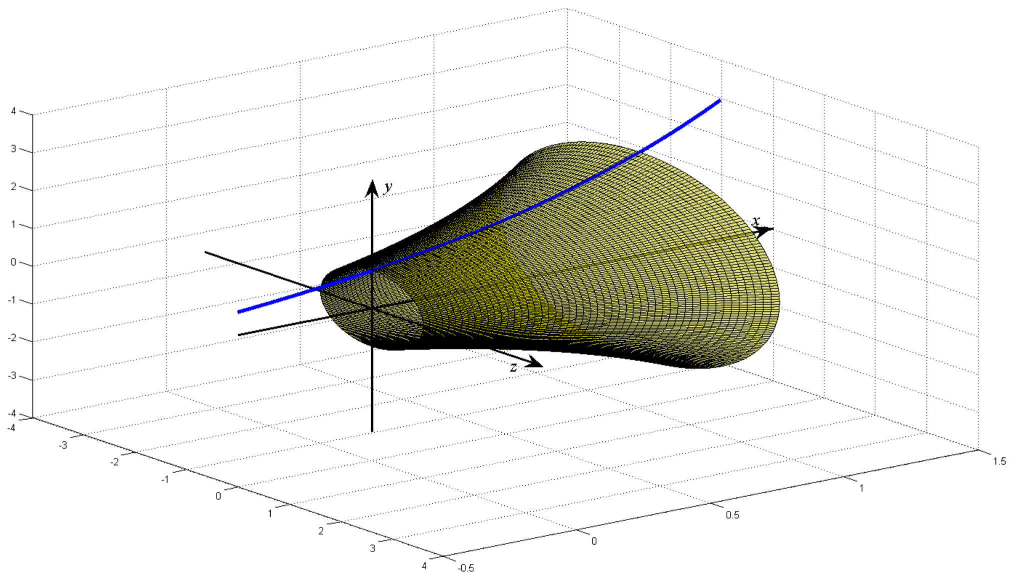
24.3. Házi Feladat. *Forgassuk meg a $C(2;1)$ középpontú, $r=1$ sugarú kört az x, illetve az y-tengely körül! Számoljuk ki a kapott forgásfelület felszínét!* megoldás

24.4. Házi Feladat. *Vizsgáljuk a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *numerikus sor konvergenciáját!* megoldás

24.3. Megoldások

24.1. Házi Feladat. *Forgassuk meg az x-tengely körül az $f(x)=e^x$ függvény grafikonjának* $[0,\ 1]$ *intervallumra eső darabját! Számítsuk ki a keletkező forgásfelület felszínét!*

Megoldás.



Az $f(x)=e^x$ függvény a $[0,\ 1]$ intervallumon folytonosan differenciálható és $f'(x)=e^x$, így a forgásfelület felszíne:

$$A=2\pi\cdot\int_0^1 e^x\cdot\sqrt{1+e^{2x}}\ dx \ominus$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int e^x\cdot\sqrt{1+(e^x)^2}\ dx=\int\sqrt{1+t^2}\ dt=$$

$$\begin{aligned} t &= e^x \\ dt &= e^x\ dx \end{aligned}$$

Az $\int\sqrt{1+t^2}\ dt$ irracionális integrállal már foglalkoztunk (277. oldal). Ez alapján:

$$\int\sqrt{1+t^2}\ dt=-\frac{1}{4}\ln|1-\sin\operatorname{arctg}t|+\frac{1}{4}\ln|1+\sin\operatorname{arctg}t|+\frac{1}{4(1-\sin\operatorname{arctg}t)}-\frac{1}{4(1+\sin\operatorname{arctg}t)}+C.$$

Így

$$\ominus 2\pi\cdot\left[-\frac{1}{4}\ln|1-\sin\operatorname{arctg}e^x|+\frac{1}{4}\ln|1+\sin\operatorname{arctg}e^x|+\frac{1}{4(1-\sin\operatorname{arctg}e^x)}-\frac{1}{4(1+\sin\operatorname{arctg}e^x)}\right]_0^1\approx 22{,}94.$$

♢

vissza a feladathoz

24.2. Házi Feladat. *Vezessük le az R sugarú gömb felszínét,*

a) valamely $y = f(x)$ görbe megforgatásával kapott felület felszíneként,

b) paraméteresen adott görbe megforgatásával kapott felület felszíneként,

c) polárkoordinátákkal adott görbe megforgatásával kapott felület felszíneként.

Megoldás.

1. Megoldás:
A forgásfelület származtatható az origó középpontú R sugarú felső félkör x-tengely körüli megforgatottjaként. Szimmetriai okok miatt elegendő a felső félkör $[0,\ R]$ fölötti darabját forgatni. Az így keletkező felület felszíne a keresett felszín fele. A felső félkör egyenlete:

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2},$$

ahonnan $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, így a forgásfelület felszíne:

$$\frac{A}{2} = 2\pi \cdot \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \cdot \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2 + x^2}\, dx = 2\pi \cdot \int_0^R \sqrt{R^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \cdot R \cdot \int_0^R dx = 2\pi \cdot R^2.$$

Így a teljes gömb felszín $A = 4R^2\pi$.

◊1

2. Megoldás:
A kör paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & R \cdot \cos t \\ y(t) & = & R \cdot \sin t \end{array}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

A felső félkör a paraméter $t \in [0,\ \pi]$ választása mellett írható le. Az első megoldás során használt szimmetriai meggondolások miatt elegendő a $t \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$ esetet vizsgálni. A kör paraméteres egyenletrendszeréből:

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & -R \cdot \sin t \\ y'(t) & = & R \cdot \cos t \end{array}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Így a felszínre:

$$\frac{A}{2} = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cdot \sin t \cdot \sqrt{R^2 \cdot \sin^2 t + R^2 \cdot \cos^2 t}\, dt = 2\pi R^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt = 2\pi R^2 \cdot \Big[-\cos t \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R^2.$$

Így a teljes gömb felszín $A = 4R^2\pi$.

◊2

3. Megoldás:
A felső félkör polárkoordinátás egyenlete: $r(\varphi)=R$, ahol $0\le\varphi\le\pi$. Most is lehetne hivatkozni a szimmetriára, de ennélkül is megoldható a feladat:

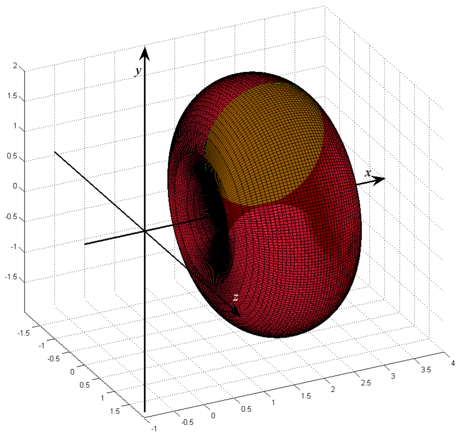
$$A=2\pi\cdot\int_0^\pi R\sin\varphi\cdot\sqrt{R^2+0^2}\,d\varphi=2\pi R^2\cdot\int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi=2\pi R^2\cdot\Big[-\cos t\Big]_0^\pi=4R^2\pi.$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

24.3. Házi Feladat. *Forgassuk meg a $C(2;1)$ középpontú, $r=1$ sugarú kört az x, illetve az y-tengely körül! Számoljuk ki a kapott forgásfelület felszínét!*

Megoldás.
A kör x-tengely körüli forgatásával az alábbi ábrán látható forgásfelület kapható:



A kör paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2+\cos t \\ y(t) & = & 1+\sin t \end{array}\right\}\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Innen

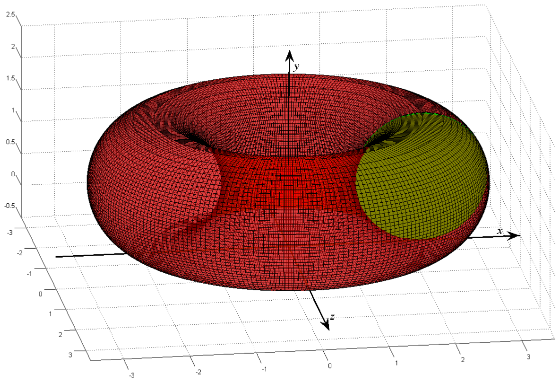
$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & -\sin t \\ y'(t) & = & \cos t \end{array}\right\}\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Így a forgásfelület felszíne:

$$A_x=2\pi\cdot\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=2\pi\cdot\int_0^{2\pi}(1+\sin t)\cdot\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt=$$

$$=2\pi\cdot\int_0^{2\pi} 1+\sin t\,dt=2\pi\cdot\Big[t-\cos t\Big]_0^{2\pi}=4\pi^2-2\pi\cos 2\pi+2\pi\cos 0=4\pi^2.$$

A kör y-tengely körüli forgatásával az alábbi ábrán látható forgásfelület kapható:



A forgásfelület felszíne:

$$A_y=2\pi\cdot\int_{t_1}^{t_2} x(t)\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=$$

$$=2\pi\cdot\int_0^{2\pi}(2+\cos t)\cdot\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt=$$

$$=2\pi\cdot\int_0^{2\pi} 2+\cos t\,dt=2\pi\cdot\Big[2t+\sin t\Big]_0^{2\pi}=8\pi^2.$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

24.4. Házi Feladat. *Vizsgáljuk a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *numerikus sor konvergenciáját!*

Megoldás.
Legyen $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Mivel $f:[1,\ \infty)\to\mathbb{R}_+$ monoton fogyó, ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ végtelen sor és az $\int\limits_1^{\infty} f(x)\ dx$ improprius integrál ekvikonvergensek. Vizsgáljuk tehát az improprius integrált:

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)\ dx = \int\limits_1^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\ dx = \int\limits_1^{\infty} \ln\frac{x+1}{x}\ dx = \int\limits_1^{\infty} \ln(x+1)-\ln x\ dx =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \int\limits_1^{\omega} \ln(x+1)-\ln x\ dx \ominus$$

A primitív függvények meghatározása:

$$\int 1\cdot\ln x = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\ dx = x\cdot\ln x - x + C$$

$$\begin{array}{ccccccc} f(x) & = & \ln x & \quad & g'(x) & = & 1 \\ f'(x) & = & \frac{1}{x} & & g(x) & = & x \end{array}$$

$$\int \ln(x+1) = \int \ln t\ dt = \ldots = t\cdot\ln t - t + C = (x+1)\cdot\ln(x+1)-(x+1)+C.$$

$$\begin{array}{ccc} t & = & x+1 \\ dt & = & dx \end{array}$$

$$\ominus \lim_{\omega\to\infty}\Big[(x+1)\cdot\ln(x+1)-(x+1)-x\cdot\ln x + x\Big]_1^{\omega} = \lim_{\omega\to\infty}\Big[(x+1)\cdot\ln(x+1)-1-x\cdot\ln x\Big]_1^{\omega} =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\left((\omega+1)\cdot\ln(\omega+1)-\omega\cdot\ln\omega-2\cdot\ln 2\right) = \lim_{\omega\to\infty}\left(\ln(\omega+1)^{\omega+1}-\ln\omega^{\omega}-2\cdot\ln 2\right) =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\left(\ln\frac{(\omega+1)^{\omega+1}}{\omega^{\omega}}-2\cdot\ln 2\right) = \lim_{\omega\to\infty}\left(\ln\left((\omega+1)\cdot\left(\frac{\omega+1}{\omega}\right)^{\omega}\right)-2\cdot\ln 2\right) =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\left(\ln(\omega+1)+\ln\underbrace{\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}}_{\to e}-2\cdot\ln 2\right) = 1-2\cdot\ln 2+\lim_{\omega\to\infty}\ln(\omega+1)=\infty.$$

Az improprius integrál divergens, így a végtelen sor is az. ♢

vissza a feladathoz

25. fejezet

Kétváltozós szélsőérték feladatok, feltételes szélsőérték feladatok

25.1. Gyakorlat

25.1.1. Szabad szélsőérték

25.1. Feladat. *Határozzuk meg az $f(x,y) = (x-3)^2 + (y+1)^2$ függvény szélsőértékeit!*

Megoldás.

i) Szükséges feltétel vizsgálata

Mivel a függvény mindenhol parciálisan differenciálható, ezért lokális szélsőértéke ott lehet, ahol mindkét parciális deriváltja 0, azaz

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2\cdot(x-3) = 0 \\ f'_y(x,y) &= 2\cdot(y+1) = 0 \end{aligned}$$

A fenti egyenletek megoldása után egyetlen stacionárius hely adódik, a $P = (3,-1)$ pont.

ii) Elégségesség

Írjuk fel a függvény második deriváltjait:

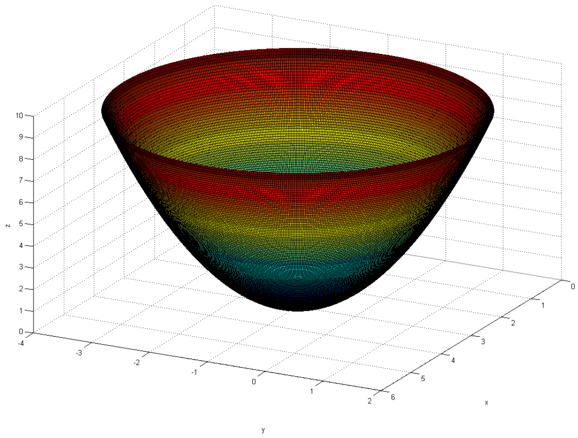
$$\begin{array}{rclcrcl} f''_{xx}(x,y) &=& 2 & \quad & f''_{xy}(x,y) &=& 0 \\ f''_{yx}(x,y) &=& 0 & \quad & f''_{yy}(x,y) &=& 2 \end{array}$$

Felírva a második derivált mátrix determinánsát a P pontban

$$D(P) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Ezért P-ben a függvénynek szélsőértéke van. Mivel $f''_{xx}(P) > 0$, ezért a függvénynek a P pontban lokális minimuma van.

A szélsőérték jól látható az alábbi ábrán is:



$\diamondsuit$

25.1. Megjegyzés. *Az előző feladatban a második deriváltak felírása helyett elemi úton is megállapíthattuk volna, hogy a stacionárius pontban lokális minimum van.*

Hiszen $f(x,y) = (x-3)^2 + (y+1)^2 \geq 0$ *minden* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *esetén, míg a stacionárius pontban* $f(P) = 0$.

25.2. Feladat. *Keressük meg az* $f(x,y) = x^4 + 2x^2 + 3y^4 - y^2$ *függvény szélsőértékeit.*

Megoldás.

i) Szükséges feltétel vizsgálata

Mivel a függvény mindenhol parciálisan differenciálható, ezért lokális szélsőértéke ott lehet, ahol mindkét parciális deriváltja 0, azaz

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 4x^3 + 4x = 4x(x^2+1) = 0 \\ f'_y(x,y) &= 12y^3 - 2y = 2y(6y^2-1) = 0 \end{aligned}$$

A fenti egyenletek megoldásai:

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0,\ y \in \left\{ 0,\ \pm\sqrt{\frac{1}{6}} \right\} \right\},$$

azaz három stacionárius hely adódik, a $P_1 = (0{,}0),\ P_2 = (0, \sqrt{\frac{1}{6}}),\ P_3 = (0, -\sqrt{\frac{1}{6}}),$.

ii) Elégségesség

Írjuk fel a függvény második deriváltjait:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 12x^2 + 4 & f''_{xy}(x,y) &= 0 \\ f''_{yx}(x,y) &= 0 & f''_{yy}(x,y) &= 36y^2 - 2 \end{aligned}$$

Felírva a második derivált mátrix determinánsát a P_i pontokban $(i = 1,\ 2,\ 3)$

$$D(P_1) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

Ezért P_1-ben a függvénynek nincs szélsőértéke.

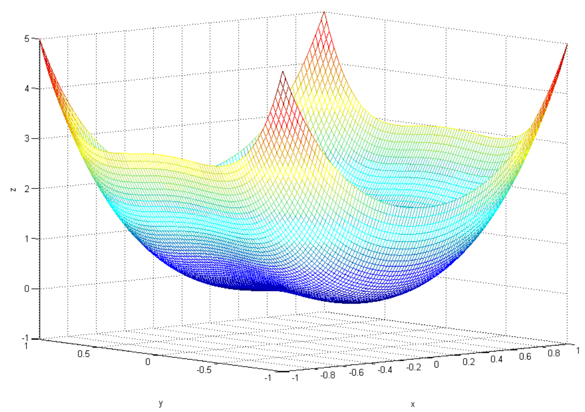
$$D(P_2) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

Ezért P_2-ben a függvénynek szélsőértéke van. Mivel $f''_{xx}(P_2) > 0$, ezért a függvénynek a P_2 pontban lokális minimuma van.

$$D(P_2) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

Ezért P_3-ben a függvénynek szélsőértéke van. Mivel $f''_{xx}(P_3) > 0$, ezért a függvénynek a P_3 pontban lokális minimuma van.

A szélsőértékek jól láthatók az alábbi ábrán is:



$\diamondsuit$

25.3. Feladat. *Keressük meg az $f(x,y) = y^2 + 2x^2y + x^4$ függvény szélsőértékeit.*

Megoldás.

i) Szükséges feltétel vizsgálata

Mivel a függvény mindenhol parciálisan differenciálható, ezért lokális szélsőértéke ott lehet, ahol mindkét parciális deriváltja 0, azaz

$$f'_x(x,y) = 4xy + 4x^3 = 4x(y + x^2) = 0$$
$$f'_y(x,y) = 2y + 2x^2 = 0$$

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x = 0$ vagy $y = -x^2$.

Visszahelyettesítve a második egyenletbe $x=0$ esetén $y=0$ adódik. Ha az $y=-x^2$ feltételt helyettesítjük be, azonosságra jutunk.

Tehát az f függvénynek az $y = -x^2$ parabola pontjaiban lehet szélsőértéke.

ii) Elégségesség

Írjuk fel a függvény második deriváltjait:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 4y + 12x^2 & \quad f''_{xy}(x,y) &= 4x \\ f''_{yx}(x,y) &= 4x & \quad f''_{yy}(x,y) &= 2 \end{aligned}$$

A másodrendű deriváltmátrix determinánsa az $y=-x^2$ parabola pontjaiban

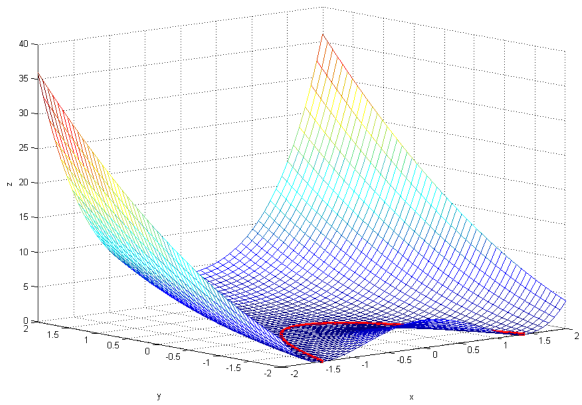
$$\begin{vmatrix} 8x^2 & 4x \\ 4x & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Mivel a másodrendű deriváltmátrix szemidefinit, ezért más módon kell eljárnunk. Látható, hogy az $f(x,y)$ függvény könnyen szorzattá alakítható, azaz

$$f(x,y) = y^2+2x^2y+x^4 = (y+x^2)^2.$$

Mivel egy négyzetszám mindig nem negatív, ezért az f függvénynek az $y=-x^2$ parabola pontjaiban lokális minimuma van.

Az alábbi ábrán jól látható, hogy az f függvénynek az $y=-x^2$ parabola pontjaiban van lokális minimuma.



◇

25.1.2. Feltételes szélsőérték

25.4. Feladat. *Határozzuk meg az $f(x,y)=x^2+y^2$ függvény feltételes szélsőértékeit az $x+y=6$ feltétel mellett.*

Megoldás.
Fejezzük ki a feltételből az y változót: $y=6-x$, majd a kapott eredményt helyettesítsük vissza az f függvénybe:

$$f(x) = x^2+(6-x)^2 = x^2+36-12x+x^2 = 2x^2-12x+36.$$

A kapott egyváltozós függvény szélsőértékét keressük.

i) Szükséges feltétel

Egyváltozós, mindenhol differenciálható függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0:

$$f'(x) = 4x-12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=3$$

ii) Elégségesség

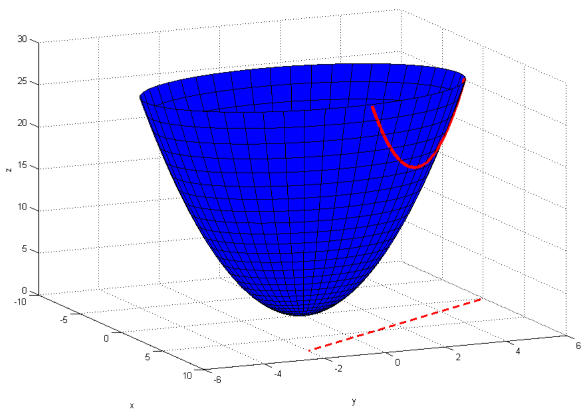
Vizsgáljuk a második deriváltat az $x_0=3$ helyen:

$$f''(x) = 4 \Rightarrow f''(3) = 4 > 0$$

így f-nek az $x=3$ helyen lokális minimuma van.

Visszahelyettesítve az eredeti problémába kapható, hogy a feltételes szélsőérték a $P=(3,6-$ $-3)=(3,3)$ pontban van.

Az alábbi ábrán látható az eredeti függvény és a feltétel által kimetszett görbe:



$\diamondsuit$

25.5. Feladat. *Határozzuk meg az* $f(x,y)=x+y^2$ *függvény totális szélsőértékeit az* $x^2+y^2\leq 1$ *feltétel mellett.*

Megoldás.

I) A szabad szélsőértékek keresése:

i) Szükséges feltétel vizsgálata

Mivel a függvény mindenhol parciálisan differenciálható, ezért lokális szélsőértéke ott lehetne, ahol mindkét parciális deriváltja 0. Mivel

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 1 \neq 0 \\ f'_y(x,y) &= 2y = 0 \end{aligned}$$

ezért a függvénynek nincs szabad szélsőértéke, a feltételes szélsőértékek tehát a körlap határvonalán lesznek.

II) Feltételes szélsőérték: A tartomány szélén kell megnéznünk a függvény lehetséges szélsőértékeit.

i) Alkalmazzuk a Lagrange-féle multiplikátoros módszert!

Ennek során a feltételből átrendezéssel kapott $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ függvényt kombináljuk az eredeti f függvénnyel:

$$\Phi(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot F(x,y)=x+y^2+\lambda\cdot(x^2+y^2-1).$$

Az így kapott $\Phi(x,y,\lambda)$ háromváltozós függvény lehetséges szélsőértékeit keressük.

ii) Szükséges feltétel

Mivel a függvény mindenhol parciálisan differenciálható, ezért lokális szélsőértéke ott lehet, ahol mindhárom parciális deriváltja 0, azaz

$$\begin{aligned} &\Phi'_x(x,y,\lambda)=1+2\cdot\lambda\cdot x=0 \\ &\Phi'_y(x,y,\lambda)=2\cdot y+2\cdot\lambda\cdot y=y\cdot(1+\lambda)=0 \\ &\Phi'_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-1=0 \end{aligned}$$

A második egyenlet alapján $y=0$ vagy $\lambda=-1$.

a) Vizsgáljuk az $y = 0$ esetet!
Visszahelyettesítve az $y = 0$ értéket a $\Phi'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ összefüggésbe, $x = \pm 1$ adódik

b) A $\lambda = -1$ esetben a fenti egyenletrendszer első egyenlete

$$\Phi'_x(x, y, -1) = 1 - 2 \cdot x = 0,$$

ahonnan $x = \frac{1}{2}$ és így $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Azaz a függvénynek a $P_1(1,0)$, $P_2(-1,0)$, $P_3(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ és $P_4(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ pontokban lehet feltételes szélsőértéke. (P_1 esetén $\lambda = -\frac{1}{2}$, P_2 esetén $\lambda = \frac{1}{2}$, a többi stacionárius pont a $\lambda = -1$ értékhez tartozik.)

iii) Elégségesség

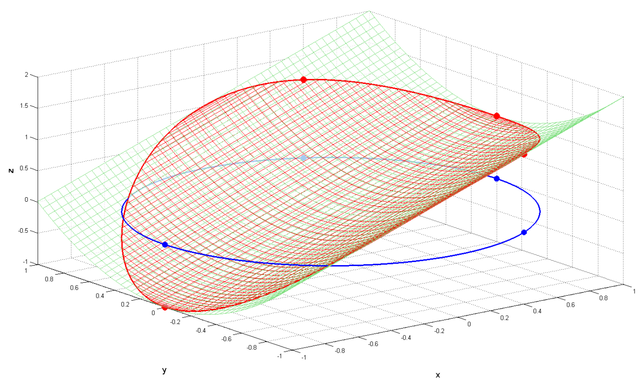
Az elégséges feltétel megfogalmazása ebben az esetben lényegesen nehezebb, a kurzus keretein túlmutató feladat.

Helyette arra fogunk hivatkozni, hogy a függvény kompakt halmazon értelmezett, mindkét változójában folytonos függvény, így a Weierstrass-tétel értelmében a tartományon felveszi szélsőértékeit.

Írjuk fel tehát a függvény értékeit a megtalált stacionárius pontokban. Abban a pontban lesz feltételes minimum, ahol a függvényérték a legkisebb és abban a pontban lesz feltételes maximum, ahol a függvényérték a legnagyobb:

- $P_1 = (1,0)$,
$$f(P_1) = 1 + 0^2 = 1.$$
- $P_2 = (-1,0)$,
$$f(P_2) = -1 + 0^2 = -1.$$
- $P_3 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,
$$f(P_3) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$
- $P_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$,
$$f(P_4) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

Tehát a függvénynek a P_2 pontban van lokális minimuma és a P_3 és P_4 pontokban lokális maximuma.



$\diamondsuit$

25.6. Feladat. *Határozzuk meg az $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ függvény totális szélsőértékeit az $|x|+$ $+|y|\leq 1$ tartományon.*

Megoldás.

I) Szabad szélsőérték keresése:

i) Szükséges feltétel vizsgálata

Mivel a függvény mindenhol parciálisan differenciálható, ezért lokális szélsőértéke ott lehet, ahol mindkét parciális deriváltja 0, azaz

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x-y=0 \\ f'_y(x,y) &= 2y-x=0. \end{aligned}$$

Az első egyenletből kifejezve az y-t, és ezt behelyettesítve a második egyenletbe, azt kapjuk, hogy az $f(x,y)$ függvénynek a $P(0{,}0)$ pontban lehet szélsőértéke.

ii) Elégségesség

Írjuk fel a függvény második deriváltjait:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 2 \qquad & f''_{xy}(x,y) &= -1 \\ f''_{yx}(x,y) &= -1 \qquad & f''_{yy}(x,y) &= 2 \end{aligned}$$

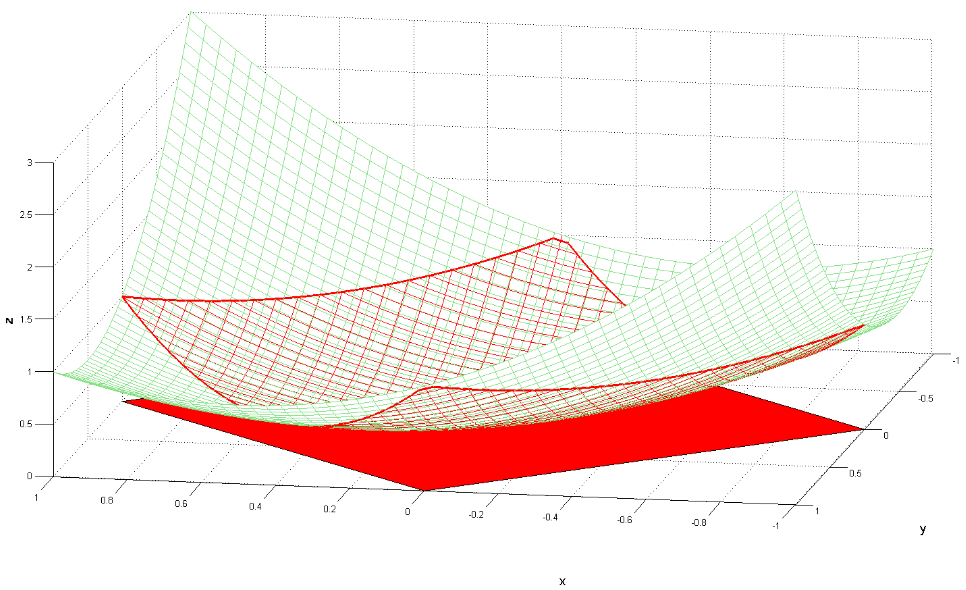
Felírva a második derivált mátrix determinánsát a P pontban

$$D(P)=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3>0$$

Ezért P-ben a függvénynek szélsőértéke van. Mivel $f''_{xx}(P)>0$, ezért a függvénynek a P pontban lokális minimuma van. Mivel a P pont a tartományba esik, ezért a totális szélsőértékek megállapításakor figyelembe kell venni.

A függvényérték a P pontban $f(P)=0$.

II) Feltételes szélsőérték: A tartomány szélén kell megnéznünk a függvény lehetséges szélsőértékeit.



i) A tartomány határát leíró $|x|+|y|=1$ feltétel az alábbi négy egyszerű feltételre bontható:

$$\begin{array}{rclrcl} y_1 &=& 1-x & 0 &\leq x \leq & 1 \\ y_2 &=& x-1 & 0 &\leq x \leq & 1 \\ y_3 &=& x+1 & -1 &\leq x \leq & 0 \\ y_4 &=& -x-1 & -1 &\leq x \leq & 0 \end{array}$$

Ezeket a feltételeket az $f(x,y)$ függvénybe behelyettesítve az alábbi négy szabad szélsőérték feladatra jutunk:

a) $y=1-x$ és $0 \leq x \leq 1$, ekkor

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2=x^2-x\cdot(1-x)+(1-x)^2=3x^2-3x+1=: h_1(x),$$

tehát a $h_1(x)$ egyváltozós függvény, [0,1] intervallumba eső szélsőértékeit keressük.
A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy az első derivált nulla legyen:

$$h_1'(x)=6x-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}\in[0,\ 1]$$

Felírva a másodrendű elégséges feltételt:

$$h_1''(x)=6 \quad \Rightarrow \quad h_1''(\tfrac{1}{2})=6>0,$$

ezért a h_1 függvénynek $x_0=\frac{1}{2}$ lokális minimuma van. Itt az eredeti függvény értéke:

$$f(P_1)=f(\tfrac{1}{2},1-\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{4} \quad (P_1=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})).$$

A függvény menetéből, melyet az első derivált előjele alapján olvashatunk le nyilvánvaló, hogy az intervallum végpontjaiban a függvénynek lokális maximuma van:

	$0<x<\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<1$
$h_1'(x)$	$-$	0	$+$
$h_1(x)$	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

A lokális maximum helyek tehát $P_2(0,1)$ és $P_3(1,0)$ mindkét pontban a függvényérték

$$f(P_2)=f(P_3)=1.$$

b) $y=x-1$ és $0 \leq x \leq 1$, ekkor

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2=x^2-x\cdot(x-1)+(x-1)^2=x^2-x+1=: h_2(x),$$

tehát a $h_2(x)$ egyváltozós függvény, [0,1] intervallumba eső szélsőértékeit keressük.
A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy az első derivált nulla legyen:

$$h_2'(x)=2x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}\in[0,\ 1]$$

Felírva a másodrendű elégséges feltételt:

$$h_2''(x)=2 \quad \Rightarrow \quad h_2''(\tfrac{1}{2})=2>0,$$

ezért a h_1 függvénynek $x_0 = \frac{1}{2}$ lokális minimuma van. Itt az eredeti függvény értéke:

$$f(P_4) = f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} - 1) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} \quad (P_4 = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})).$$

A függvény menetéből, melyet az első derivált előjele alapján olvashatunk le nyilvánvaló, hogy az intervallum végpontjaiban a függvénynek lokális maximuma van:

	$0<x<\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<1$
$h_2'(x)$	$-$	0	$+$
$h_2(x)$	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

A lokális maximum helyek tehát $P_5(0, -1)$ illetve a korábban már vizsgált $P_3(1{,}0)$, mindkét pontban a függvényérték:

$$f(P_5) = f(P_3) = 1.$$

c) $y = x + 1$ és $-1 \le x \le 0$, ekkor

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 = x^2 - x\cdot(x+1) + (x+1)^2 = x^2 + x + 1 =: h_3(x),$$

tehát a $h_3(x)$ egyváltozós függvény, $[-1{,}0]$ intervallumba eső szélsőértékeit keressük.
A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy az első derivált nulla legyen:

$$h_3'(x) = 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \in [-1,\ 0]$$

Felírva a másodrendű elégséges feltételt:

$$h_3''(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad h_3''(-\tfrac{1}{2}) = 2 > 0,$$

ezért a h_3 függvénynek $x_0 = -\frac{1}{2}$ lokális minimuma van. Itt az eredeti függvény értéke:

$$f(P_6) = f(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} + 1) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} \quad (P_6 = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})).$$

A függvény menetéből, melyet az első derivált előjele alapján olvashatunk le nyilvánvaló, hogy az intervallum végpontjaiban a függvénynek lokális maximuma van:

	$-1<x<-\frac{1}{2}$	$x=-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x<0$
$h_3'(x)$	$-$	0	$+$
$h_3(x)$	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

A lokális maximum helyek tehát $P_7(-1{,}0)$ illetve a korábban már vizsgált $P_5(0, -1)$, mindkét pontban a függvényérték:

$$f(P_7) = f(P_5) = 1.$$

d) $y = -x - 1$ és $-1 \le x \le 0$, ekkor

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 = x^2 - x\cdot(x+1) + (x+1)^2 = 3x^2 + 3x + 1 =: h_4(x),$$

tehát a $h_4(x)$ egyváltozós függvény, $[-1{,}0]$ intervallumba eső szélsőértékeit keressük.

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy az első derivált nulla legyen:

$$h_4'(x) = 6x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \in [-1,\ 0]$$

Felírva a másodrendű elégséges feltételt:

$$h_4''(x) = 6 \quad \Rightarrow \quad h_4''(-\tfrac{1}{2}) = 6 > 0,$$

ezért a h_4 függvénynek $x_0 = -\frac{1}{2}$ lokális minimuma van. Itt az eredeti függvény értéke:

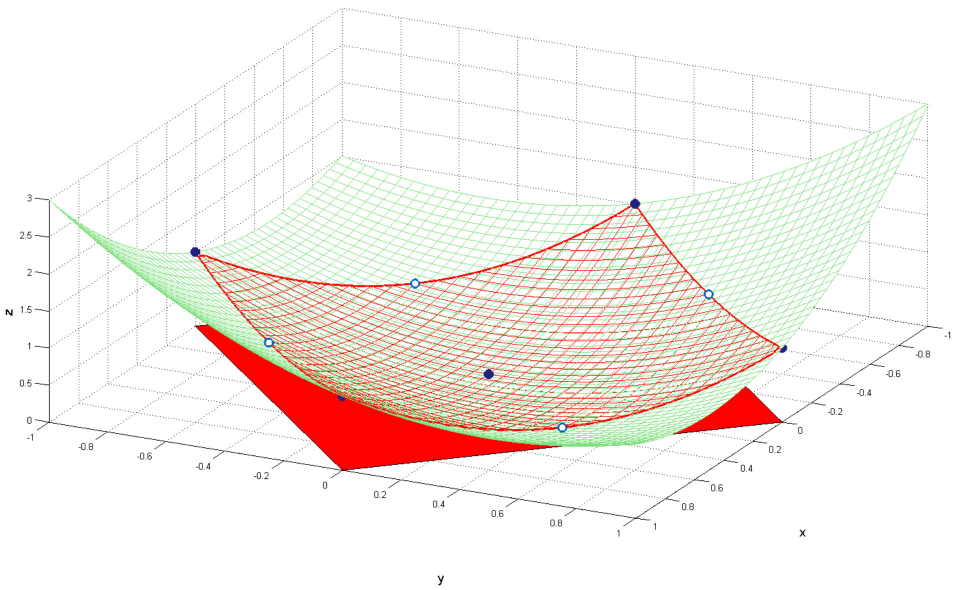
$$f(P_8) = f(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} - 1) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} \quad (P_8 = (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})).$$

A függvény menetéből most is nyilvánvaló, hogy az intervallum végpontjaiban a függvénynek lokális maximuma van, de ezeket a pontokat korábban már vizsgáltuk:

	$-1<x<-\frac{1}{2}$	$x=-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x<0$
$h_4'(x)$	$-$	0	$+$
$h_4(x)$	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

III) A függvény kompakt halmazon értelmezett, mindkét változójában folytonos függvény, így a Weierstrass-tétel értelmében a tartományon felveszi szélsőértékeit.

Így a függvény totális maximuma a $P_2,\ P_3,\ P_5,\ P_7$ pontokban van, ahol a függvényérték 1, a totális minimum pedig a P pontban van, ahol a függvényérték 0.

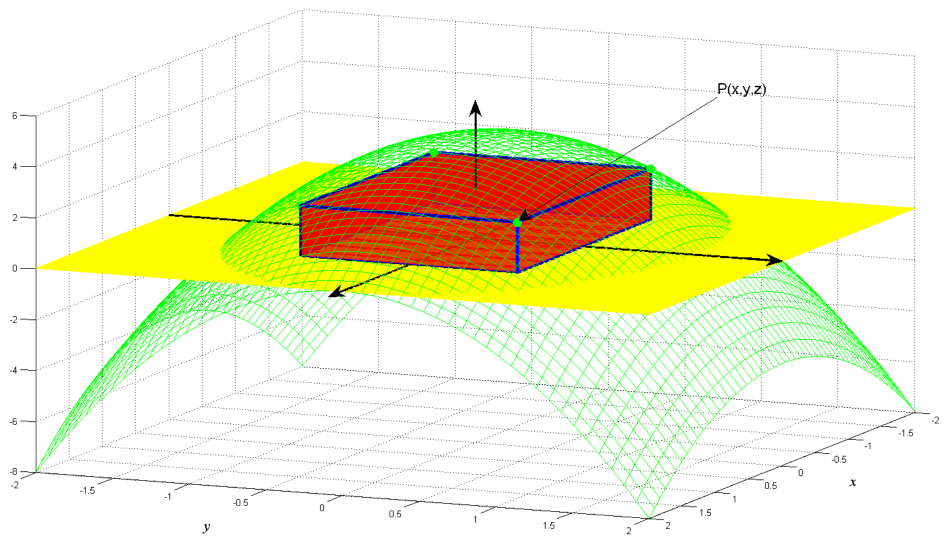


◊

25.1.3. Szöveges szélsőérték feladatok

25.7. Feladat. *Határozzuk meg a $z=4-x^2-2y^2$ egyenletű felület $z\geq$ része és az xy-sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest oldallapjai párhuzamosak a koordinátasíkokkal.*

Megoldás.



Szimmetriai okok miatt nyilvánvaló, hogy ha a téglatest egyik csúcsának koordinátái (x, y, z), ahol $z \neq 0$, akkor a téglatest térfogata: $V(x, y, z) = 4 \cdot x \cdot y \cdot z$.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $x, y, z \geq 0$, hiszen a téglatestnek biztosan van csúcsa az első térnyolcadban. A térfogatfüggvény értelmezési tartománya így: $\mathscr{D}_V = \{x, y, z \in \mathbb{R} |\ 0 \leq x, y,\text{ és } 0 \leq z \leq 4\}$.

Az is könnyen látható, hogy a térfogat akkor maximális, ha a kérdéses pont a felületen van, azaz koordinátáira $z = 4 - x^2 - 2y^2$. Az összefüggést a térfogatfüggvénybe visszaírva egy kétváltozós szélsőérték feladatot kapunk:

Keressük tehát a $V(x, y) = 4x \cdot y \cdot (4 - x^2 - 2y^2) = 16xy - 4x^3y - 8xy^3$ kétváltozós függvény szélsőértékeit.

Mivel a függvény mindenhol parciálisan differenciálható, ezért lokális szélsőértéke ott lehet, ahol mindkét parciális deriváltja 0, azaz

$$\begin{aligned} V'_x(x, y) &= 16y - 12x^2y - 8y^3 = 4y \cdot (4 - 3x^2 - 2y^2) = 0 \\ V'_y(x, y) &= 16x - 4x^3 - 24xy^2 = 4x \cdot (4 - x^2 - 6y^2) = 0 \end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszerből a következő lehetséges szélsőértékhelyek adódnak:

- $x = 0$ és $4y \cdot (4 - 2y^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0$, vagy $y = \pm\sqrt{2}$. Ezekben az eseteken a térfogat 0, azaz biztosan nem ez a keresett maximális térfogatú hasáb.

- $y = 0$ és $4x \cdot (4 - 6x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, vagy $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Ezekben az eseteken a térfogat 0, azaz biztosan nem ez a keresett maximális térfogatú hasáb.

- $x, y \neq 0$, ekkor

$$\begin{aligned} 4 - 3x^2 - 2y^2 &= 0 \\ 4 - x^2 - 6y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ahonnét $x^2 = 1$ és $y^2 = \frac{1}{2}$. Figyelembe véve az értelmezési tartományt: $x = 1$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ és ekkor $z = 4 - 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

Az elégséges feltételt felírva:

$$\begin{array}{rclrcl} V''_{xx}(x,y) & = & -24xy & V''_{xy}(x,y) & = & 16-12x^2-24y^2 \\ V''_{yx}(x,y) & = & 16-12x^2-24y^2 & V''_{yy}(x,y) & = & -48xy \end{array}$$

Ekkor a $P(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ pontban a második derivált mátrix:

$$D = \begin{vmatrix} -12\sqrt{2} & -8 \\ -8 & -24\sqrt{2} \end{vmatrix} = 24^2 - 64 = 512 > 0$$

Ezért P-ben szélsőérték van és mivel $V''_{xx}(P) = -12\sqrt{2} < 0$, ezért valóban maximumhely. $\diamondsuit$

25.2. Megjegyzés. *A feladat megoldható lett volna feltételes szélsőérték feladatként is.*

25.2. Házi Feladatok

25.1. Házi Feladat. *Határozzuk meg az* $f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ *függvény szélsőértékeit, ha* $0<x<\frac{\pi}{2}$ *és* $0<y<\frac{\pi}{2}$.

megoldás

25.2. Házi Feladat. *Határozzuk meg az* $f(x,y)=2x^2+y^2-2xy+4x-2y+5$ *függvény szélsőértékeit!*

megoldás

25.3. Házi Feladat. *Határozzuk meg az* $f(x,y)=(x^2-6x)\cdot(y^2-4y)$ *függvény szélsőértékeit!*

megoldás

25.4. Házi Feladat. *Határozzuk meg az* $f(x,y)=x^2+y^2$ *függvény totális szélsőértékeit az* $(x-2)^2+(y-1)^2\leq 1$ *feltétel mellett.*

megoldás

25.3. Megoldások

25.1. Házi Feladat. *Határozzuk meg az* $f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ *függvény szélsőértékeit, ha* $0<x<\frac{\pi}{2}$ *és* $0<y<\frac{\pi}{2}$.

Megoldás.

i) Szükséges feltétel vizsgálata:

Mivel a függvény mindenhol parciálisan differenciálható, ezért lokális szélsőértéke ott lehet, ahol mindkét parciális deriváltja 0, azaz

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \cos x-\sin(x-y)=0,\\ f'_y(x,y) &= -\sin y+\sin(x-y)=0. \end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszer második egyenletéből:

$$\sin(x-y)=\sin y \Rightarrow y=\frac{x}{2}+k\pi,\ \text{ vagy } x=\pi+2k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z}).$$

Az $x=\pi+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ feltételt kielégítő pontok nem esnek a $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$intervallumba. Az $y=\frac{x}{2}+k\pi$ összefüggést visszahelyettesítve a rendszer első egyenletébe, majd kihasználva, hogy $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ azt kapjuk, hogy

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{x}{2}-k\pi\right)$$

Ahonnan

$$x+\frac{\pi}{2}=\frac{x}{2}-k\pi+2m\pi \Rightarrow x=\pi\cdot(2\cdot(2m-k)-1),$$

vagy

$$x+\frac{\pi}{2}=\pi-\left(\frac{x}{2}-k\pi\right)+2m\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\cdot(1+2k+4m)$$

eredményekre jutunk, ahol $k,m\in\mathbb{Z}$. Mivel $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ezért csak az utóbbi esetben $k=0$ és $m=0$ választás mellett találunk megoldást. Ekkor $x=\frac{\pi}{3}$ és $y=\frac{\pi}{6}$ adódik.

Azaz a függvénynek a $P\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ pontban lehet szélsőértéke. (Ez a stacionárius pont.)

ii) Elégséges feltétel vizsgálata:

Ehhez a másodrendű deriváltmátrix determinánsát kell megnéznünk. Az f függvény második deriváltjai a következők:

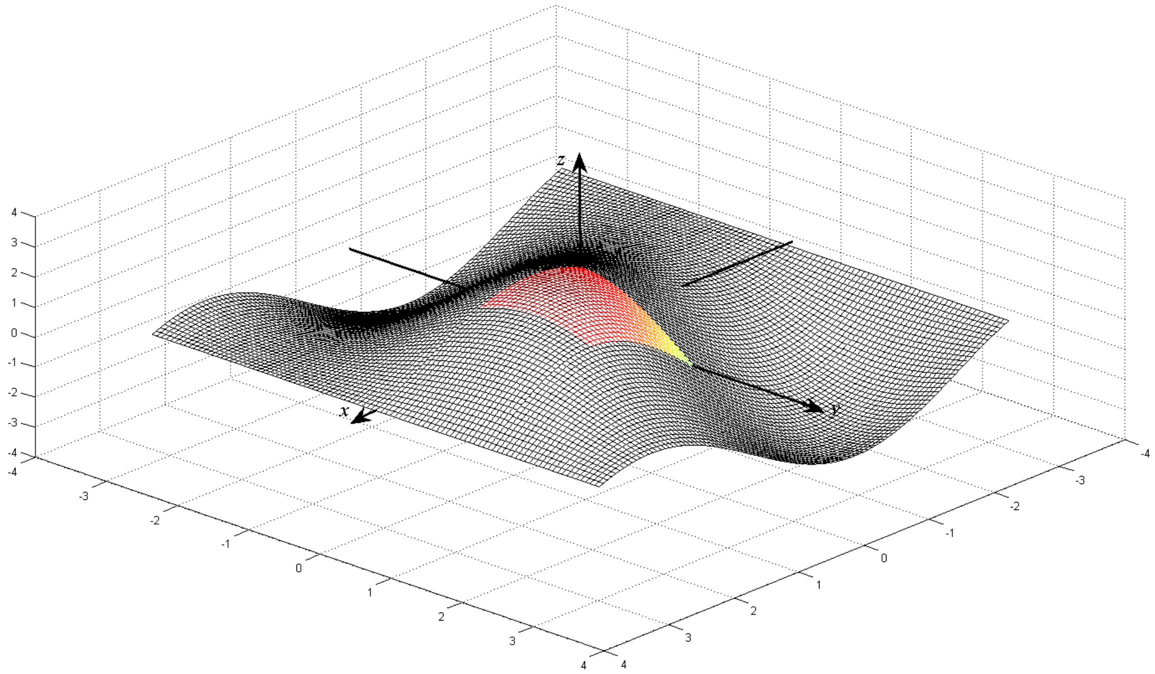
$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= -\sin x-\cos(x-y)\\ f''_{yy}(x,y) &= -\cos y-\cos(x-y)\\ f''_{xy}(x,y) &= f''_{yx}(x,y)=\cos(x-y) \end{aligned}$$

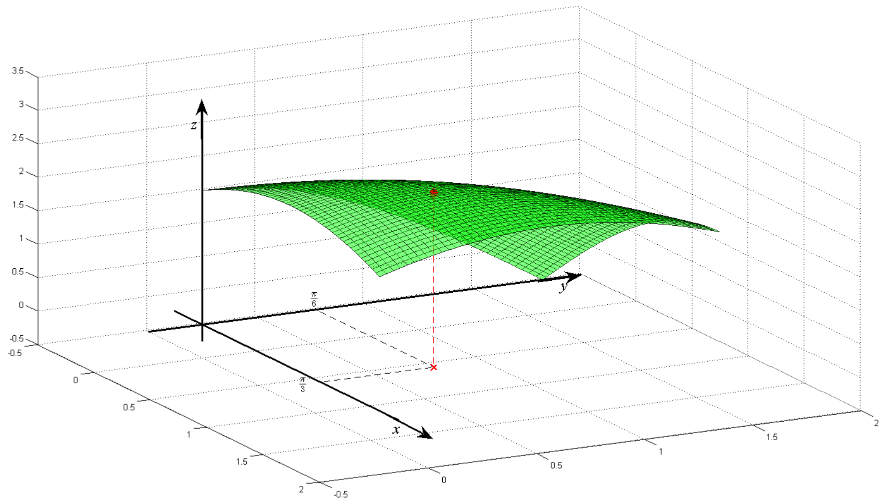
A másodrendű deriváltmátrix determinánsa a P pontban tehát

$$D(P)=\begin{vmatrix} -\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix}=\frac{9}{4}.$$

A másodrendű deriváltmátrix determinánsa pozitív a P pontban, ebből következik, hogy a P pont szélsőértéke van az f függvénynek. Mivel $f''_{xx}(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})=-\sqrt{3}<0$, ezért a P pont az f függvénynek lokális maximuma.

A szélsőérték jól látható az alábbi ábrákon is:





◊

vissza a feladathoz

25.2. Házi Feladat. *Határozzuk meg az* $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 2y + 5$ *függvény szélsőértékeit!*

Megoldás.

i) Szükséges feltétel vizsgálata:

Mivel a függvény mindenhol parciálisan differenciálható, ezért lokális szélsőértéke ott lehet, ahol mindkét parciális deriváltja 0, azaz

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 4x - 2y + 4 = 0, \\ f'_y(x,y) &= 2y - 2x - 2 = 0. \end{aligned}$$

A két egyenletet összeadva adódik:

$$2x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1.$$

A második egyenletbe visszahelyettesítve:

$$2y=0 \quad \Rightarrow \quad y=0.$$

Így egyetlen stacionárius pont van: $P(-1;\ 0)$.

ii) Elégséges feltétel vizsgálata:

A másodrendű deriváltak:

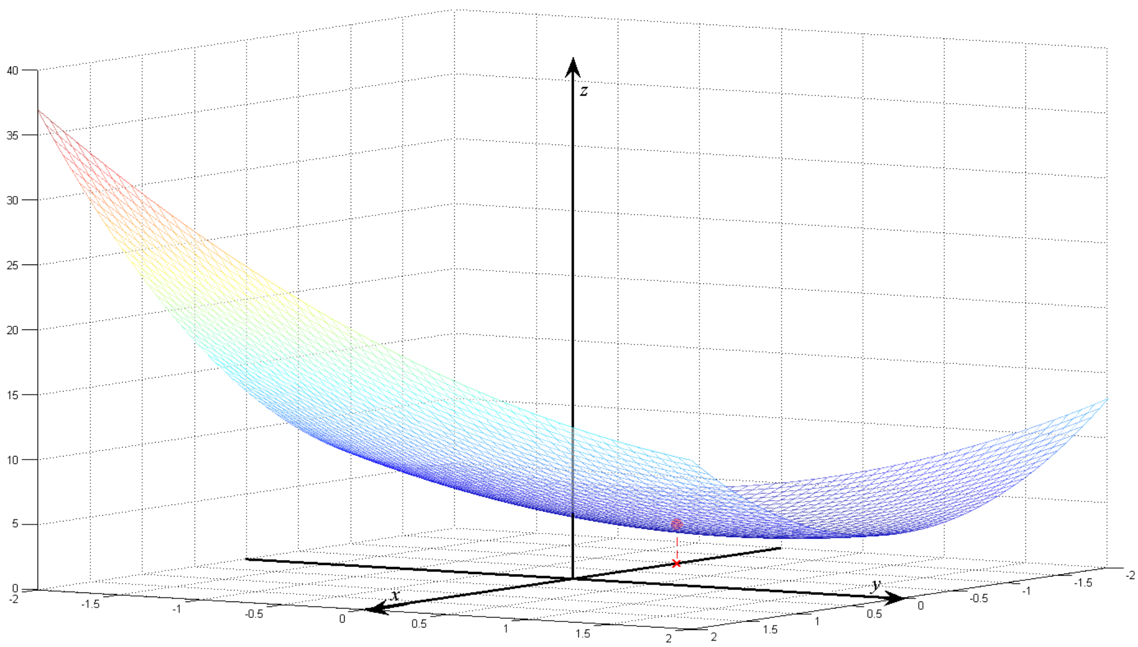
$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 4, \\ f''_{yy}(x,y) &= 2, \\ f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)(x,y) &= -2. \end{aligned}$$

Így a P pontban a másodrendű deriváltmátrix determinánsa:

$$D(P) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8-4=4.$$

A másodrendű deriváltmátrix determinánsa pozitív a P pontban, ebből következik, hogy itt szélsőértéke van az f függvénynek. Mivel $f''_{xx}(P)=4>0$, ezért a P pontban az f függvénynek lokális minimuma van.

Az alábbi ábrán szemléltettük az f függvényt, bejelöltük a P pontot is:



$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

25.3. Házi Feladat. *Határozzuk meg az $f(x,y)=(x^2-6x)\cdot(y^2-4y)$ függvény szélsőértékeit!*

Megoldás.

i) Szükséges feltétel vizsgálata:

Mivel a függvény mindenhol parciálisan differenciálható, ezért lokális szélsőértéke ott lehet, ahol mindkét parciális deriváltja 0, azaz

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= (2x-6)\cdot(y^2-4y) = 2\cdot(x-3)\cdot y\cdot(y-4) = 0, \\ f'_y(x,y) &= (x^2-6x)\cdot(2y-4) = x\cdot(x-6)\cdot 2\cdot(y-2) = 0. \end{aligned}$$

Az első egyenlet alapján $x=3$ vagy $y=0$, vagy $y=4$. A második egyenletből $x=0$ vagy $x=6$, vagy $y=2$. Így az alábbi stacionárius helyeket találtuk:

$$P_1=(3;\ 2),\quad P_2=(0;\ 0),\quad P_3=(6;\ 0),\quad P_4=(0;\ 4),\quad P_5=(6;\ 4).$$

ii) Elégséges feltétel vizsgálata:

A másodrendű deriváltak:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 2\cdot(y^2-4y), \\ f''_{yy}(x,y) &= 2\cdot(x^2-6x), \\ f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)(x,y) &= (2x-6)\cdot(2y-4). \end{aligned}$$

Írjuk fel a P_i, $(i=1\dots5)$ pontokban a másodrendű deriváltmátrix determinánsát:

$$D(P_1) = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -18 \end{vmatrix} = 144 > 0.$$

$$D(P_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$D(P_3) = \begin{vmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{vmatrix} = -576 < 0.$$

$$D(P_4) = \begin{vmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{vmatrix} = -576 < 0.$$

$$D(P_5) = \begin{vmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 0 \end{vmatrix} = -576 < 0.$$

A másodrendű deriváltmátrix determinánsa pozitív a P_1 pontban, így itt a függvénynek szélsőértéke van. Mivel $f''_{xx}(P_1)=-8<0$, ezért a P_1 pontban az f függvénynek lokális maximuma.

A P_3, P_4, P_5 pontokban a másodrendű deriváltmátrix determinánsa negatív, így ezekben a pontokban nincs szélsőérték.

A P_2 pontban a másodrendű deriváltmátrix szemidefinit, így itt más módszerrel kell vizsgálni a szélsőértéket.

$$f(x,y)=(x^2-6x)\cdot(y^2-4y)=x\cdot y\cdot(x-6)\cdot(y-4)$$

A fenti alakból látszik, hogy az $y=-x$ egyenes mentén haladva $x=\xi_1$ választás mellett, ahol $0<\xi_1<6$ a függvényérték:

$$f(\xi_1,-\xi_1) = -\xi_1^2\cdot(\xi_1-6)\cdot(-\xi_1-4)<0,$$

de az $y=x$ egyenes mentén haladva $x=\xi_2$ választás mellett, ahol $0<\xi_2<4$ a függvényérték:

$$f(\xi_2,\xi_2) = \xi_2^2\cdot(\xi_2-6)\cdot(-\xi_2-4)>0.$$

Azaz a P_2 pontban a függvényérték 0, de a környezetében a függvény felvesz pozitív és negatív értékeket is, így a pontban nem lehet szélsőérték. $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

25.4. Házi Feladat. *Határozzuk meg az $f(x,y)=x^2+y^2$ függvény totális szélsőértékeit az $(x-2)^2+(y-1)^2\leq 1$ feltétel mellett.*

Megoldás.

I) Szabad szélsőérték keresése:

i) Szükséges feltétel vizsgálata
Mivel a függvény mindenhol parciálisan differenciálható, ezért lokális szélsőértéke ott lehet, ahol mindkét parciális deriváltja 0, azaz

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x=0 \\ f'_y(x,y) &= 2y=0. \end{aligned}$$

A fenti egyeneletek alapján az $f(x,y)$ függvénynek a $P(0{,}0)$ pontban lehet szélsőértéke.

ii) Elégségesség
Írjuk fel a függvény második deriváltjait:

$$\begin{array}{lll} f''_{xx}(x,y) = 2 & & f''_{xy}(x,y) = 0 \\ f''_{yx}(x,y) = 0 & & f''_{yy}(x,y) = 2 \end{array}$$

Felírva a második derivált mátrix determinánsát a P pontban

$$D(P)=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4>0$$

Ezért P-ben a függvénynek szélsőértéke van. Mivel $f''_{xx}(P)>0$, ezért a függvénynek a P pontban lokális minimuma van. Mivel a P pont nem esik a tartományba, ezért a totális szélsőértékek megállapításakor nem kell figyelembe venni, a feltételes szélsőértékek tehát a körlap határvonalán lesznek.

II) Feltételes szélsőérték: A tartomány szélén kell megnéznünk a függvény lehetséges szélsőértékeit.

i) Alkalmazzuk a Lagrange-féle multiplikátoros módszert!
Ennek során a feltételből átrendezéssel kapott $F(x,y)=(x-2)^2+(y-1)^2-1=0$ függvényt kombináljuk az eredeti f függvénnyel:

$$\Phi(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot F(x,y)=x^2+y^2+\lambda\cdot((x-2)^2+(y-1)^2-1).$$

Az így kapott $\Phi(x,y,\lambda)$ háromváltozós függvény lehetséges szélsőértékeit keressük.

ii) Szükséges feltétel

Mivel a függvény mindenhol parciálisan differenciálható, ezért lokális szélsőértéke ott lehet, ahol mindhárom parciális deriváltja 0, azaz

$$\begin{aligned}\Phi'_x(x,y,\lambda) &= 2x+2\cdot\lambda\cdot(x-2)=0\\ \Phi'_y(x,y,\lambda) &= 2y+2\cdot\lambda\cdot(y-1)=0\\ \Phi'_\lambda(x,y,\lambda) &= (x-2)^2+(y-1)^2-1=0\end{aligned}$$

Az első egyenletet 2-vel osztva és az első két egyenletet átrendezve:

$$\begin{aligned}\Phi'_x(x,y,\lambda) &= (\lambda+1)x=2\lambda\\ \Phi'_y(x,y,\lambda) &= 2(\lambda+1)y=2\lambda\\ \Phi'_\lambda(x,y,\lambda) &= (x-2)^2+(y-1)^2-1=0\end{aligned}$$

Az első két egyenlet jobb oldalainak egyenlőségéből következik a bal oldalak egyenlősége, azaz

$$(\lambda+1)x=2(\lambda+1)y \quad\Rightarrow\quad (\lambda+1)\cdot(x-2y)=0.$$

Innen $\lambda=-1$ vagy $x=2y$.

a) Vizsgáljuk az $\lambda=-1$ esetet!
Ekkor az első egyenlet $0=2$ ellentmondásra vezet, azaz nem található olyan pont, amely kielégíti az egyenletrendszert.

b) A lehetséges szélsőérték helyek esetén tehát $x=2y$, amit a harmadik egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned}(2y-2)^2+(y-1)^2-1 &= 0\\ 4(y-1)^2+(y-1)^2-1 &= 0\\ 5(y-1)^2-1 &= 0\\ (y-1)^2 &= \tfrac{1}{5}\\ y-1 &= \pm\tfrac{1}{\sqrt5}\end{aligned}$$

Így $y_1=1+\frac{1}{\sqrt5}$ és $y_2=1-\frac{1}{\sqrt5}$. Így $x_1=2\cdot(1+\frac{1}{\sqrt5})$ és $x_2=2\cdot(1-\frac{1}{\sqrt5})$.

Azaz a függvénynek a $P_1(\frac12\cdot(1+\frac{1}{\sqrt5}),1+\frac{1}{\sqrt5})$, $P_2(\frac12\cdot(1-\frac{1}{\sqrt5}),1-\frac{1}{\sqrt5})$ lehet feltételes szélsőértéke.

iii) Elégségesség

Mivel a függvény kompakt halmazon értelmezett, mindkét változójában folytonos függvény, így a Weierstrass-tétel értelmében a tartományon felveszi szélsőértékeit.

Írjuk fel tehát a függvény értékeit a megtalált stacionárius pontokban. Abban a pontban lesz feltételes minimum, ahol a függvényérték a legkisebb és abban a pontban lesz feltételes maximum, ahol a függvényérték a legnagyobb:

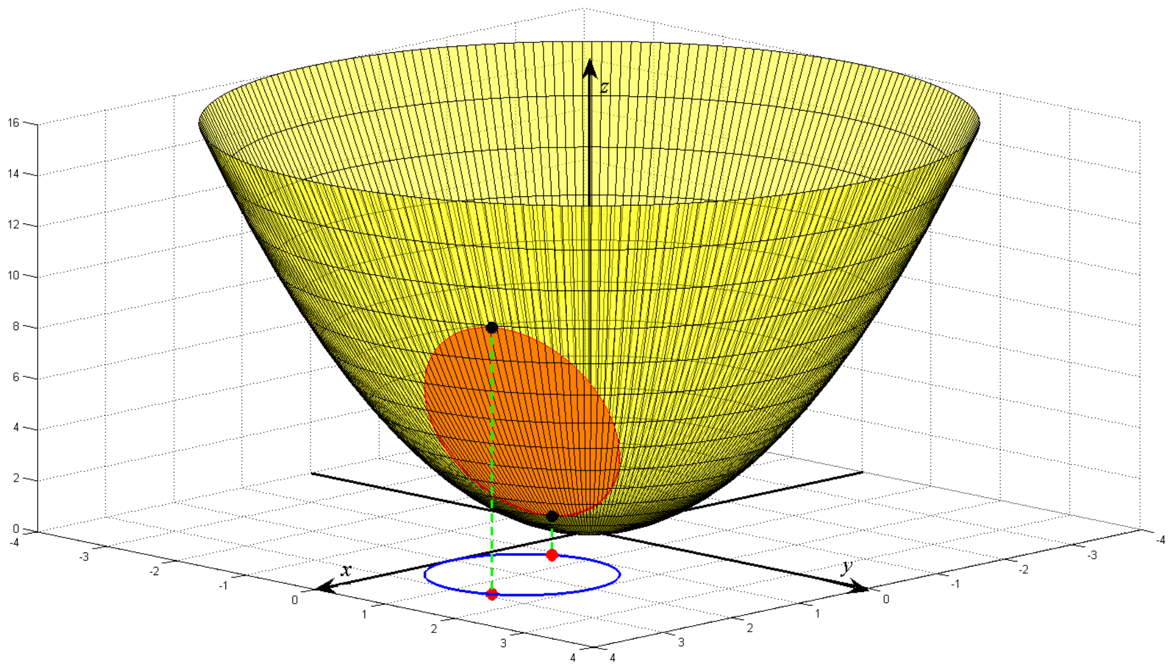
- $P_1=(\frac12\cdot(1+\frac{1}{\sqrt5}),1+\frac{1}{\sqrt5})$,

$$f(P_1)=\frac14\cdot(1+\frac{1}{\sqrt5})^2+(1+\frac{1}{\sqrt5})^2=\frac32+\frac{\sqrt5}{2}.$$

- $P_2=(\frac12\cdot(1-\frac{1}{\sqrt5}),1-\frac{1}{\sqrt5})$,

$$f(P_2)=\frac14\cdot(1-\frac{1}{\sqrt5})^2+(1-\frac{1}{\sqrt5})^2=\frac32-\frac{\sqrt5}{2}.$$

Tehát a függvénynek a P_2 pontban van lokális minimuma és a P_1 pontban lokális maximuma.



$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

26. fejezet

Vonalintegrál és alkalmazásai

26.1. Gyakorlat

26.1.1. Vonalintegrál

26.1. Feladat. *Számítsuk ki a* $\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *vonalintegrált, ha*

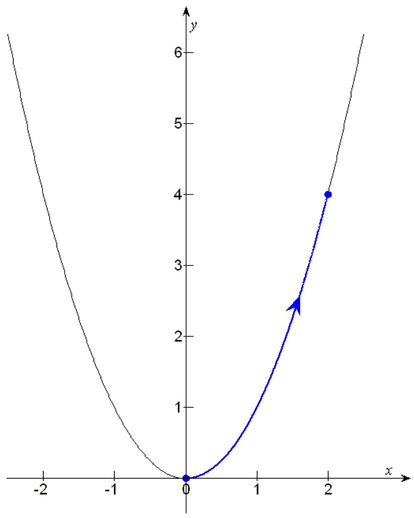
$$P(x,y) = x, \quad Q(x,y) = -y$$

és Γ *az* $y = x^2$ *görbe* $x \in [0,\ 2]$ $([0,\ 0] \rightsquigarrow [2,\ 4])$.

Megoldás.

A görbe paraméterezése:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & t^2 \\ & t:\ 0 \rightsquigarrow 2 & \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 1 \\ y'(t) & = & 2t \\ & t:\ 0 \rightsquigarrow 2 & \end{array}\right\}$$



Ekkor a vonalintegrál:

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_0^2 P(x(t),y(t))\cdot x'(t) + Q(x(t),y(t))\cdot y'(t)\ dt = \int\limits_0^2 t\cdot 1 + (-t^2)\cdot 2t\ dt =$$

$$= \int\limits_0^2 t - 2t^3\ dt = \left[\frac{t^2}{2} - 2\cdot\frac{t^4}{4}\right]_0^2 = \frac{2^2}{2} - 2\cdot\frac{2^4}{4} = -6. \qquad \diamond$$

26.2. Feladat. *Számítsuk ki a* $\int\limits_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *vonalintegrált, ha*

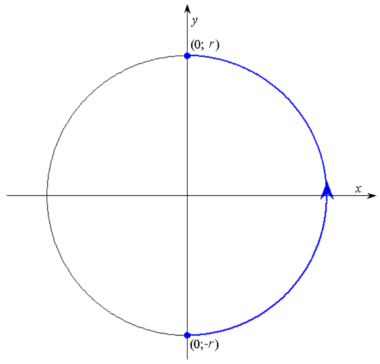
$$P(x,y)=0, \quad Q(x,y)=x$$

és Γ *az* $x^2+y^2=r^2$ *egyenletű kör* $[0,-r]\rightsquigarrow[0,r]$ *íve pozitív körüljárással, azaz a jobb félkör.*

Megoldás.

A görbe paraméterezése:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & r\cdot\cos t \\ y(t) & = & r\cdot\sin t \\ t: & -\frac{\pi}{2}\rightsquigarrow\frac{\pi}{2} & \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & -r\cdot\sin t \\ y'(t) & = & r\cdot\cos t \\ t: & -\frac{\pi}{2}\rightsquigarrow\frac{\pi}{2} & \end{array}\right\}$$



Ekkor a vonalintegrál:

$$\int\limits_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P(x(t),y(t))\cdot x'(t)+Q(x(t),y(t))\cdot y'(t)\ dt=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cdot\cos t\cdot r\cos t\ dt=r^2\cdot\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\ dt=r^2\cdot\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\ dt=$$

$$=r^2\cdot\left[\frac{1}{2}t+\frac{\sin 2t}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=r^2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\sin(-\pi)\right)=\frac{\pi}{2}r^2.\ \diamondsuit$$

26.3. Feladat. *Számítsuk ki a* $\int\limits_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *vonalintegrált, ha*

$$P(x,y)=x^2+y^2, \quad Q(x,y)=y^2-x^2$$

és Γ *a* $[0,\ 0]$, $[1,\ 0]$, $[0{,}1]$ *csúcsok által meghatározott háromszög pozitív körüljárással.*

Megoldás.

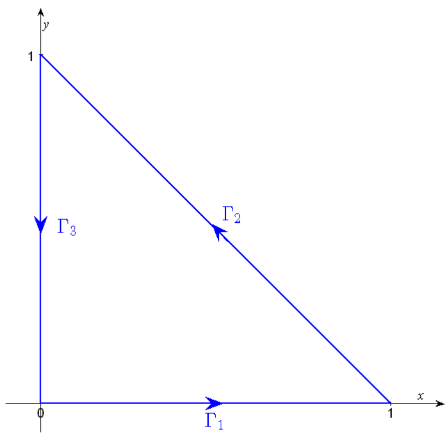
A Γ görbét három elemi görbe uniójára bontjuk, ezek az elemi görbék legyenek a háromszög oldalai.

A görbék paraméterezése:

$$\Gamma_1: \quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & 0 \\ t: & 0\rightsquigarrow 1 & \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 1 \\ y'(t) & = & 0 \\ t: & 0\rightsquigarrow 1 & \end{array}\right\}$$

$$\Gamma_2: \quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & 1-t \\ t: & 1\rightsquigarrow 0 & \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 1 \\ y'(t) & = & -1 \\ t: & 1\rightsquigarrow 0 & \end{array}\right\}$$

$$\Gamma_3: \quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & 0 \\ y(t) & = & t \\ t: & 1\rightsquigarrow 0 & \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 0 \\ y'(t) & = & 1 \\ t: & 1\rightsquigarrow 0 & \end{array}\right\}$$



Ekkor a vonalintegrál:

$$\int_{\Gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{\Gamma_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int_{\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int_{\Gamma_3} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$=\int_0^1 t^2\ dt+\int_1^0 t^2+(1-t)^2-(1-t)^2+t^2\ dt+\int_1^0 t^2\ dt=$$

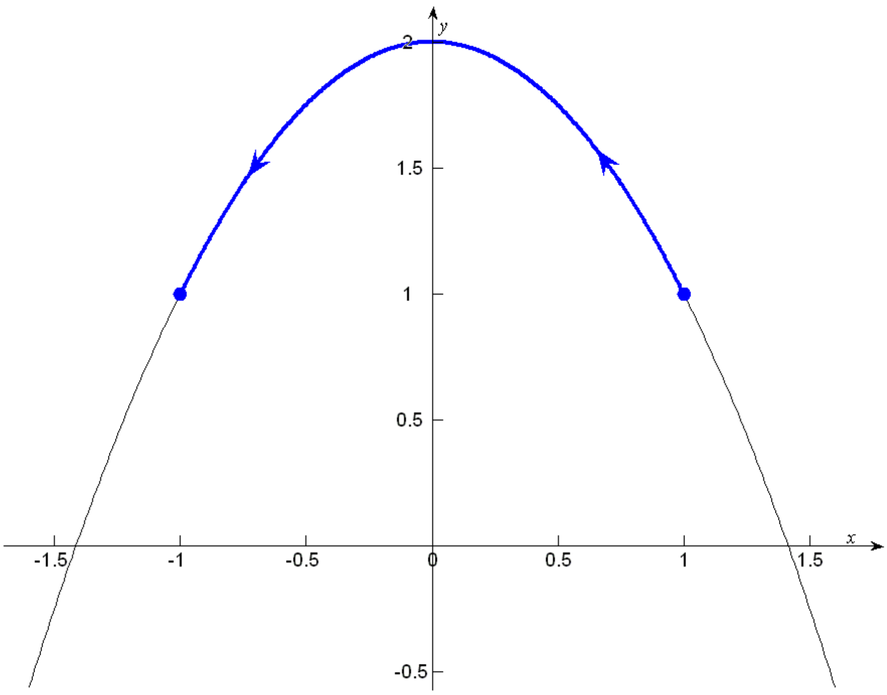
$$=\int_0^1 t^2-t^2-t^2-t^2\ dt=-2\int_0^1 t^2\ dt=\left[-\frac{2}{3}t^3\right]_0^1=-\frac{2}{3}. \qquad \diamondsuit$$

26.4. Feladat. *Számítsuk ki a* $\int_{\Gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *vonalintegrált, ha*

$$P(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y)=\frac{-x}{x^2+y^2}$$

és Γ *az* $y=-x^2+2$ *görbe* $x\in[-1,\ 1]$ $([1,\ 1]\rightsquigarrow[-1,\ 1])$.

Megoldás.



Vegyük észre, hogy $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, hiszen

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

és

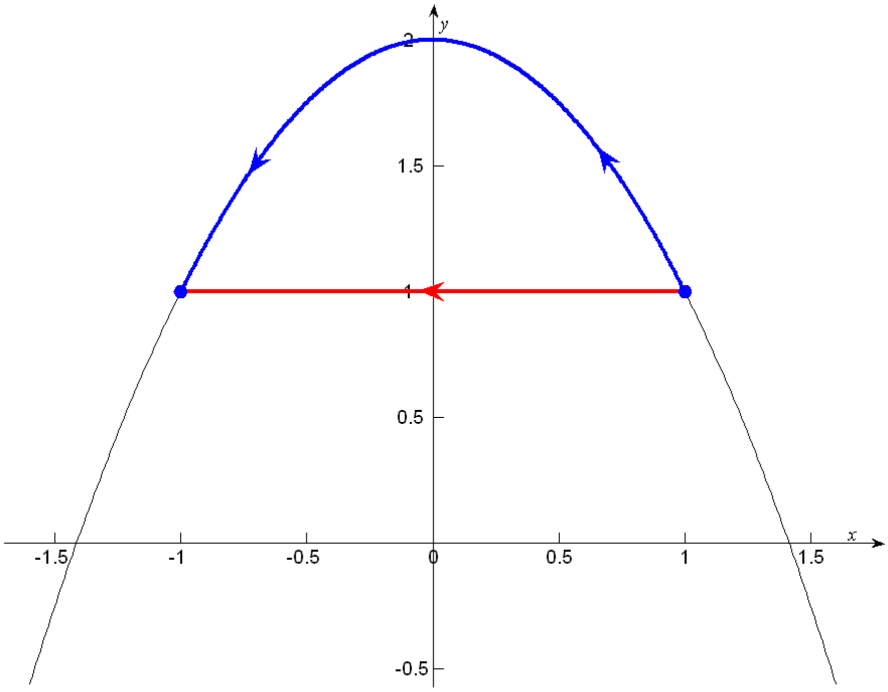
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-1\cdot(x^2+y^2)+x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Mivel $\mathscr{D}_P = \mathscr{D}_Q = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0{,}0)\}$, ami nem csillagszerű tartomány, ezért érdemes az értelmezési tartományt leszűkíteni, mondjuk az

$$V := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y > 0, x \in \mathbb{R}\right\}$$

halmazra, amely már csillagszerű. Ekkor a vonalintegrál az úttól független. Tetszőleges $[1,\ 0] \rightsquigarrow [-1,\ 0]$ görbe mentén számolhatjuk.

Számoljuk ki a pirossal jelölt Γ_1 vonal mentén a vonalintegrált!



A görbe paraméterezése:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & 1 \\ t:\ 1 \rightsquigarrow -1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 1 \\ y'(t) & = & 0 \\ t:\ 1 \rightsquigarrow -1 \end{array}\right\}$$

Ekkor a vonalintegrál:

$$\int_{\Gamma_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_1^{-1} P(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),y(t)) \cdot y'(t)\ dt =$$

$$= \int_1^{-1} \frac{1}{t^2+1} \cdot 1 + \frac{-t}{1+t^2} \cdot 0\ dt = \int_1^{-1} \frac{1}{t^2+1}\ dt = \Big[\operatorname{arctgt}\Big]_1^{-1} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}. \diamondsuit$$

26.1.2. Primitív függvény (potenciál) keresés

26.5. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y) = \left(3x^2y + y^2x + 5,\ x^3 + x^2y - 3\right)$$

függvény egy primitív függvényét, ha létezik!

Megoldás.

i) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^2$, ami csillagszerű tartomány.

ii) Legyen $P(x,y) = 3x^2y + y^2x + 5$ és $Q(x,y) = x^3 + x^2y - 3$. Ekkor

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 2xy,$$

azaz f-nek létezik primitív függvénye és a vonalintegrál független az úttól. Ekkor f integrálfüggvénye primitív függvény is egyben.

iii) Az integrálfüggvény meghatározása

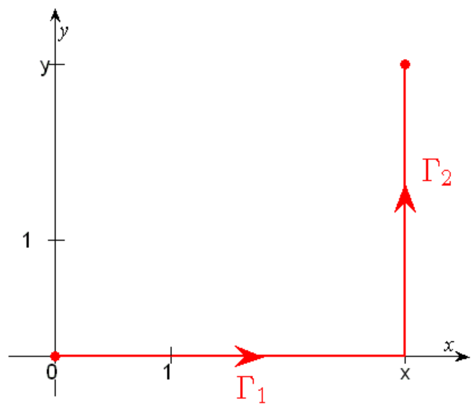
$$F(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

ahol (a,b) egy tetszőleges, de rögzített pont a tartományból. A vonalintgerált az (a,b) pont és az (x,y) futópont között tetszőleges úton végezhetjük.

Legyen $(a,b) = (0{,}0)$ és végezzük az integrálást a koordinátatengelyekkel párhuzamos $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ úton, azaz

$$\Gamma_1: \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & 0 \\ t: & 0 \rightsquigarrow x & \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 1 \\ y'(t) & = & 0 \\ t: & 0 \rightsquigarrow x & \end{array}\right\}$$

$$\Gamma_2: \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & x \\ y(t) & = & t \\ t: & 0 \rightsquigarrow y & \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 0 \\ y'(t) & = & 1 \\ t: & 0 \rightsquigarrow y & \end{array}\right\}$$



$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\Gamma_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{\Gamma_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_0^x 5\ dt + \int_0^y x^3 + x^2t - 3\ dt = [5t]_0^x + \left[x^3t + \frac{1}{2}x^2t^2 - 3t\right]_0^y =$$

$$= 5x + x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 - 3y = F(x,y).$$

◊

26.6. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

függvény egy primitív függvényét, ha létezik!

Megoldás.

i) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ami nem csillagszerű tartomány. Ezért az értelmezési tartományt leszűkítjük:

$$U := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x > 0, y \in \mathbb{R}\right\}$$

Ez már csillagszerű tartomány. (Természetesen a $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ tartomány is megfelelő lett volna.)

ii) Legyen $P(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ és $Q(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$. Ekkor

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

azaz f-nek létezik primitív függvénye és a vonalintegrál független az úttól. Ekkor f integrálfüggvénye primitív függvény is egyben.

iii) Az integrálfüggvény meghatározása

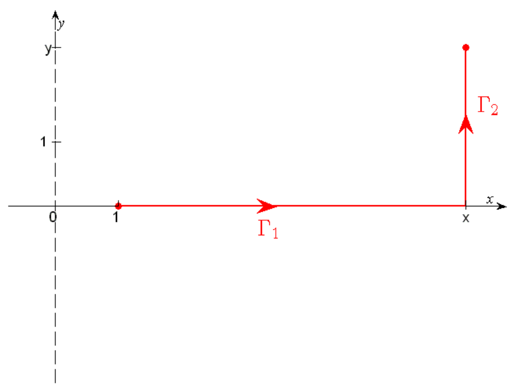
$$F(x,y) = \int\limits_{(a,b)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

ahol (a,b) egy tetszőleges, de rögzített pont a tartományból. A vonalintgerált az (a,b) pont és az (x,y) futópont között tetszőleges úton végezhetjük.

Legyen $(a,b) = (1,0)$ és végezzük az integrálást a koordinátatengelyekkel párhuzamos $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ úton, azaz

$$\Gamma_1 : \quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & 0 \\ & t: & 1 \rightsquigarrow x \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 1 \\ y'(t) & = & 0 \\ & t: & 1 \rightsquigarrow x \end{array}\right\}$$

$$\Gamma_2 : \quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & x \\ y(t) & = & t \\ & t: & 0 \rightsquigarrow y \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 0 \\ y'(t) & = & 1 \\ & t: & 0 \rightsquigarrow y \end{array}\right\}$$



$$\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int_{\Gamma_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int_{\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy =$$

$$= \int_1^x \frac{t}{t^2+0^2}\,dt + \int_0^y \frac{t}{x^2+t^2}\,dt = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt + \int_0^y \frac{t}{x^2+t^2}\,dt \ominus$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2t}{x^2+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u|+C = \frac{1}{2}\ln|x^2+t^2|+C.$$

$$\begin{array}{rcl} u & = & x^2+t^2 \\ du & = & 2tdt \end{array}$$

$$\ominus \Big[\ln|t|\Big]_1^x + \frac{1}{2}\Big[\ln|x^2+t^2|\Big]_0^y = \ln x - \ln 1 + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \frac{1}{2}\ln x^2 = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = F(x,y).\diamondsuit$$

26.1.3. Egzakt és egzakttá tehető differenciálegyenletek

26.7. Feladat. *Oldjuk meg a*

$$(\cos x - e^{-x}\sin y)dx + e^{-x}\cos y dy = 0$$

differenciálegyenletet!

Megoldás.

i) Legyen $P(x,y) = \cos x - e^{-x}\sin y$ és $Q(x,y) = e^{-x}\cos y$. Ekkor $\mathscr{D}_P = \mathscr{D}_Q = \mathbb{R}^2$, ami csillagszerű tartomány.

Mivel
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-x}\cos y = \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{-x}\cdot(-1)\cdot\cos y,$$
ezért a differenciálegyenlet egzakt. Olyan $F(x,y)$ függvényt keresünk, melyre $F'_x = P$ és $F'_y = Q$, azaz a
$$f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$
függvény egy primitív függvényét. Az előző feladatokban bemutatott módon járhatunk el.

ii) Az integrálfüggvény meghatározása

$$F(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

ahol (a,b) egy tetszőleges, de rögzített pont a tartományból. A vonalintgerált az (a,b) pont és az (x,y) futópont között tetszőleges úton végezhetjük.

Legyen $(a,b)=(0,0)$ és végezzük az integrálást a koordinátatengelyekkel párhuzamos $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ úton, azaz

$$\Gamma_1:\quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& t\\ y(t) &=& 0\\ t: & 0\rightsquigarrow x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) &=& 1\\ y'(t) &=& 0\\ t: & 0\rightsquigarrow x \end{array}\right\}$$

$$\Gamma_2:\quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& x\\ y(t) &=& t\\ t: & 0\rightsquigarrow y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) &=& 0\\ y'(t) &=& 1\\ t: & 0\rightsquigarrow y \end{array}\right\} \qquad \diamondsuit$$

Ekkor

$$\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int_{\Gamma_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int_{\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy =$$

$$=\int_0^x \cos t\ dt+\int_0^y e^{-x}\cos t\ dt = \Big[\sin t\Big]_0^x + e^{-x}\Big[\sin t\Big]_0^y =$$

$$=\sin x+e^{-x}\cdot\sin y = F(x,y).$$

iii) A differenciálegyenlet megoldása

$$\begin{aligned} F(x,y)=\sin x+e^{-x}\cdot\sin y &= C, \quad C\in\mathbb{R}\\ e^{-x}\cdot\sin y &= C-\sin x\\ \sin y &= e^{x}\cdot(C-\sin x)\\ y &= \arcsin(e^{x}\cdot(C-\sin x)), \quad C\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

26.8. Feladat. *Oldjuk meg az*

$$ydx-(x+y)dy=0$$

differenciálegyenletet!

Megoldás.

i) Legyen $P(x,y)=y$ és $Q(x,y)=-x-y$. Ekkor $\mathscr{D}_P=\mathscr{D}_Q=\mathbb{R}^2$, ami csillagszerű tartomány. Mivel

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1\neq\frac{\partial Q}{\partial x}=-1,$$

ezért a differenciálegyenlet nem egzakt.

ii) Multiplikátor keresés

$$\frac{P'_y-Q'_x}{Q}=\frac{2}{-x-y} \qquad \frac{Q'_x-P'_y}{P}=\frac{-2}{y}$$

Mivel $\frac{Q'_x-P'_y}{P}=\frac{-2}{y}$ hányados nem függ x-től, ezért létezik $\mu=\mu(y)$ multiplikátor, méghozzá:

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{Q'_x-P'_y}{P}=\frac{-2}{y}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mu'}{\mu} &= \frac{-2}{y} \\
\int \frac{\mu'}{\mu}\, dy &= \int \frac{-2}{y}\, dy \\
\ln|\mu| &= -2\ln|y| + C \\
|\mu| &= e^{-2\ln|y|+C} = e^{C} \cdot e^{\ln \frac{1}{y^2}}
\end{aligned}$$

Legyen $C_1 := \pm e^C$, így

$$\mu = C_1 \cdot \frac{1}{y^2}$$

Például $C_1 = 1$ választás mellett a multiplikátor $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$. Így

$$P_1 := \mu(y) \cdot P(x,y) = \frac{1}{y} \quad Q_1 := \mu(y) \cdot Q(x,y) = -\frac{x+y}{y^2}$$

Ekkor

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial Q_1}{\partial x},$$

azaz a $P_1 dx + Q_1 dy = 0$ már egzakt differenciálegyenlet.

iii) A f függvény nem értelmezett az x tengely pontjaiban, azaz

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) |\ x \in \mathbb{R}\},$$

ami nem csillagszerű tartomány. Szűkítsük le az értelmezési tartományt:

$$U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$$

iv) Az $f(x,y) = (\frac{1}{y}, -\frac{x+y}{y^2})$ függvény integrálfüggvényének meghatározása:

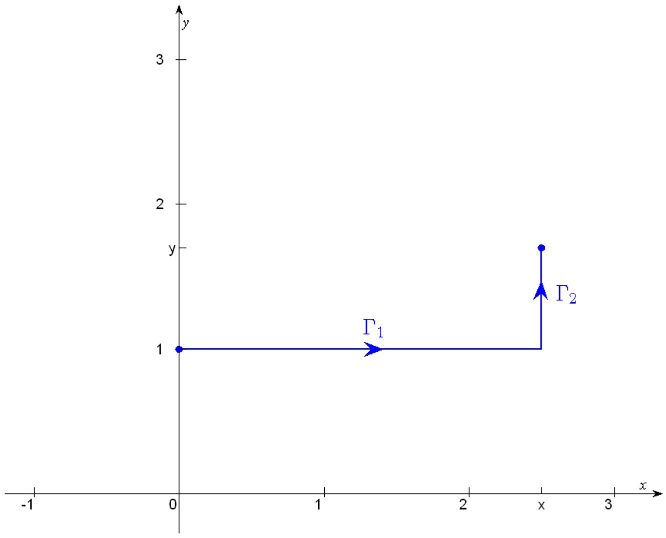
$$F(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P_1(x,y)dx + Q_1(x,y)dy,$$

ahol (a,b) egy tetszőleges, de rögzített pont a tartományból. A vonalintgerált az (a,b) pont és az (x,y) futópont között tetszőleges úton végezhetjük.

Legyen $(a,b) = (0,1)$ és végezzük az integrálást a koordinátatengelyekkel párhuzamos $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ úton, azaz

$$\Gamma_1 : \quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& t \\ y(t) &=& 1 \\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 0 \rightsquigarrow x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) &=& 1 \\ y'(t) &=& 0 \\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 0 \rightsquigarrow x} \end{array}\right\}$$

$$\Gamma_2 : \quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& x \\ y(t) &=& t \\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 1 \rightsquigarrow y} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) &=& 0 \\ y'(t) &=& 1 \\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 1 \rightsquigarrow y} \end{array}\right\}$$



$$F(x,y)=\int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{\Gamma_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int\limits_{\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$=\int\limits_0^x 1\ dt+\int\limits_1^y \frac{-x-t}{t^2}\ dt=\int\limits_0^x 1\ dt-x\int\limits_1^y \frac{1}{t^2}\ dt-\int\limits_1^y \frac{1}{t}\ dt=\Big[t\Big]_0^x-x\Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^y-\Big[\ln|t|\Big]_1^y=$$

$$=x+\frac{x}{y}-x-\ln y+\ln 1=\frac{x}{y}-\ln y.$$

v) A differenciálegyenlet megoldása

$$F(x,y)=\frac{x}{y}-\ln y=C,\quad C\in\mathbb{R}$$

26.1. Megjegyzés. *Most nem lehet a megoldást explicit alakban megadni, ezért meghagyjuk a fenti implicit alakot.*

$\diamondsuit$

26.2. Megjegyzés. *A példából is látszik, hogy (P_1,Q_1) értelmezési tartománya szűkebb (P,Q) értelmezési tartományánál. Tehát nem biztos, hogy az eredeti differenciálegyenlet összes megoldását megtaláljuk, ha egzakttá tesszük.*

26.9. Feladat. *Oldjuk meg az*

$$\left(y\mathrm{tg}x-\frac{1}{\cos x}\right)dx+dy=0$$

differenciálegyenletet!

Megoldás.

i) Legyen $P(x,y)=y\mathrm{tg}x-\frac{1}{\cos x}$ és $Q(x,y)=1$. Ekkor

$$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y\in\mathbb{R},\ x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}\},$$

ami nem csillagszerű tartomány.

Szűkítsük le a függvényt az

$$U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \in \mathbb{R},\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$$

tartományra. Ez már csillag tartomány.

Mivel

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \mathrm{tg}x \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

ezért a differenciálegyenlet nem egzakt.

ii) Multiplikátor keresés

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{\mathrm{tg}x}{1} \qquad \frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{-\mathrm{tg}x}{y\mathrm{tg}x - \frac{1}{\cos x}} = \frac{-\sin x}{y\sin x - 1}$$

Mivel $\frac{P'_y - Q'_x}{Q}$=tg$x$ hányados nem függ y-tól, ezért létezik μ=$\mu(x)$ multiplikátor, méghozzá:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \mathrm{tg}x.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mu'}{\mu} &= \mathrm{tg}x \\
\int \frac{\mu'}{\mu}\, dx &= \int \mathrm{tg}x\ dx = \underset{\substack{t \,=\, \cos x \\ dt \,=\, -\sin x dx}}{\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx} = -\int \frac{1}{t}\, dt = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C \\
\ln|\mu| &= -\ln|\cos x| + C \\
|\mu| &= e^{-\ln|\cos x| + C} = e^C \cdot e^{\ln\frac{1}{\cos x}}
\end{aligned}$$

Legyen $C_1 := \pm e^C$, így

$$\mu = C_1 \cdot \frac{1}{\cos x}$$

Például $C_1 = 1$ választás mellett a multiplikátor $\mu(x) = \frac{1}{\cos x}$. Így

$$P_1 := \mu(x) \cdot P(x,y) = \frac{1}{\cos x} \cdot (y\mathrm{tg}x - \frac{1}{\cos x}) = y \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \qquad Q_1 := \mu(x) \cdot Q(x,y) = \frac{1}{\cos x}$$

Ekkor

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x),$$

azaz a $P_1 dx + Q_1 dy = 0$ már egzakt differenciálegyenlet.

iii) A függvény értelmezési tartománya nem változott meg, azaz

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \in \mathbb{R},\ x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\},$$

ami nem csillagszerű tartomány. Most is az

$$U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \in \mathbb{R},\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$$

tartományra szűkítjük a függvényt. Ez már csillagszerű tartomány.

iv) Az $f(x,y) = (y \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}, \frac{1}{\cos x})$ függvény integrálfüggvényének meghatározása:

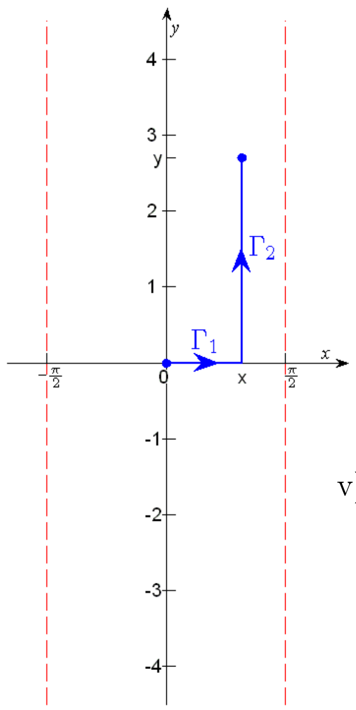
$$F(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P_1(x,y)dx + Q_1(x,y)dy,$$

ahol (a,b) egy tetszőleges, de rögzített pont a tartományból. A vonalintgerált az (a,b) pont és az (x,y) futópont között tetszőleges úton végezhetjük.

Legyen $(a,b) = (0,0)$ és végezzük az integrálást a koordinátatengelyekkel párhuzamos $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ úton, azaz

$$\Gamma_1: \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & 0 \\ t: & 0 \rightsquigarrow x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 1 \\ y'(t) & = & 0 \\ t: & 0 \rightsquigarrow x \end{array}\right\}$$

$$\Gamma_2: \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & x \\ y(t) & = & t \\ t: & 0 \rightsquigarrow y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 0 \\ y'(t) & = & 1 \\ t: & 0 \rightsquigarrow y \end{array}\right\}$$



$$F(x,y) = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{\Gamma_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{\Gamma_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_0^x \frac{-1}{\cos^2 t}\, dt + \frac{1}{\cos x} \cdot \int_0^y 1\, dt = \Big[\mathrm{tg} t\Big]_0^x + \frac{1}{\cos x}\Big[t\Big]_0^y \overset{=}{\diamondsuit}$$

$$= \mathrm{tg} x + \frac{y}{\cos x}.$$

v) A differenciálegyenlet megoldása

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) = \mathrm{tg} x + \dfrac{y}{\cos x} & = & C, \quad C \in \mathbb{R} \\ y & = & (C - \mathrm{tg} x) \cdot \cos x, \quad C \in \mathbb{R} \end{array}$$

26.2. Házi Feladatok

26.1. Házi Feladat. *Számítsuk ki a* $\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *vonalintegrált, ha*

$$P(x,y) = x + y, \quad Q(x,y) = y - x$$

és Γ *az egységkör első síknegyedbe eső íve negatív irányítással* ($[0,\ 1] \rightsquigarrow [1,\ 0]$).

megoldás

26.2. Házi Feladat. *Számítsuk ki a* $\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *vonalintegrált, ha*

$$P(x,y) = x + y, \quad Q(x,y) = x \cdot y$$

és Γ *az* $y = e^x$ *görbe* $x \in [0,\ 1]$ ($[0,\ 1] \rightsquigarrow [1,\ e]$).

megoldás

26.3. Házi Feladat. *Számítsuk ki a* $\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *vonalintegrált, ha*

$$P(x,y) = x^2 + y^2, \quad Q(x,y) = y^2 - x^2$$

Γ *a* $[1,\ 1]$, $[1,\ 2]$, $[2{,}1]$ *csúcsok által meghatározott háromszög pozitív körüljárással.*

megoldás

26.4. Házi Feladat. *Számítsuk ki a* $\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *vonalintegrált, ha*

$$P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y^2 \cdot e^{x \cdot y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{y}{sqrtx^2+y^2} + 2 \cdot x \cdot y \cdot e^{x \cdot y^2}$$

Γ *pedig a* $[2{,}1]$ *középpontú* $r = 5$ *sugarú kör, pozitív körüljárással.*

megoldás

26.5. Házi Feladat. *Számítsuk ki a* $\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *vonalintegrált, ha*

$$P(x,y) = 2xy - 2y - 1, \quad Q(x,y) = x^2 - 2x - 2y$$

Γ *pedig az* $[1{,}1]$ *középpontú egység sugarú kör,* $[1{,}0] \rightsquigarrow [1{,}2]$ *íve negatív körüljárással, azaz a bal félkör.*

megoldás

26.6. Házi Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y) = \left(xy^2, x^2y\right)$$

függvény egy primitív függvényét, ha létezik!

megoldás

26.7. Házi Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y) = \left(e^x \cdot (e^y \cdot (x - y + 2) + y)\,,\ e^x \cdot (e^y \cdot (x - y) + 1)\right)$$

függvény egy primitív függvényét, ha létezik!

megoldás

26.8. Házi Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y)=\left(\frac{3-x}{x^2+y^2-6x-2y+6},\ \frac{1-y}{x^2+y^2-6x-2y+6}\right)$$

függvény egy primitív függvényét, ha létezik!

megoldás

26.9. Házi Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y)=\left(\frac{x^2+2xy+5y^2}{(x+y)^3},\ \frac{x^2-2xy+y^2}{(x+y)^3}\right)$$

függvény egy primitív függvényét, ha létezik!

megoldás

26.10. Házi Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y)=(e^x+ye^y,\ -e^y-xe^x)$$

függvény egy primitív függvényét, ha létezik!

megoldás

26.11. Házi Feladat. *Oldjuk meg a*

$$(x-y)dx+(y-x)dy=0$$

differenciálegyenletet!

megoldás

26.12. Házi Feladat. *Oldjuk meg a*

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\cos x\cdot\sin y+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\cos y\cdot\sin x\right)\cdot y'=0$$

differenciálegyenletet!

megoldás

26.13. Házi Feladat. *Oldjuk meg a*

$$(x^2+y^2+1)dx-2xydy=0$$

differenciálegyenletet!

megoldás

26.14. Házi Feladat. *Oldjuk meg a*

$$(2xy^2-y)dx+(y^2+x+y)dy=0$$

differenciálegyenletet!

megoldás

26.3. Megoldások

26.1. Házi Feladat. *Számítsuk ki a* $\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *vonalintegrált, ha*

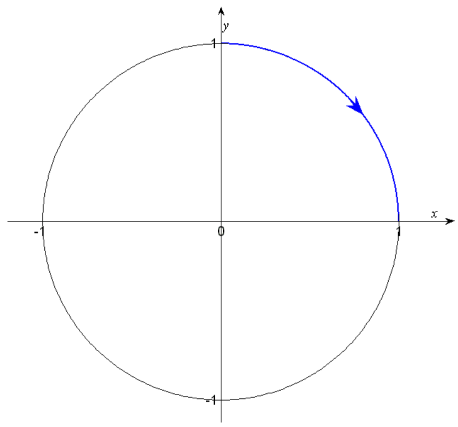
$$P(x,y) = x + y, \quad Q(x,y) = y - x$$

és Γ *az egységkör első síknegyedbe eső íve negatív irányítással* $([0,\ 1] \rightsquigarrow [1,\ 0])$.

Megoldás.

A görbe paraméterezése:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos t \\ y(t) & = & \sin t \\ t: \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & -\sin t \\ y'(t) & = & \cos t \\ t: \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 0 \end{array}\right\}$$



Ekkor a vonalintegrál:

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} P(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),y(t)) \cdot y'(t)\ dt =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\cos t + \sin t) \cdot (-\sin t) + (\sin t - \cos t)\cos t\ dt = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} -1\ dt = \frac{\pi}{2} \quad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

26.2. Házi Feladat. *Számítsuk ki a* $\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *vonalintegrált, ha*

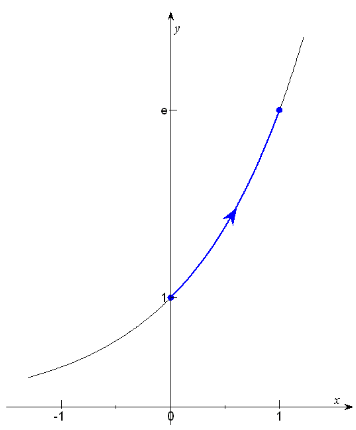
$$P(x,y) = x + y, \quad Q(x,y) = x \cdot y$$

és Γ *az* $y = e^x$ *görbe* $x \in [0,\ 1]$ $([0,\ 1] \rightsquigarrow [1,\ e])$.

Megoldás.

A görbe paraméterezése:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & e^t \\ t: 0 \rightsquigarrow 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 1 \\ y'(t) & = & e^t \\ t: 0 \rightsquigarrow 1 \end{array}\right\}$$



Ekkor a vonalintegrál:

$$\int_{\Gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_0^1 P(x(t),y(t))\cdot x'(t)+Q(x(t),y(t))\cdot y'(t)\ dt=$$

$$=\int_0^1 (t+e^t)\cdot 1+(t\cdot e^t)\cdot e^t\ dt=\int_0^1 t+e^t+t\cdot e^{2t}\ dt ⊜$$

Primitív függvény meghatározása:

$$\int t\cdot e^{2t}\ dt=t\cdot\frac{e^{2t}}{2}-\int\frac{e^{2t}}{2}\ dt=t\cdot\frac{e^{2t}}{2}-\frac{e^{2t}}{4}+C.$$

$$\begin{array}{rclcrcl} f(t) & = & t & \quad & g'(t) & = & e^{2t} \\ f'(t) & = & 1 & \quad & g(t) & = & \frac{e^{2t}}{2} \end{array}$$

$$⊜\left[\frac{t^2}{2}+e^t+t\cdot\frac{e^{2t}}{2}-\frac{e^{2t}}{4}\right]_0^1=\left(\frac{1}{2}+e+\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}\right)-\left(1-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}+e+\frac{e^2}{4}.$$ ♢

vissza a feladathoz

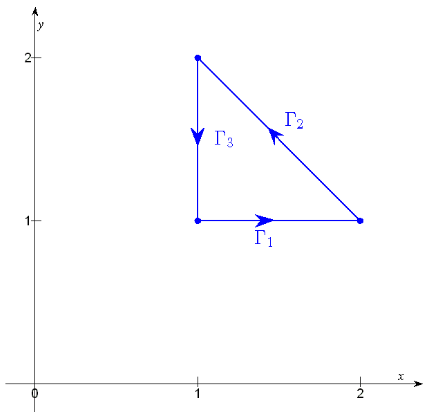
26.3. Házi Feladat. *Számítsuk ki a* $\int_{\Gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *vonalintegrált, ha*

$$P(x,y)=x^2+y^2,\quad Q(x,y)=y^2-x^2$$

Γ *a* [1, 1], [1, 2], [2,1] *csúcsok által meghatározott háromszög pozitív körüljárással.*

Megoldás.
A Γ görbét három elemi görbe uniójára bontjuk, ezek az elemi görbék legyenek a háromszög oldalai.

A görbék paraméterezése:



$$\Gamma_1:\quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & 1 \\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 1\rightsquigarrow 2} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 1 \\ y'(t) & = & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 1\rightsquigarrow 2} \end{array}\right\}$$

$$\Gamma_2:\quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & 3-t \\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 2\rightsquigarrow 1} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 1 \\ y'(t) & = & -1 \\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 2\rightsquigarrow 1} \end{array}\right\}$$

$$\Gamma_3:\quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & 1 \\ y(t) & = & t \\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 2\rightsquigarrow 1} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 0 \\ y'(t) & = & 1 \\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 2\rightsquigarrow 1} \end{array}\right\}$$

Ekkor a vonalintegrál:

$$\int_{\Gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{\Gamma_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int_{\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int_{\Gamma_3} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$=\int_1^2 t^2+1\ dt+\int_2^1 t^2+(3-t)^2-(3-t)^2+t^2\ dt+\int_2^1 t^2-1\ dt=$$

$$=\int_2^1 2t^2-2\ dt=\left[\frac{2}{3}t^3-2t\right]_2^1=\frac{2}{3}-2-\frac{16}{3}+4=-\frac{8}{3}.$$ ♢

26.3. Megjegyzés. *Vessük össze az eredményt 26.3 feladatban számolt vonalintegrállal, gondoljuk meg a hasonlóságokat és a különbség okát!*

vissza a feladathoz

26.4. Házi Feladat. *Számítsuk ki a* $\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *vonalintegrált, ha*

$$P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y^2 \cdot e^{x \cdot y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2 \cdot x \cdot y \cdot e^{x \cdot y^2}$$

Γ *pedig a* [2,1] *középpontú* $r = 5$ *sugarú kör, pozitív körüljárással.*

Megoldás.
Vegyük észre, hogy $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, hiszen

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + 2 \cdot y \cdot e^{x \cdot y^2} + y^2 \cdot e^{x \cdot y^2} \cdot x \cdot 2 \cdot y$$

és

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + 2 \cdot x \cdot y \cdot e^{x \cdot y^2} \cdot y^2 + 2 \cdot y \cdot e^{x \cdot y^2}$$

Ekkor a vonalintegrál az úttól független és bármely zárt görbe mentén vett vonalintegrál nulla:

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

$\diamondsuit$

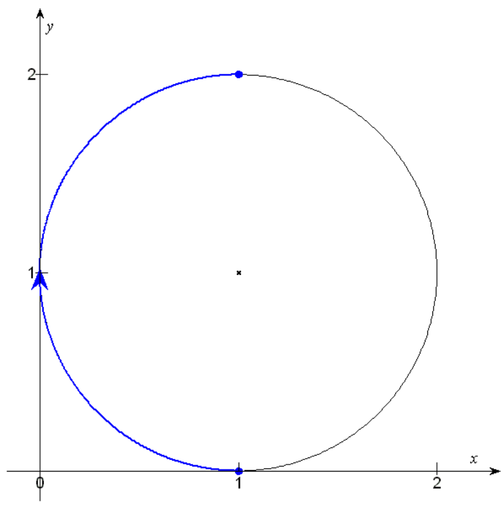
vissza a feladathoz

26.5. Házi Feladat. *Számítsuk ki a* $\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *vonalintegrált, ha*

$$P(x,y) = 2xy - 2y - 1, \quad Q(x,y) = x^2 - 2x - 2y$$

Γ *pedig az* [1,1] *középpontú egység sugarú kör,* $[1,0] \rightsquigarrow [1,2]$ *íve negatív körüljárással, azaz a bal félkör.*

Megoldás.

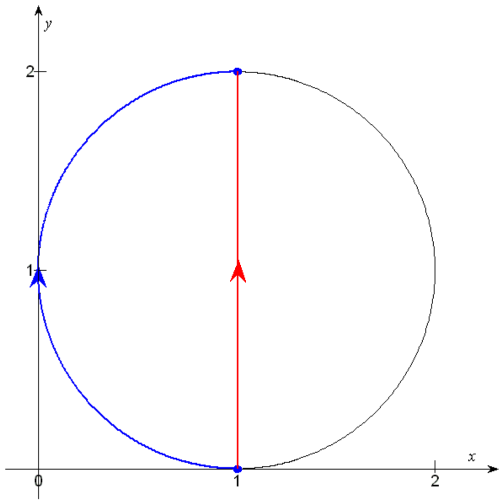


Vegyük észre, hogy
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2.$$
Ekkor a vonalintegrál az úttól független, azaz tetszőleges $[1,\ 0] \rightsquigarrow [1,\ 2]$ görbe mentén számolhatjuk.

Számoljuk ki a pirossal jelölt Γ_1 vonal mentén a vonalintegrált!

A görbe paraméterezése:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & 1 \\ y(t) & = & t \\ & t:\ 0 \rightsquigarrow 2 & \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 0 \\ y'(t) & = & 1 \\ & t:\ 0 \rightsquigarrow 2 & \end{array}\right\}$$



Ekkor a vonalintegrál:

$$\int_{\Gamma_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_0^2 P(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),y(t)) \cdot y'(t)\ dt =$$
$$= \int_0^2 -2t - 1\ dt = \left[-t^2 - t\right]_0^2 = -6.$$ ◊

vissza a feladathoz

26.6. Házi Feladat. *Határozzuk meg az*
$$f(x,y) = \left(xy^2, x^2y\right)$$
függvény egy primitív függvényét, ha létezik!

Megoldás.

i) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^2$, ami csillagszerű tartomány.

ii) Legyen $P(x,y) = xy^2$ és $Q(x,y) = x^2y$. Ekkor
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy,$$
azaz f-nek létezik primitív függvénye és a vonalintegrál független az úttól. Ekkor f integrálfüggvénye primitív függvény is egyben.

iii) Az integrálfüggvény meghatározása

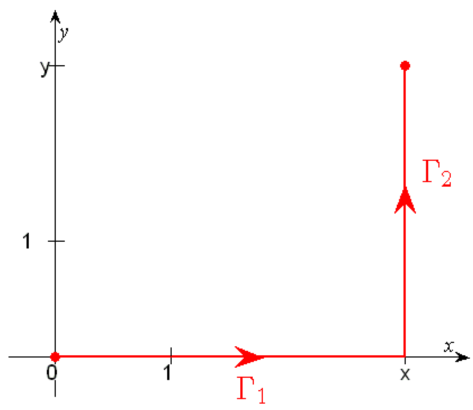
$$F(x,y)=\int\limits_{(a,b)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

ahol (a,b) egy tetszőleges, de rögzített pont a tartományból. A vonalintgerált az (a,b) pont és az (x,y) futópont között tetszőleges úton végezhetjük.

Legyen $(a,b)=(0{,}0)$ és végezzük az integrálást a koordinátatengelyekkel párhuzamos $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ úton, azaz

$$\Gamma_1: \quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & 0 \\ & t: \ 0 \rightsquigarrow x & \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 1 \\ y'(t) & = & 0 \\ & t: \ 0 \rightsquigarrow x & \end{array}\right\}$$

$$\Gamma_2: \quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & x \\ y(t) & = & t \\ & t: \ 0 \rightsquigarrow y & \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 0 \\ y'(t) & = & 1 \\ & t: \ 0 \rightsquigarrow y & \end{array}\right\}$$



$$\int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{\Gamma_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int\limits_{\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$=\int\limits_0^y x^2t\ dt=\left[\frac{1}{2}x^2t^2\right]_0^y=\frac{1}{2}x^2y^2=F(x,y). \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

26.7. Házi Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y)=\left(e^x\cdot(e^y\cdot(x-y+2)+y)\,,\ e^x\cdot(e^y\cdot(x-y)+1)\right)$$

függvény egy primitív függvényét, ha létezik!

Megoldás.

i) $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}^2$, ami csillagszerű tartomány.

ii) Legyen $P(x,y)=e^x\cdot(e^y\cdot(x-y+2)+y)$ és $Q(x,y)=e^x\cdot(e^y\cdot(x-y)+1)$. Ekkor

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cdot(e^y\cdot(x-y+2)-e^y+1),$$

azaz f-nek létezik primitív függvénye és a vonalintegrál független az úttól. Ekkor f integrálfüggvénye primitív függvény is egyben.

iii) Az integrálfüggvény meghatározása

$$F(x,y)=\int\limits_{(a,b)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

ahol (a,b) egy tetszőleges, de rögzített pont a tartományból. A vonalintgerált az (a,b) pont és az (x,y) futópont között tetszőleges úton végezhetjük.

Legyen $(a,b)=(0{,}0)$ és végezzük az integrálást a koordinátatengelyekkel párhuzamos $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ úton, azaz

$$\Gamma_1:\quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t\\ y(t) & = & 0\\ t: & 0\rightsquigarrow x & \end{array}\right\}\Rightarrow\quad \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 1\\ y'(t) & = & 0\\ t: & 0\rightsquigarrow x & \end{array}\right\}$$

$$\Gamma_2:\quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & x\\ y(t) & = & t\\ t: & 0\rightsquigarrow y & \end{array}\right\}\Rightarrow\quad \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 0\\ y'(t) & = & 1\\ t: & 0\rightsquigarrow y & \end{array}\right\}$$

$$\int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{\Gamma_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int\limits_{\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$=\int\limits_0^x 3\cdot e^t\cdot(t+2)\;dt+\int\limits_0^y e^x\cdot\big(e^t\cdot(x-t)+1\big)\,dt=$$

$$=3\int\limits_0^x t\cdot e^t\;dt+6\int\limits_0^x e^t\;dt+xe^x\int\limits_0^y e^t\;dt-e^x\int\limits_0^y t\cdot e^t\;dt+e^x\cdot\int\limits_0^y 1\;dt\ominus$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int t\cdot e^t\;dt=t\cdot e^t-\int e^t\;dt=t\cdot e^t-e^t+C.$$

$$\begin{array}{rclcrcl} f(t) & = & t & & g'(t) & = & e^t\\ f'(t) & = & 1 & & g(t) & = & e^t \end{array}$$

$$\ominus 3\cdot\Big[t\cdot e^t-e^t\Big]_0^x+6\cdot\Big[e^t\Big]_0^x+x\cdot e^x\cdot\Big[e^t\Big]_0^y-e^x\cdot\Big[t\cdot e^t-e^t\Big]_0^y+e^x\cdot\Big[t\Big]_0^y=$$

$$=3\cdot x\cdot e^x-3\cdot e^x+3+6\cdot e^x-6+x\cdot e^x\cdot e^y-x\cdot e^x-e^x\cdot y\cdot e^y+y\cdot e^x.$$ ♢

vissza a feladathoz

26.8. Házi Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y)=\left(\frac{3-x}{x^2+y^2-6x-2y+6},\ \frac{1-y}{x^2+y^2-6x-2y+6}\right)$$

függvény egy primitív függvényét, ha létezik!

Megoldás.

i) A koordinátafüggvények nevezője teljesnégyzetté alakítható:

$$x^2+y^2-6x-2y+6=(x-3)^2+(y-1)^2-4.$$

Ebből az alakból már jól látható, hogy a függvény a $C=(3{,}1)$ középpontú, $r=2$ sugarú kör pontjainak kivételével minden $\mathbb{R}^2$-beli pontban értelmezett, azaz

$$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\left\{(x,y)\in\mathbb{R}|\ (x-3)^2+(y-1)^2=4\right\},$$

ami nem csillagszerű tartomány. Ezért az értelmezési tartományt leszűkítjük:

$$U:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ (x-3)^2+(y-1)^2<4\right\}.$$

Ez már csillagszerű tartomány.

ii) Legyen $P(x,y)=\frac{3-x}{x^2+y^2-6x-2y+6}$ és $Q(x,y)=\frac{1-y}{x^2+y^2-6x-2y+6}$. Ekkor

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{(1-y)\cdot(2\cdot x-6)}{((x-3)^2+(y-1)^2-4)^2},$$

azaz f-nek létezik primitív függvénye és a vonalintegrál független az úttól. Ekkor f integrálfüggvénye primitív függvény is egyben.

iii) Az integrálfüggvény meghatározása

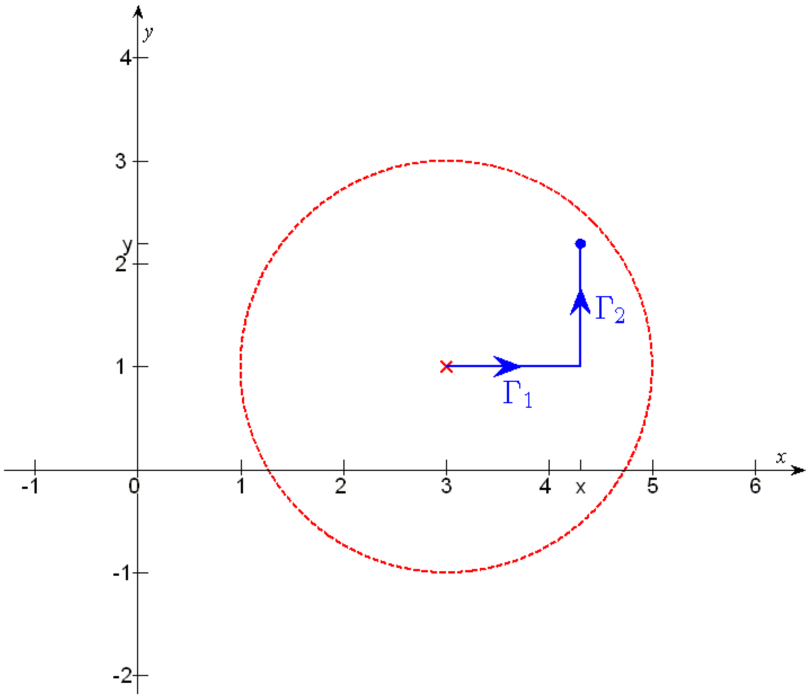
$$F(x,y)=\int\limits_{(a,b)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

ahol (a,b) egy tetszőleges, de rögzített pont a tartományból. A vonalintgerált az (a,b) pont és az (x,y) futópont között tetszőleges úton végezhetjük.

Legyen $(a,b)=(3{,}1)$ és végezzük az integrálást a koordinátatengelyekkel párhuzamos $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ úton, azaz

$$\Gamma_1:\quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& 3-t\\ y(t) &=& 1\\ t: & 0 \rightsquigarrow & 3-x \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{rcl} x'(t) &=& -1\\ y'(t) &=& 0\\ t: & 0 \rightsquigarrow & 3-x \end{array}\right\}$$

$$\Gamma_2:\quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& x\\ y(t) &=& 1-t\\ t: & 0 \rightsquigarrow & 1-y \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{rcl} x'(t) &=& 0\\ y'(t) &=& -1\\ t: & 0 \rightsquigarrow & 1-y \end{array}\right\}$$



$$\int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int\limits_{\Gamma_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int\limits_{\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_0^{3-x} \frac{-t}{t^2-4}\,dt + \int\limits_0^{1-y} \frac{-t}{(x-3)^2+t^2-4}\,dt \ominus$$

A primitív függvény meghatározása:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2-4}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{2}\ln|u|+C = -\frac{1}{2}\ln|t^2-4|+C.$$

$$\begin{aligned} u &= t^2-4 \\ du &= 2tdt \end{aligned}$$

és

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2t}{(x-3)^2+t^2-4}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{s}\,ds = -\frac{1}{2}\ln|s|+C = -\frac{1}{2}\ln|(x-3)^2+t^2-4|+C$$

$$\begin{aligned} s &= (x-3)^2+t^2-4 \\ ds &= 2tdt \end{aligned}$$

Így

$$\ominus -\frac{1}{2}\left[\ln|t^2-4|\right]_1^{3-x} - \frac{1}{2}\left[\ln|(x-3)^2+t^2-4|\right]_0^{y} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|(3-x)^2-4| + \frac{1}{2}\ln|1^2-4| - \frac{1}{2}\ln|(x-3)^2+(1-y)^2-4| + \frac{1}{2}\ln|(x-3)^2-4| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln|(x-3)^2+(1-y)^2-4| = F(x,y).$$ ♢

vissza a feladathoz

26.9. Házi Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y)=\left(\frac{x^2+2xy+5y^2}{(x+y)^3},\ \frac{x^2-2xy+y^2}{(x+y)^3}\right)$$

függvény egy primitív függvényét, ha létezik!

Megoldás.

i) A függvény az $y=-x$ egyenletű egyenes pontjainak kivételével minden $\mathbb{R}^2$-beli pontban értelmezett, azaz

$$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}|\ x+y=0\},$$

ami nem csillagszerű tartomány. Ezért az értelmezési tartományt leszűkítjük:

$$U:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ -x<y\right\}$$

Azaz tekintjük a kérdéses egyenes feletti félsíkot. Ez már csillagszerű tartomány.

ii) Legyen $P(x,y)=\frac{x^2+2xy+5y^2}{(x+y)^3}$ és $Q(x,y)=\frac{x^2-2xy+y^2}{(x+y)^3}$. Ekkor

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(2x+10y)\cdot(x+y)^3-(x^2+2xy+5y^2)\cdot 3(x+y)^2}{(x+y)^6}$$

és

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(2x-2y)\cdot(x+y)^3-(x^2-2xy+y^2)\cdot 3(x+y)^2}{(x+y)^6}$$

Összevonás után látható, hogy $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, így az f-nek létezik primitív függvénye és a vonalintegrál független az úttól. Ekkor f integrálfüggvénye primitív függvény is egyben.

iii) Az integrálfüggvény meghatározása

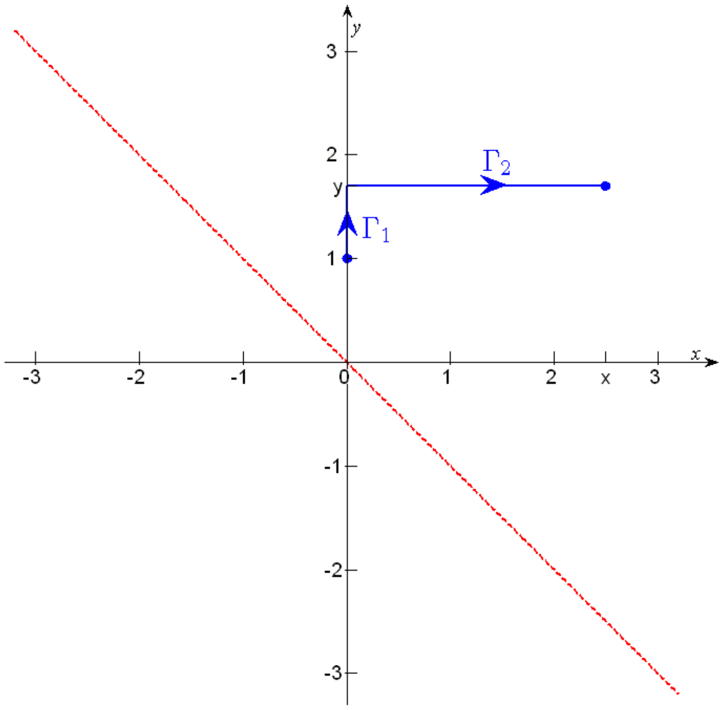
$$F(x,y)=\int\limits_{(a,b)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

ahol (a,b) egy tetszőleges, de rögzített pont a tartományból. A vonalintgerált az (a,b) pont és az (x,y) futópont között tetszőleges úton végezhetjük.

Legyen $(a,b)=(0{,}1)$ és végezzük az integrálást a koordinátatengelyekkel párhuzamos $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ úton, azaz

$$\Gamma_1:\quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & 0\\ y(t) & = & t\\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 1\rightsquigarrow y}\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 0\\ y'(t) & = & 1\\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 1\rightsquigarrow y}\end{array}\right\}$$

$$\Gamma_2:\quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t\\ y(t) & = & y\\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 0\rightsquigarrow x}\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 1\\ y'(t) & = & 0\\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 0\rightsquigarrow x}\end{array}\right\}$$



$$\int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{\Gamma_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int\limits_{\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$=\int\limits_1^y \frac{t^2}{t^3}\,dt+\int\limits_0^x \frac{t^2+2ty+5y^2}{(t+y)^3}\,dt=\int\limits_1^y \frac{1}{t}\,dt+\int\limits_0^x \frac{t^2+2ty+y^2+4y^2}{(t+y)^3}\,dt \ominus$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int \frac{t^2+2ty+y^2+4y^2}{(t+y)^3}\,dt=\int \frac{(t+y)^2}{(t+y)^3}\,dt+\int \frac{4y^2}{(t+y)^3}\,dt=\int \frac{1}{t+y}\,dt+4y^2\int \frac{1}{(t+y)^3}\,dt=$$

$$\begin{array}{rcl} u & = & t+y \\ du & = & dt \end{array}$$

$$=\int \frac{1}{u}\,du+4y^2\int u^{-3}\,du=\ln|u|+4y^2\frac{1}{-2u^2}+C=$$

$$=\ln|t+y|-\frac{2y^2}{(t+y)^2}+C.$$

$$\ominus \Big[\ln|t|\Big]_1^y+\left[\ln|t+y|-\frac{2y^2}{(t+y)^2}\right]_0^x=\ln|y|-\ln 1+\ln|x+y|-\frac{2y^2}{(x+y)^2}-\ln|y|+\frac{2y^2}{y^2}=$$

$$=\ln|x+y|-\frac{2y^2}{(x+y)^2}+2=F(x,y).$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

26.10. Házi Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y)=(e^x+ye^y,\ -e^y-xe^x)$$

függvény egy primitív függvényét, ha létezik!

Megoldás.

i) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^2$, ami csillagszerű tartomány.

ii) Legyen $P(x,y) = e^x + ye^y$ és $Q(x,y) = -e^y - xe^x$. Ekkor

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^y + ye^y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x + xe^x,$$

azaz f-nek nem létezik primitív függvénye. $\diamondsuit$

vissza a feladathoz

26.11. Házi Feladat. *Oldjuk meg a*

$$(x-y)dx + (y-x)dy = 0$$

differenciálegyenletet!

Megoldás.

i) Legyen $P(x,y) = x-y$ és $Q(x,y) = y-x$. Ekkor $\mathscr{D}_P = \mathscr{D}_Q = \mathbb{R}^2$, ami csillagszerű tartomány. Mivel

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -1,$$

ezért a differenciálegyenlet egzakt. Olyan $F(x,y)$ függvényt keresünk, melyre $F'_x = P$ és $F'_y = Q$, azaz a

$$f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

függvény egy primitív függvényét.

ii) Az integrálfüggvény meghatározása

$$F(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

ahol (a,b) egy tetszőleges, de rögzített pont a tartományból. A vonalintgerált az (a,b) pont és az (x,y) futópont között tetszőleges úton végezhetjük.

Legyen $(a,b) = (0{,}0)$ és végezzük az integrálást a koordinátatengelyekkel párhuzamos $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ úton, azaz

$$\Gamma_1: \left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& t \\ y(t) &=& 0 \\ t: & 0 \rightsquigarrow x & \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) &=& 1 \\ y'(t) &=& 0 \\ t: & 0 \rightsquigarrow x & \end{array}\right\}$$

$$\Gamma_2: \left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& x \\ y(t) &=& t \\ t: & 0 \rightsquigarrow y & \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) &=& 0 \\ y'(t) &=& 1 \\ t: & 0 \rightsquigarrow y & \end{array}\right\}$$

$\diamondsuit$

Ekkor

$$F(x,y) = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\Gamma_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{\Gamma_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_0^x t\,dt + \int_0^y t - x\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x + \left[\frac{1}{2}t^2 - xt\right]_0^y = \frac{x^2+y^2}{2} - xy = \frac{(x-y)^2}{2}.$$

iii) A differenciálegyenlet megoldása

$$\begin{aligned} F(x,y) = \frac{(x-y)^2}{2} &= C, \quad C \in \mathbb{R} \\ (x-y)^2 &= 2C \\ x-y &= \pm\sqrt{2C} \\ y &= x \mp \sqrt{2C}, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

26.12. Házi Feladat. *Oldjuk meg a*

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \cos x \cdot \sin y + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \cos y \cdot \sin x \right) \cdot y' = 0$$

differenciálegyenletet!

Megoldás.

i) Áttérve a megszokott differenciális formára:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \cos x \cdot \sin y \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \cos y \cdot \sin x \right) dy = 0$$

ii) Legyen tehát $P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \cos x \cdot \sin y$ és $Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \cos y \cdot \sin x$. Ekkor $\mathscr{D}_P = \mathscr{D}_Q = \mathbb{R}^2$, ami csillagszerű tartomány.

Mivel

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2} \cdot x \cdot (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \cdot 2y + \cos x \cdot \cos y = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{2} \cdot y \cdot (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \cdot 2x + \cos y \cdot \cos x,$$

ezért a differenciálegyenlet egzakt. Olyan $F(x,y)$ függvényt keresünk tehát, melyre $F'_x = P$ és $F'_y = Q$, azaz a

$$f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

függvény egy primitív függvényét.

iii) Az integrálfüggvény meghatározása

$$F(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

ahol (a,b) egy tetszőleges, de rögzített pont a tartományból. A vonalintgerált az (a,b) pont és az (x,y) futópont között tetszőleges úton végezhetjük.

Legyen $(a,b) = (0{,}0)$ és végezzük az integrálást a koordinátatengelyekkel párhuzamos $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ úton, azaz

$$\Gamma_1 : \left. \begin{aligned} x(t) &= t \\ y(t) &= 0 \\ t:\ 0 &\rightsquigarrow x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x'(t) &= 1 \\ y'(t) &= 0 \\ t:\ 0 &\rightsquigarrow x \end{aligned} \right\}$$

$$\Gamma_2 : \left. \begin{aligned} x(t) &= x \\ y(t) &= t \\ t:\ 0 &\rightsquigarrow y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x'(t) &= 0 \\ y'(t) &= 1 \\ t:\ 0 &\rightsquigarrow y \end{aligned} \right\}$$

Ekkor

$$F(x,y)=\int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{\Gamma_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int\limits_{\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$=\int\limits_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2}}\,dt+\int\limits_0^y \frac{t}{\sqrt{x^2+t^2}}+\cos t\sin x\quad dt=$$

$$=\int\limits_0^x \operatorname{sgn}(t)\;dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^y \frac{2t}{\sqrt{x^2+t^2}}\;dt+\int\limits_0^y \cos t\sin x\;dt \ominus$$

Primitív függvény meghatározása:

$$\int \operatorname{sgn}(t)\;dt=\left\{\begin{array}{ll} \int 1\;dt=t+C & \text{ha } t>0\\ \int 0\;dt=C & \text{ha } t=0\\ -\int 1\;dt=-t+C & \text{ha } t<0\end{array}\right\}=|t|+C,$$

és

$$\frac{1}{2}\underset{\substack{u\;=\;x^2+t^2\\ du\;=\;2tdt}}{\int} \frac{2t}{\sqrt{x^2+t^2}}\;dt=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\;du=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{x^2+t^2}+C.$$

$$\ominus\Big[|t|\Big]_0^x+\Big[\sqrt{x^2+t^2}+\sin t\sin x\Big]_0^y=|x|+\sqrt{x^2+y^2}+\sin y\sin x-\sqrt{x^2}=\sqrt{x^2+y^2}+\sin y\sin x.$$

iv) A differenciálegyenlet megoldása

$$F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sin y\sin x=C,\quad C\in\mathbb{R}$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

26.13. Házi Feladat. *Oldjuk meg a*

$$(x^2+y^2+1)dx-2xydy=0$$

differenciálegyenletet!

Megoldás.

i) Legyen $P(x,y)=x^2+y^2+1$ és $Q(x,y)=-2xy$. Ekkor $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}^2$, ami csillagszerű tartomány. Mivel

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y\neq\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y,$$

ezért a differenciálegyenlet nem egzakt.

ii) multiplikátor keresés

$$\frac{P_y'-Q_x'}{Q}=\frac{2y+2y}{-2xy}=\frac{-2}{x}\qquad \frac{Q_x'-P_y'}{P}=\frac{-4x}{yx^2+y^2+1}$$

Mivel $\frac{P_y'-Q_x'}{Q}=-\frac{2}{x}$ hányados nem függ y-tól, ezért létezik $\mu=\mu(x)$ multiplikátor, méghozzá:

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{P_y'-Q_x'}{Q}=-\frac{2}{x}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mu'}{\mu} &= -2\frac{1}{x} \\
\int \frac{\mu'}{\mu}\,dx &= -2\int \frac{1}{x}\,dx \\
\ln|\mu| &= -2\ln|x|+C \\
|\mu| &= e^C\cdot\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Legyen $C_1 := \pm e^C$, így
$$\mu = C_1\cdot\frac{1}{x^2}.$$

Például $C_1 = 1$ választás mellett a multiplikátor $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$. Így

$$P_1 := \mu(x)\cdot P(x,y) = 1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{1}{x}, \quad Q_1 := \mu(x)\cdot Q(x,y) = -2\frac{y}{x}.$$

Ekkor
$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{2y}{x^2} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} = -2y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$
azaz a $P_1dx+Q_1dy=0$ már egzakt differenciálegyenlet.

iii) A függvény értelmezési tartománya nem tartalmazza az $x=0$ egyenletű egyenes pontjait, azaz
$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | y\in\mathbb{R},\ x=0\},$$
ami nem csillagszerű tartomány. Szűkítsük le az értelmezési tartományt az
$$U := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | y\in\mathbb{R},\ 0<x\}$$
ponthalmazra. Ez már csillagszerű tartomány.

iv) Az $f(x,y) = (1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{1}{x}, -2\frac{y}{x})$ függvény integrálfüggvényének meghatározása:

$$F(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P_1(x,y)dx+Q_1(x,y)dy,$$

ahol (a,b) egy tetszőleges, de rögzített pont a tartományból. A vonalintgerált az (a,b) pont és az (x,y) futópont között tetszőleges úton végezhetjük.

Legyen $(a,b) = (1{,}0)$ és végezzük az integrálást a koordinátatengelyekkel párhuzamos $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ úton, azaz

$$\Gamma_1: \left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& t \\ y(t) &=& 0 \\ & t:\ 1\rightsquigarrow x & \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) &=& 1 \\ y'(t) &=& 0 \\ & t:\ 1\rightsquigarrow x & \end{array}\right\}$$

$$\Gamma_2: \left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& x \\ y(t) &=& t \\ & t:\ 0\rightsquigarrow y & \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) &=& 0 \\ y'(t) &=& 1 \\ & t:\ 0\rightsquigarrow y & \end{array}\right\} \qquad \diamondsuit$$

Ekkor

$$F(x,y)=\int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{\Gamma_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int\limits_{\Gamma_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$=\int\limits_1^x 1+\frac{1}{t}dt-\frac{2}{x}\int\limits_0^y t\ dt=\Big[t+\ln|t|\Big]_1^x-\frac{2}{x}\cdot\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^y=x+\ln x-\frac{y^2}{x}.$$

v) A differenciálegyenlet megoldása

$$\begin{aligned} F(x,y)=x+\ln x-\frac{y^2}{x} &= C, \quad C\in\mathbb{R} \\ y &= \pm\sqrt{x^2+x\ln x-C}, \quad C\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

26.14. Házi Feladat. *Oldjuk meg a*

$$(2xy^2-y)dx+(y^2+x+y)dy=0$$

differenciálegyenletet!

Megoldás.

i) Legyen $P(x,y)=2xy^2-y$ és $Q(x,y)=y^2+x+y$. Ekkor $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}^2$, ami csillagszerű tartomány.

Mivel

$$\frac{\partial P}{\partial y}=4xy-1\neq\frac{\partial Q}{\partial x}=1,$$

ezért a differenciálegyenlet nem egzakt.

ii) multiplikátor keresés

$$\frac{P'_y-Q'_x}{Q}=\frac{4xy-2}{y^2+x+y}\qquad \frac{Q'_x-P'_y}{P}=\frac{2-4xy}{2xy^2-y}=-\frac{2}{y}$$

Mivel $\frac{Q'_x-P'_y}{P}=-\frac{2}{y}$ hányados nem függ x-től, ezért létezik $\mu=\mu(y)$ multiplikátor, méghozzá:

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{Q'_x-P'_y}{P}=-\frac{2}{y}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu'}{\mu} &= -2\frac{1}{y} \\ \int\frac{\mu'}{\mu}\,dy &= -2\int\frac{1}{y}\,dy \\ \ln|\mu| &= -2\ln|y|+C \\ |\mu| &= e^C\cdot\frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

Legyen $C_1:=\pm e^C$, így

$$\mu=C_1\cdot\frac{1}{y^2}.$$

Például $C_1 = 1$ választás mellett a multiplikátor $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$. Így

$$P_1 := \mu(y)\cdot P(x,y) = 2x - \frac{1}{y}, \quad Q_1 := \mu(y)\cdot Q(x,y) = 1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}.$$

Ekkor

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{1}{y^2} = \frac{\partial Q_1}{\partial x},$$

azaz a $P_1 dx + Q_1 dy = 0$ már egzakt differenciálegyenlet.

iii) A függvény értelmezési tartománya nem tartalmazza az $y=0$ egyenletű egyenes pontjait, azaz

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \in \mathbb{R},\ y = 0\},$$

ami nem csillagszerű tartomány. Szűkítsük le az értelmezési tartományt a

$$V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R},\ 0 < y\}$$

ponthalmazra. Ez már csillagszerű tartomány.

iv) Az $f(x,y) = (2x - \frac{1}{y}, 1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y})$ függvény integrálfüggvényének meghatározása:

$$F(x,y) = \int\limits_{(a,b)}^{(x,y)} P_1(x,y)dx + Q_1(x,y)dy,$$

ahol (a,b) egy tetszőleges, de rögzített pont a tartományból. A vonalintgerált az (a,b) pont és az (x,y) futópont között tetszőleges úton végezhetjük.

Legyen $(a,b) = (0,1)$ és végezzük az integrálást a koordinátatengelyekkel párhuzamos $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ úton, azaz

$$\Gamma_1: \quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & 1 \\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 0 \rightsquigarrow x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 1 \\ y'(t) & = & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 0 \rightsquigarrow x} \end{array}\right\}$$

$$\Gamma_2: \quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & x \\ y(t) & = & t \\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 1 \rightsquigarrow y} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 0 \\ y'(t) & = & 1 \\ \multicolumn{3}{c}{t:\ 1 \rightsquigarrow y} \end{array}\right\}$$

Ekkor

$$F(x,y) = \int\limits_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\Gamma_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{\Gamma_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_0^x 2t - 1\ dt + \int\limits_1^y 1 + \frac{x}{t^2} + \frac{1}{t}\ dt = \Big[t^2 - t\Big]_0^x + \Big[t + x\cdot\frac{t^{-1}}{-1} + \ln|t|\Big]_1^y =$$

$$= x^2 - x + y - \frac{x}{y} + \ln|y| + x - \ln 1 = x^2 - \frac{x}{y} + \ln y.$$

v) A differenciálegyenlet megoldása

$$F(x,y) = x^2 - \frac{x}{y} + \ln y = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$\diamondsuit$

vissza a feladathoz

27. fejezet

Kettősintegrál

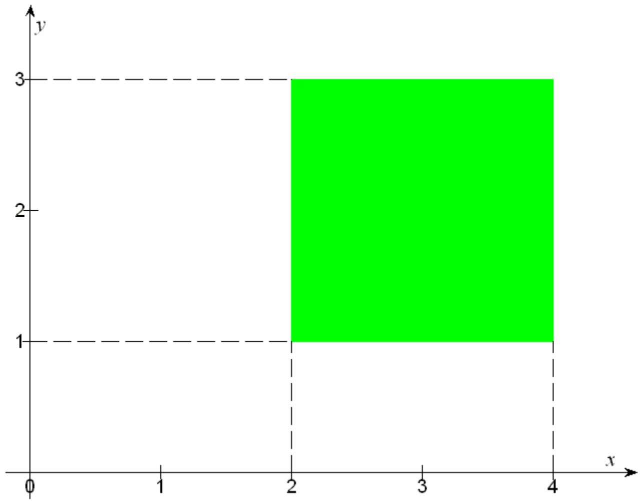
27.1. Gyakorlat

27.1. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi kettős integráloknál az integrálási tartományt és írjuk fel a határokat a fordított sorrendben történő integráláshoz! (Tegyük fel, hogy f integrálható a kérdéses tartományokon!)*

a) $\int_1^3 \int_2^4 f(x,y)\ dx\ dy$

Megoldás.
Az integrálási tartomány: $T := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\ 2 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 3\right\}$

Azaz az alábbi téglalap tartomány:



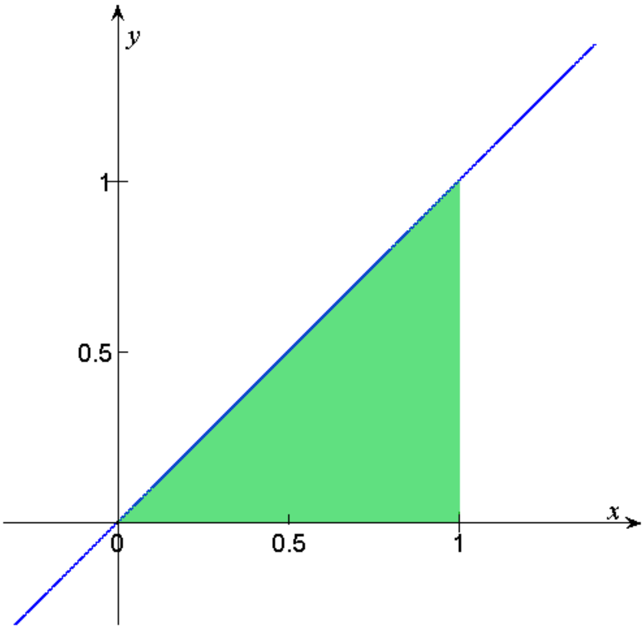
$$\int_1^3 \int_2^4 f(x,y)\ dx\ dy = \int_2^4 \int_1^3 f(x,y)\ dy\ dx$$

♢

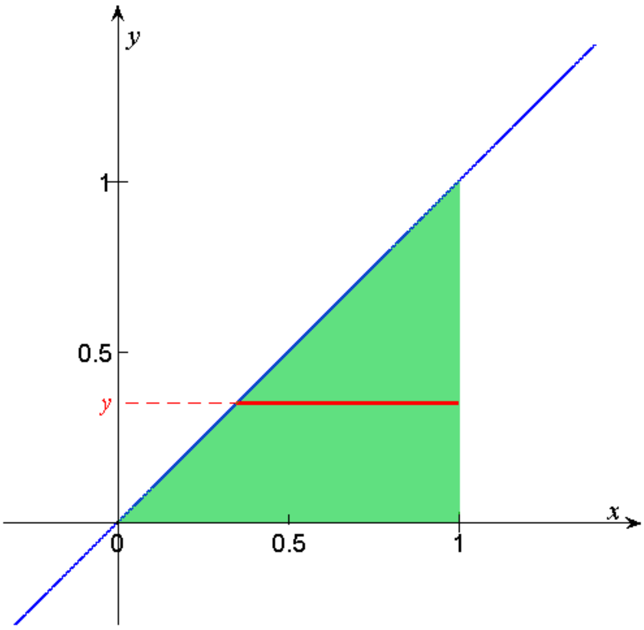
27.1. Megjegyzés. *Téglalap tartomány esetén a határok megváltoztatása nélkül felcserélhető a két integrálás sorrendje.*

b) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^x f(x,y)\ dy\ dx$

Megoldás.
Az integrálási tartomány: $T := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\right\}$
Azaz az alábbi háromszög-tartomány:



Az alábbi ábrán berajzolt vonal segít az új határok felírásánál:



$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^x f(x,y)\ dy\ dx = \int\limits_0^1 \int\limits_y^1 f(x,y)\ dx\ dy$$

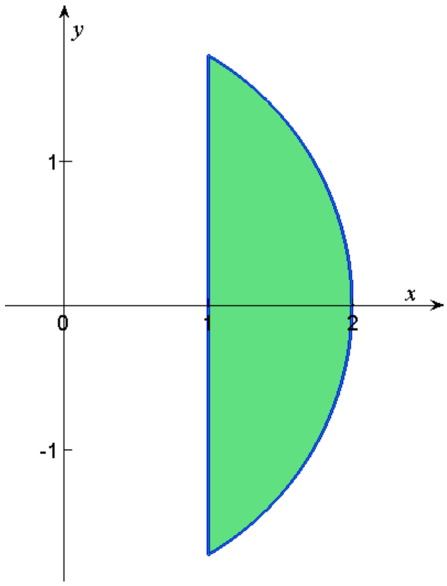
♢

c) $\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int\limits_{1}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\, dx\, dy$

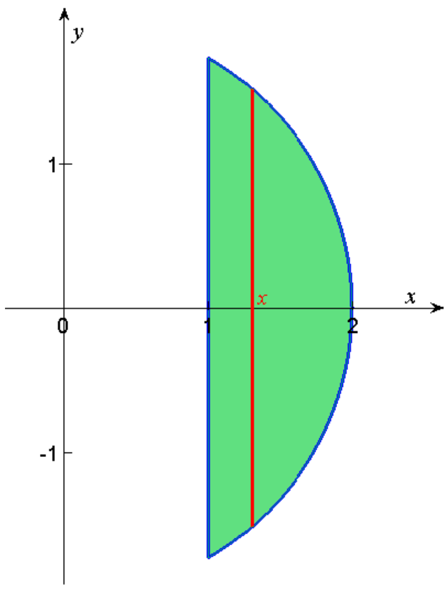
Megoldás.
Az integrálási tartomány:

$$T := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3},\ 1 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\right\}$$

Azaz az origó középpontú kör alábbi szelete:



Az alábbi ábrán berajzolt vonal segít az új határok felírásánál:



$$\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int\limits_{1}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\, dx\, dy = \int\limits_{1}^{2} \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$$

$\diamondsuit$

27.2. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi területi integrálokat. Ha lehetséges, végezzük el a számítást a szukcesszív integrálás mindkét sorrendjével!*

a) $\iint\limits_T 5x^2y-2y^3\ dxdy$, ahol $T=\{(x,y)|\ 1\le x\le 3,\ 2\le y\le 5\}$

Megoldás.
Téglalap tartományon értelmezett folytonos függvény kettősintegráljáról van szó, alkalmazható a szukcesszív integrálásra vonatkozó Fubini-tétel:

$$\iint\limits_T 5x^2y-2y^3\ dxdy=\int\limits_1^3\int\limits_2^5(5x^2y-2y^3)\ dx\ dy=\int\limits_1^3\left[\frac{5}{3}x^3y-2y^3x\right]_{x=2}^5\ dy=$$
$$=\int\limits_1^3\frac{625}{3}y-10y^3-\frac{40}{3}y+4y^3\ dy=$$
$$=\int\limits_1^3 195y-6y^3\ dy=\left[\frac{195}{2}y^2-\frac{3}{2}y^4\right]_1^3=660.$$

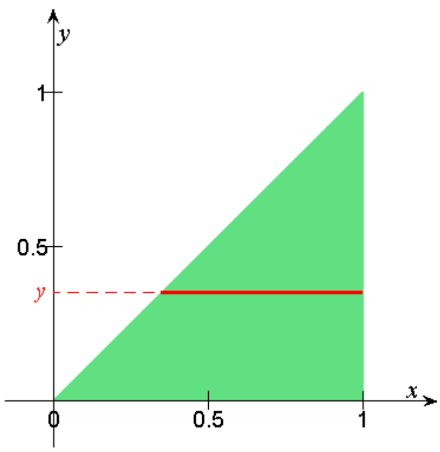
Mivel téglalap tartományon integrálunk, az integrálási tartomány ábrázolásától eltekintünk:

$$\iint\limits_T 5x^2y-2y^3\ dxdy=\int\limits_1^3\int\limits_2^5(5x^2y-2y^3)\ dx\ dy=\int\limits_2^5\int\limits_1^3(5x^2y-2y^3)\ dy\ dx=$$
$$=\int\limits_2^5\left[\frac{5}{2}x^2y^2-\frac{1}{2}y^4x\right]_{y=1}^3\ dx=\int\limits_2^5\frac{45}{2}x^2-\frac{81}{2}x-\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}x\ dx=$$
$$=\int\limits_2^5 20x^2-40x\ dx=\left[\frac{20}{3}x^3-20x^2\right]_2^5=660.$$

◊

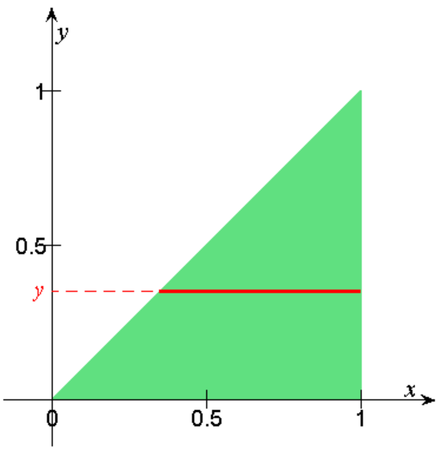
b) $\iint\limits_T x^2+y^2\ dxdy$, ahol T az x-tengely, az $y=x$ és $x=1$ egyenesek által közrezárt háromszögtartomány.

Megoldás.
Az integrálási tartomány mindkét változó szerint normál tartomány, a függvény pedig folytonos a tartományon, ezért alkalmazható a Fubini-tétel:



$$\iint\limits_T x^2+y^2\ dxdy=\int\limits_0^1\int\limits_y^1(x^2+y^2)\ dx\ dy=$$
$$=\int\limits_0^1\left[\frac{1}{3}x^3+y^2\cdot x\right]_{x=y}^1\ dy=$$
$$=\int\limits_0^1\frac{1}{3}+y^2-\frac{4}{3}y^3\ dy=$$
$$=\left[\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{3}y^4\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

Ábrázoljuk az integrálási tartományt, a fordított sorrendű integráláshoz a határok az ábráról leolvashatók:



$$\iint\limits_T x^2+y^2\ dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^x (x^2+y^2)\ dy\ dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{x}\ dx =$$

$$= \int\limits_0^1 x^3+\frac{1}{3}x^3\ dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{4}{3}x^3\ dx = \left[\frac{1}{3}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$\diamondsuit$

c) $\displaystyle\iint\limits_T x\cdot\sin xy\ dxdy$, ahol $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 0\le x\le \frac{\pi}{2},\ 0\le y\le 1\}$

Megoldás.
Téglalap tartományon értelmezett folytonos függvény kettősintegráljáról van szó, alkalmazható a szukcesszív integrálásra vonatkozó Fubini-tétel:

$$\iint\limits_T x\cdot\sin xy\ dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 x\cdot\sin xy\ dy\ dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\int\limits_0^1 \sin xy\ dy\ dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\left[-\frac{1}{x}\cdot\cos xy\right]_{y=0}^{1}\ dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos x\ dx = \Big[x-\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1.$$

Mivel téglalap tartományon integrálunk, az integrálási tartomány ábrázolásától eltekintünk:

$$\iint\limits_T x\cdot\sin xy\ dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin xy\ dx\ dy \ominus$$

Primitív függvény meghatározása:

$$\int x\cdot\sin xy\ dx = -\frac{x}{y}\cdot\cos xy+\frac{1}{y}\int\cos xy\ dx = -\frac{x}{y}\cdot\cos xy+\frac{1}{y^2}\sin xy+C$$

$$\begin{array}{rclcrcl} f(x) &=& x & \quad & g'(x) &=& \sin xy \\ f'(x) &=& 1 & & g(x) &=& -\frac{1}{y}\cos xy \end{array}$$

$$\ominus \int\limits_0^1 \left[-\frac{x}{y}\cdot\cos xy+\frac{1}{y^2}\sin xy\right]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\ dy = \int\limits_0^1 -\frac{\pi}{2y}\cdot\cos\frac{\pi}{2}y+\frac{1}{y^2}\sin\frac{\pi}{2}y\ dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{\varepsilon}^1 -\frac{\pi}{2y}\cdot\cos\frac{\pi}{2}y+\frac{1}{y^2}\sin\frac{\pi}{2}y\ dy \stackrel{*}{=}$$

A primitív függvény meghatározása:

Legyen $f(y) := \sin\frac{\pi}{2}y$ és $g(y) := -\frac{1}{y}$. Ekkor $f'(y) = \frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}y$ és $g'(y) = \frac{1}{y^2}$. Vegyük észre, hogy a keresett integrál az új jelölésekkel:

$$\int -\frac{\pi}{2y}\cdot\cos\frac{\pi}{2}y + \frac{1}{y^2}\sin\frac{\pi}{2}y\ dy = \int f(y)\cdot g'(y) + f'(y)\cdot g(y)\ dy =$$
$$= \int f(y)\cdot g'(y)\ dy + \int f'(y)\cdot g(y)\ dy =$$
$$= f(y)\cdot g(y) = -\frac{1}{y}\cdot\sin\frac{\pi}{2}y.$$

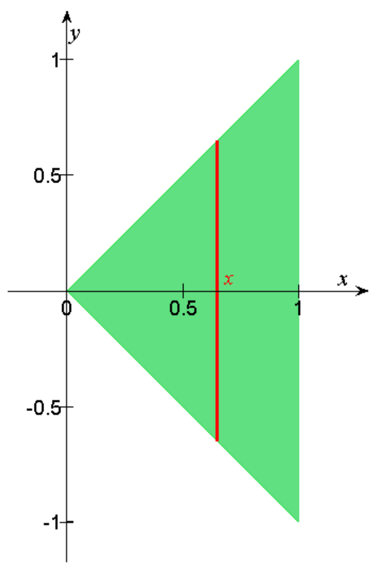
Így

$$\stackrel{*}{=} \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[-\frac{1}{y}\cdot\sin\frac{\pi}{2}y\right]_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to 0+} -\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\varepsilon = -1 + \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}\varepsilon}{\frac{\pi}{2}\cdot\varepsilon} = \frac{\pi}{2} - 1.$$ ♢

27.2. Megjegyzés. *Látható, hogy sokszor nem mindegy, hogy az integrálást milyen sorrendben végezzük el. A második megoldás során improprius integrált kellett számolnunk és a primitív függvény meghatározása is lényegesen nehezebb volt.*

d) $\iint\limits_T 2y\cdot e^{x^2-y^2}\ dxdy$, ahol T az $y = x$, az $y = -x$ és az $x = 1$ egyenesek által közrezárt háromszögtartomány.

Megoldás.
A függvény a T tartományon folytonos. A tartomány x-szerint normáltartomány, y-szerint vizsgálva a tartományt az x-tengely két normáltartományra bontja. Így a Fubini tétel mindkét esetben alkalmazható lesz.
A határok megállapításához tekintsük az alábbi ábrát:



$$\iint\limits_T 2y\cdot e^{x^2-y^2}\ dxdy = \int_0^1\int_{-x}^{x} 2y\cdot e^{x^2-y^2}\ dy\ dx \ominus$$

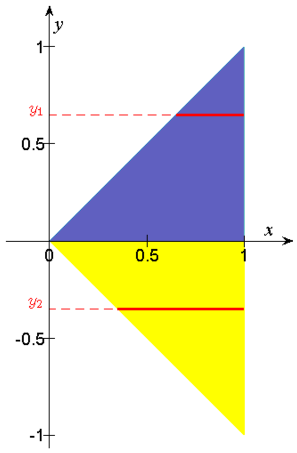
A primitív függvény meghatározása:

$$\int 2y\cdot e^{x^2-y^2}\ dy = -\int e^t\ dt = -e^t + C = -e^{x^2-y^2} + C$$

$$t = x^2 - y^2$$
$$dt = -2y\ dy$$

$$\ominus \int_0^1\left[-e^{x^2-y^2}\right]_{-x}^{x} dx = \int_0^1 -e^{x^2-x^2} + e^{x^2-x^2}\ dx = 0.$$

A fordított sorrendű integrálás elvégzéséhez két normáltartományra bontjuk a T tartományt, melyeken már alkalmazható a szukcesszív integrálás:



$$\iint_T 2y\cdot e^{x^2-y^2}\ dxdy =$$
$$= \int_{-1}^{0}\int_{-y}^{1} 2y\cdot e^{x^2-y^2}\ dx\ dy + \int_{0}^{1}\int_{y}^{1} 2y\cdot e^{x^2-y^2}\ dx\ dy =$$
$$= \int_{-1}^{0} 2y\cdot e^{-y^2}\cdot \int_{-y}^{1} e^{x^2}\ dx\ dy + \int_{0}^{1} 2y\cdot e^{-y^2}\cdot \int_{y}^{1} e^{x^2}\ dx\ dy$$

A fenti integrálok kiszámításához szükség lenne az $f(x)=e^{x^2}$ függvény primitív függvényére, amely az előadáson tanultak szerint nem írható zárt alakba. ♢

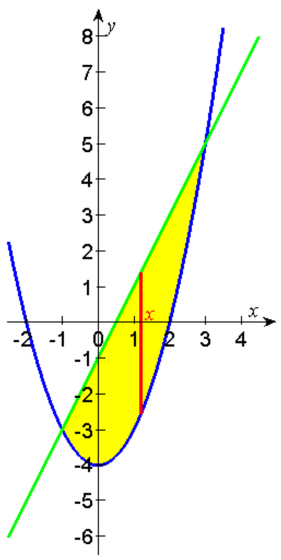
27.3. Feladat. *A kettősintegrál geometriai jelentését felhasználva számoljuk ki az*

$$\begin{aligned} y &= x^2-4 \\ y &= 2x-1 \end{aligned}$$

görbék által közrezárt síkidom területét!

Megoldás.

Készítsünk ábrát!



A területet a $T=\iint_T 1\ dxdy$ formula alapján számolhatjuk. Ehhez az ábráról leolvasható, hogy x-szerinti normál tartományon folytonos függvény kettősintegrálját kell számolnunk, így alkalmazható a Fubini tétel.
A határok megállapításához oldjuk meg a

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2-4 \\ y &= 2x-1 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Ahonnan a baloldalak egyenlőségéből következik, hogy a kérdéses pontok x koordinátájára:

$$x^2-4=2x-1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-2x-3=(x-3)\cdot(x+1)=0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai:

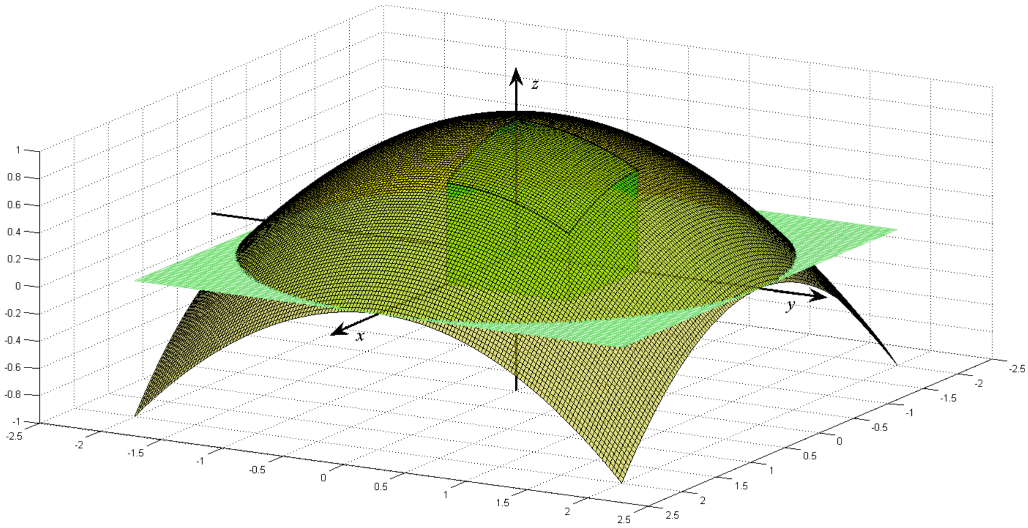
$$x_1=-1, \qquad x_2=3.$$

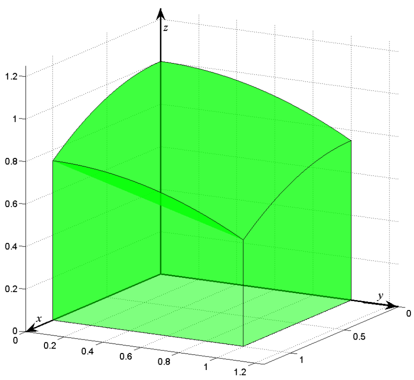
Így

$$T=\iint_T 1\ dxdy = \int_{-1}^{3}\int_{x^2-4}^{2x-1} 1\ dy\ dx = \int_{-1}^{3}\Big[y\Big]_{x^2-4}^{2x-1}\ dx = \int_{-1}^{3} 2x-1-x^2+4\ dx =$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3} = 10\frac{2}{3}.$$ ♢

27.4. Feladat. *Tekintsük az $f(x,y) = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$ egyenlettel adott forgási paraboloid és az xy-sík által közrezárt testet! Állítsunk a $T = \{(x,y) |\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ egységnégyzetre egy végtelen magasságú hasábot. Számítsuk ki a két test közös részét!*

Megoldás.
Készítsünk ábrát!





A szóban forgó test térfogata a kettősintegrál geometriai jelentése alapján a

$$V = \iint\limits_T f(x,y)\ dxdy$$

formulával számolható. Mivel T egy téglalap tartomány és f folytonos a T tartományon, ezért alkalmazható a Fubini tétel:

$$V = \iint\limits_T f(x,y)\ dxdy = \int_0^1 \int_0^1 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\ dx\ dy = \int_0^1 \left[x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{y^2}{4} \cdot x \right]_{x=0}^1 dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{11}{12} - \frac{1}{4}y^2\ dy = \left[\frac{11}{12}y - \frac{1}{12}y^3 \right]_0^1 = \frac{5}{6}. \qquad \diamondsuit$$

27.2. Házi Feladatok

27.1. Házi Feladat. *Határozzuk meg az alábbi kettős integráloknál az integrálási tartományt és írjuk fel a határokat a fordított sorrendben történő integráláshoz! (Tegyük fel, hogy f integrálható a kérdéses tartományokon!)*

a) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y-1}^{y+2} f(x,y)\ dx\ dy$ *megoldás*

b) $\displaystyle\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} f(x,y)\ dy\ dx$ *megoldás*

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-\sqrt{y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\ dx\ dy$ *megoldás*

27.2. Házi Feladat. *Számítsuk ki az alábbi területi integrálokat! Ha lehetséges, végezzük el a számítást a szukcesszív integrálás mindkét sorrendjével!*

a) $\displaystyle\iint_T \frac{1}{(x+y)^2}\ dxdy$, *ahol* $T=\{(x,y)|\ 3\le x\le 4,\ 1\le y\le 2\}$

megoldás

b) $\displaystyle\iint_T \frac{x^2}{y^2}\ dxdy$, *ahol T az $y=x$ és $y=2$ egyenesek és az $y=\frac{1}{x}$ hiperbola által közrezárt síkrész.*

megoldás

c) $\displaystyle\iint_T y^2\cdot\sin x\ dxdy$, *ahol T a tengelyek és az $y=1+\cos x$ egyenletű görbe által közrezárt, első síknegyedbe eső síkidom.*

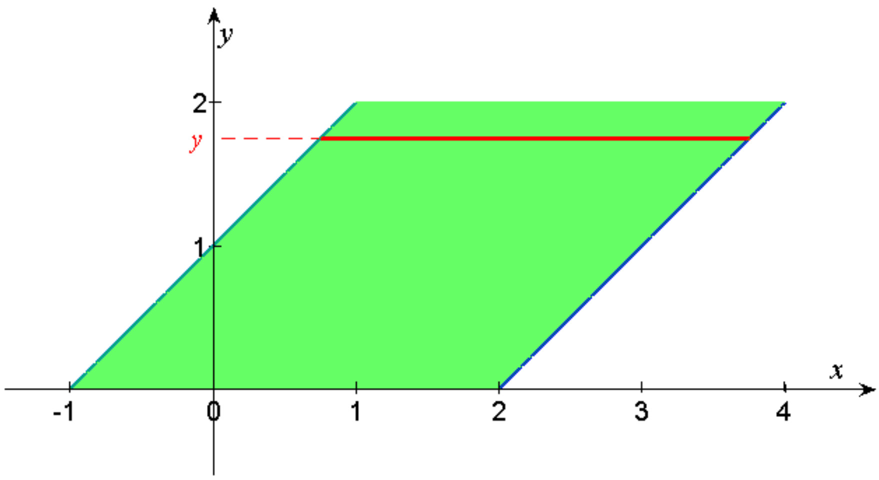
megoldás

27.3. Megoldások

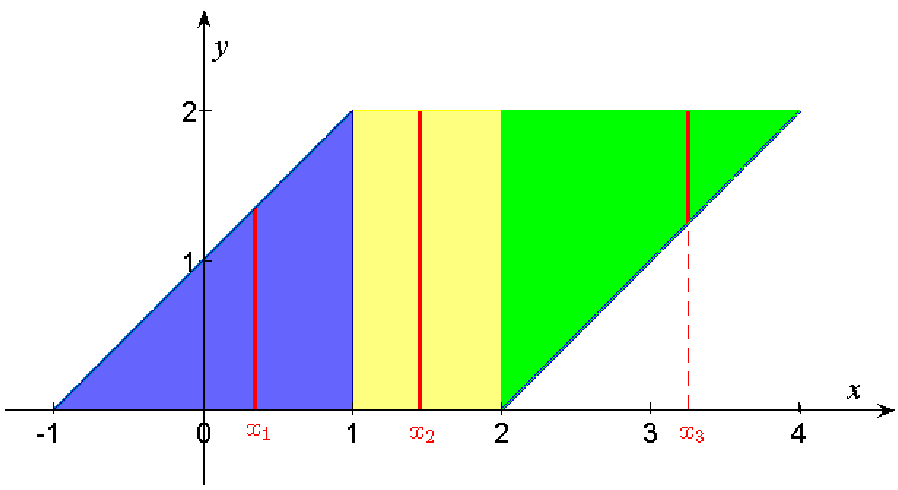
27.1. Házi Feladat. *Határozzuk meg az alábbi kettős integráloknál az integrálási tartományt és írjuk fel a határokat a fordított sorrendben történő integráláshoz! (Tegyük fel, hogy f integrálható a kérdéses tartományokon!)*

a) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y-1}^{y+2} f(x,y)\ dx\ dy$

Megoldás.
Ábrázoljuk az integrálási tartományt!



A tartomány y-szerint normál tartomány, de az integrálok felcseréléséhez x-szerinti normál tartományokra kell bontani:



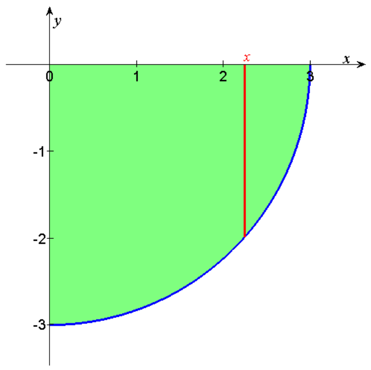
Az ábrán berajzolt vonalak segítenek az új határok felírásánál:

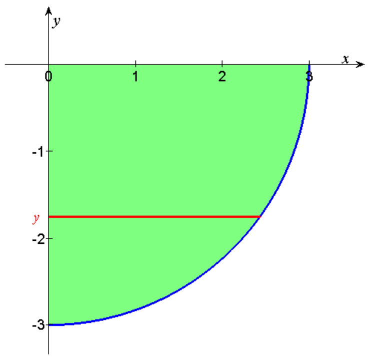
$$\int_0^2 \int_{y-1}^{y+2} f(x,y)\ dx\ dy = \int_{-1}^{1} \int_0^{x+1} f(x,y)\ dy\ dx + \int_1^2 \int_0^2 f(x,y)\ dy\ dx + \int_2^4 \int_{x-2}^{2} f(x,y)\ dy\ dx. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

b) $\displaystyle\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} f(x,y)\, dy\, dx$

Megoldás.
Ábrázoljuk az integrálási tartományt!





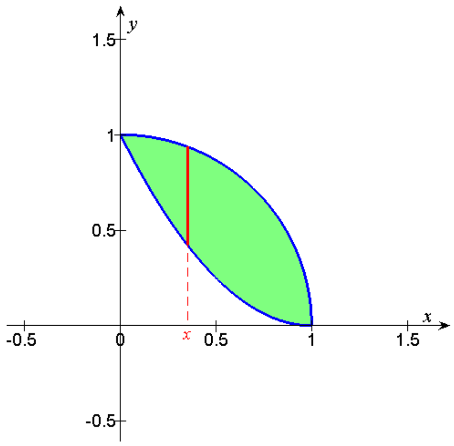
$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} f(x,y)\, dy\, dx = \int_{-3}^{0} \int_{0}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\, dx\, dy$$

◊

vissza a feladathoz

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-\sqrt{y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dx\, dy$

Megoldás.
A tartomány az origó középpontú, egység sugarú kör első síknegyedbe eső darabja és az $y=(x-1)^2$ egyenletű parabola által közrezárt síkrész. Ábrázoljuk az integrálási tartományt!



$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{(x-1)^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$$

◊

vissza a feladathoz

27.2. Házi Feladat. *Számítsuk ki az alábbi területi integrálokat! Ha lehetséges, végezzük el a számítást a szukcesszív integrálás mindkét sorrendjével!*

a) $\displaystyle\iint_T \frac{1}{(x+y)^2}\,dxdy$, ahol $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 3 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 2\}$

Megoldás.
A függvény téglalap taromány on értelmezett folytonos függvény, így alkalmazható a Fubini tétel.

$$\iint_T \frac{1}{(x+y)^2}\,dxdy = \int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\,dy\,dx = \int_3^4 \left[-\frac{1}{x+y}\right]_{y=1}^2 dx = \int_3^4 \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\,dx =$$
$$= \Big[\ln|x+1| - \ln|x+2|\Big]_3^4 = \ln 5 - \ln 6 - \ln 4 + \ln 5 = 2\ln 5 - \ln 6 - \ln 4.$$

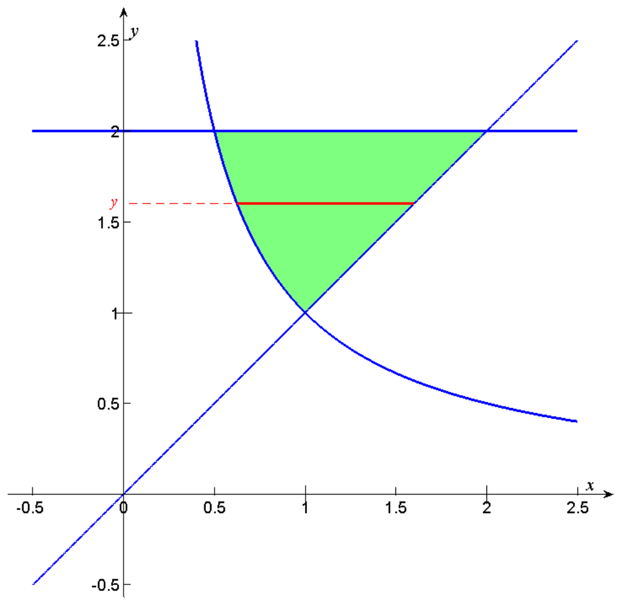
Fordított sorrendben végzett integrálással:

$$\iint_T \frac{1}{(x+y)^2}\,dxdy = \int_1^2 \int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \left[-\frac{1}{x+y}\right]_{x=3}^4 dy = \int_1^2 \frac{1}{3+y} - \frac{1}{4+y}\,dy =$$
$$= \Big[\ln|3+y| - \ln|4+y|\Big]_1^2 = \ln 5 - \ln 6 - \ln 4 + \ln 5 = 2\ln 5 - \ln 6 - \ln 4.\ \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

b) $\displaystyle\iint_T \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, ahol T az $y = x$ és $y = 2$ egyenesek és az $y = \frac{1}{x}$ hiperbola által közrezárt síkrész.

Megoldás.
Ábrázoljuk az integrálási tartományt!

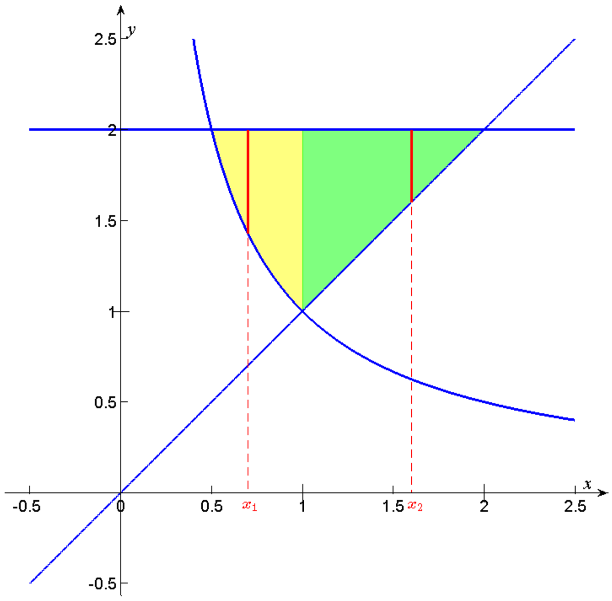


A T tartomány y-szerint normál tartomány, a függvény pedig folytonos T-n, így alkalmazható a Fubini tétel:

$$\iint_T \frac{x^2}{y^2}\,dxdy = \int_1^2 \int_{\frac{1}{y}}^{y} \frac{x^2}{y^2}\,dx\;dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3y^2}\right]_{x=\frac{1}{y}}^{y} dy = \int_1^2 \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}y^{-5}\,dy = \left[\frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{y^4}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{192} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{27}{64}.$$

A fordított sorrendű integráláshoz bontsuk a tartományt két x-szerinti normál tartományra:



◇

Az ábra alapján a határok könnyen megállapíthatók:

$$\iint_T \frac{x^2}{y^2}\,dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{\frac{1}{x}}^{2} \frac{x^2}{y^2}\,dy\;dx + \int_1^2 \int_x^2 \frac{x^2}{y^2}\,dy\;dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[-\frac{x^2}{y}\right]_{y=\frac{1}{x}}^{2} dx + \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y}\right]_{y=x}^{2} dx =$$

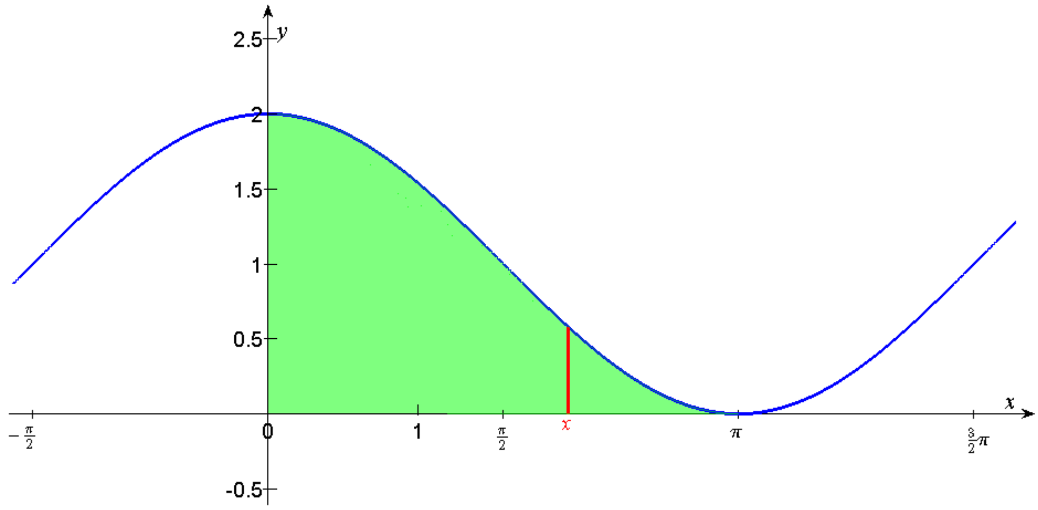
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^3 - \frac{x^2}{2}\,dx + \int_1^2 x - \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{64} + \frac{1}{48} + 2 - \frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{27}{64}.$$

vissza a feladathoz

c) $\iint_T y^2 \cdot \sin x\; dxdy$, ahol T a tengelyek és az $y = 1 + \cos x$ egyenletű görbe által közrezárt, első síknegyedbe eső síkidom.

Megoldás.
Ábrázoljuk az integrálási tartományt!



A tartomány mindkét változó szerint normál tartomány. Az előző ábrán berajzolt vonal segít a határok meghatározásánál:

$$\iint\limits_T y^2 \cdot \sin x \; dxdy = \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{1+\cos x} y^2 \cdot \sin x \; dy \; dx = \int\limits_0^{\pi} \sin x \cdot \int\limits_0^{1+\cos x} y^2 \; dy \; dx =$$

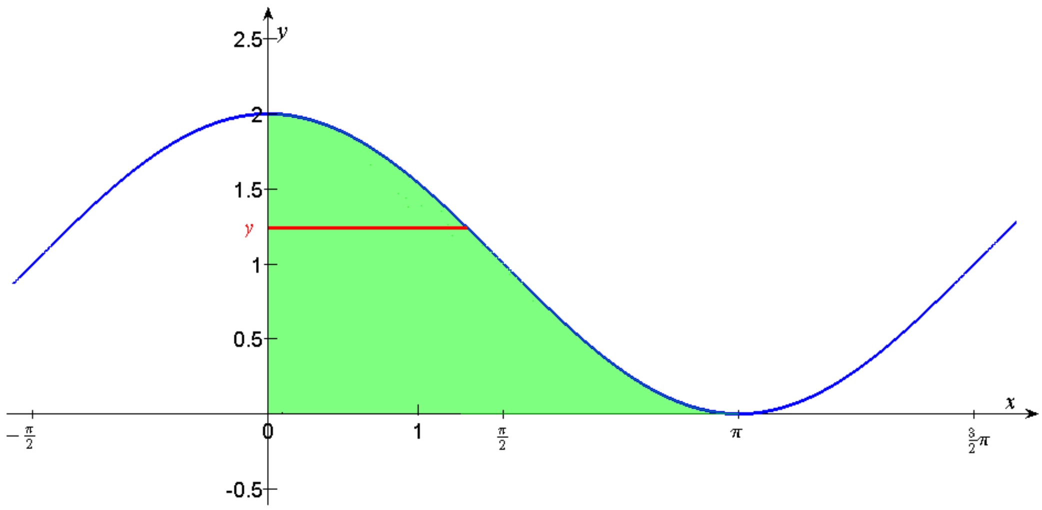
$$= \int\limits_0^{\pi} \sin x \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot y^3\right]_{y=0}^{1+\cos x} dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{3} \sin x \cdot (1+\cos x)^3 \; dx \ominus$$

A primitív függvény meghatározása:

$$\int \frac{1}{3} \sin x \cdot (1+\cos x)^3 \; dx = -\frac{1}{3} \int t^3 \; dt = \frac{1}{12} t^4 + C = -\frac{1}{12}(1+\cos x)^4 + C$$

$$t = 1+\cos x$$
$$dt = -\sin x \; dx$$

$$\ominus \left[-\frac{1}{12}(1+\cos x)^4\right]_0^{\pi} = \frac{1}{12} \cdot 2^4 = \frac{4}{3}.$$



Az ábrán berajzolt vonalak segítenek az új határok felírásánál:
A tartomány felső határa az $y = 1+\cos x$ függény. Mivel az $x \in [0, \; \pi]$ intervallumon az

$y = 1 + \cos x$ függvény invertálható és a függvény inverze: $x = \arccos(y-1)$, így:

$$\iint\limits_T y^2 \cdot \sin x \; dxdy = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{\arccos(y-1)} y^2 \cdot \sin x \; dx \; dy = \int\limits_0^2 y^2 \cdot \int\limits_0^{\arccos(y-1)} \sin x \; dx \; dy =$$

$$= \int\limits_0^2 y^2 \cdot \Big[-\cos x\Big]_0^{\arccos(y-1)} \; dy = \int\limits_0^2 y^2 \cdot (-\cos\arccos(y-1) + \cos 0) \; dy =$$

$$= \int\limits_0^2 y^2 \cdot (-y+1+1) \; dy = \int\limits_0^2 -y^3 + 2y^2 \; dy = \left[-\frac{1}{4} \cdot y^4 + \frac{2}{3} y^3\right]_0^2 =$$

$$= -4 + \frac{16}{3} = \frac{4}{3}. \qquad \diamondsuit$$

vissza a feladathoz

Irodalomjegyzék

[1] Bagota M. Németh J. Németh Z.: *Analízis II. feladatgyűjtemény*, Polygon, 2004.

[2] Bárczi Barnabás: *Differenciálszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, 2002.

[3] Bárczi Barnabás: *Integrálszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, 2006.

[4] Császár Ákos: *Valós Analízis I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1999.

[5] Eisner Tímea: *Bevezetés az analízisbe II.*
http://www.ttk.pte.hu/mii/matematika/anyagok/anal2et.pdf

[6] Fekete Zoltán, Zalay Miklós: *Többváltozós függvények analízise*, Műszaki Könyvkiadó, 2006.

[7] Gádor Endréné et al.: *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából*
Nemzeti Tankönyvkiadó, 2003.

[8] Kovács József - Takács Gábor - Takács Miklós: *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1998.

[9] Németh József: *Analízis példatár I.*, JATEPress, 1999.

[10] Németh József: *Analízis példatár II.*, JATEPress, 1999.

[11] Németh József: *Integrálszámítás példatár*, Polygon, 1998.

[12] Pap Margit: *Integrálszámítás*

[13] Pethőné Vendel Teréz: *Fejezetek a matematikai analízis köréből*, PTE, 1997.

[14] Scharnitzky Viktor: *Differenciálegyenletek*, Műszaki Könyvkiadó, 2008.

[15] Schipp Ferenc: *Analízis I.*
http://www.ttk.pte.hu/mii/matematika/anyagok/Anal_P1.pdf

[16] Schipp Ferenc: *Analízis II.*
http://www.ttk.pte.hu/mii/matematika/anyagok/Anal_P2.pdf

[17] Szabó Tamás: *Kalkulus I. példatár*, Polygon, 2006.

[18] Szabó Tamás: *Kalkulus II. példatár*, Polygon, 2006.