Kombinatorika jegyzet és feladatgyűjtemény

Király Balázs, Tóth László

Pécsi Tudományegyetem

2011

Lektor: Kátai Imre egyetemi tanár, az MTA rendes tagja

Tartalomjegyzék

Előszó

Ezt a jegyzetet és feladatgyűjteményt azoknak az előadásoknak, illetve gyakorlatoknak az anyagai alapján írtuk, amelyeket az elmúlt években a PTE TTK Matematika BSc szakos hallgatóknak a Kombinatorika című tárgy keretében tartottunk a nappali és levelező tagozaton.

A jegyzet és a példatári rész felöleli az említett szak Kombinatorika tárgyának tematikájában szereplő anyag szinte teljes egészét.

Ez a tananyag jól használható továbbá a Matematika BSc szakon az Elemi matematika tárgyhoz, továbbá a Programtervező Informatikus és Fizika BSc szakokon a Diszkrét matematika és ezzel rokon tárgyakhoz.

Arra törekedtünk, hogy a legegyszerűbb bizonyításokat, megoldásokat, magyarázatokat adjuk. Ugyanakkor sok esetben több bizonyítást, illetve megoldást is adtunk ugyanarra a problémára. Az elméleti részben is találhatók megoldott és kitűzött feladatok, olyanok, amelyek kiegészítik a bemutatott anyagrészeket. Reméljük, hogy mindezek hozzásegítenek az anyag alaposabb és jobb megértéséhez.

A példatári részben gyakorló és nehezebb feladatok is szerepelnek, ezek részletes megoldásokkal, illetve útmutásokkal és eredményekkel vannak ellátva.

Készült a Társadalmi Megújulás Operatív Program TÁMOP - 4.1.2-08/1/A kódszámú pályázatának keretében LaTeXdokumentumkészítő rendszer felhasználásával, böngészhető PDF formátumban.

Köszönetünket fejezzük ki a lektornak, Kátai Imre egyetemi tanárnak, az MTA rendes tagjának, akinek észrevételeit és hasznos tanácsait felhasználtuk a tananyag végső változatának kidolgozásában.

A szerzők

Első rész

Jegyzet

I.1. fejezet

Permutációk, variációk, kombinációk

I.1.1. Permutációk

I.1.1.1. Feladat. *Hányféle sorrendje van az* $1, 2, 3$ *számoknak?*

Megoldás. Hatféle sorrend van, ezek a következők:

$$123 \quad 132 \quad 213 \quad 231 \quad 312 \quad 321$$

I.1.1.2. Feladat. *Hányféle sorrendje van az* a, b, c, d *betűknek?*

Megoldás. A sorrendek száma 24, ezek:

$$\begin{array}{cccccc} abcd & abdc & acbd & acdb & adbc & adcb \\ bacd & badc & bcad & bcda & bdac & bdca \\ cabd & cadb & cbad & cbda & cdab & cdba \\ dabc & dacb & dbac & dbca & dcab & dcba \end{array}$$

I.1.1.3. Definíció. *Tekintsünk véges sok különböző elemet. Ezek különböző sorrendjeit az elemek* **permutációi***nak nevezzük. A permutációk képzését (felírását) az elemek* **permutálásá***nak nevezzük. Ha adott* n *különböző elem, akkor jelölje* P_n *ezek összes* **permutációinak számá***t.*

Az I.1.1.1 Feladatban $P_3 = 6$, az I.1.1.2 Feladatban pedig $P_4 = 24$. Kérdés: Mennyi P_n?

Emlékeztetünk a következő fogalomra: A $k \geq 1$ természetes szám **faktoriális**a $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$. Így pl. $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, ... Rögtön adódik, hogy (*) $k! = (k-1)! \cdot k$, ahol $k \geq 2$. Ha (*)-ban $k = 1$, akkor kapjuk, hogy $1 = 0!$, ez indokolja, hogy megállapodás szerint $0! = 1$ legyen.

I.1.1.4. Tétel. *Ha* $n \geq 1$, *akkor* n *különböző elem összes permutációinak száma* $n!$, *azaz* $\boxed{P_n = n!}$.

Bizonyítás. Az első helyre az n elem közül bármelyiket írhatjuk, ez n lehetőség, a második helyre a megmaradt $n-1$ elem bármelyike kerülhet, ez $n-1$ lehetőség. Az első két elemet így $n(n-1)$-féleképpen választhatjuk meg. Tovább, a harmadik elem a megmaradt $n-2$ elem bármelyike lehet, ez újabb $n-2$ lehetőség, ..., az utolsó, n-edik elem megválasztására $n-(n-1) = 1$ lehetőségünk van. Kapjuk, hogy $P_n = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Másképp: n szerinti indukcióval. Ha $n = 1$, akkor $P_1 = 1$, ami igaz. Tegyük fel, hogy $P_{n-1} = (n-1)!$. Ha most n különböző elem permutációit képezzük, akkor az első helyre bármelyik elem kerülhet, a fennmaradó $n-1$ elemet pedig $P_{n-1}=(n-1)!$-féleképpen permutálhatjuk. Így minden permutációt megkapunk és pontosan egyszer, tehát

$$P_n = \underbrace{P_{n-1}+P_{n-1}+...+P_{n-1}}_{n-\text{szer}} = nP_{n-1} = n(n-1)! = n!\,,$$

amit igazolnunk kellett. ∎

Tehát $P_1 = 1! = 1$, $P_2 = 2! = 2$, $P_3 = 3! = 6$, $P_4 = 4! = 24$, $P_5 = 5! = 120$, $P_6 = 6! = 720$,... .

A továbbiakban emlékeztetünk az injektív, szürjektív és bijektív függvények fogalmára és néhány tulajdonságára.

I.1.1.5. Definíció. *Legyenek A és B tetszőleges nemüres halmazok és legyen $f : A \to B$ egy függvény (leképezés). Azt mondjuk, hogy*

f **injektív**, *ha A különböző elemeinek különböző képelemek felelnek meg, azaz, ha bármely $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ez egyenértékű a következő állítással: Bármely $x_1, x_2 \in A$ esetén, ha $f(x_1) = f(x_2)$, akkor $x_1 = x_2$;*

f **szürjektív**, *ha B-nek minden eleme képelem, azaz, ha bármely $y \in B$ esetén létezik $x \in A$ úgy, hogy $f(x) = y$. Ez a feltétel így is írható: $f(A) := \{f(x) : x \in A\} = B$;*

f **bijektív**, *ha injektív és szürjektív, azaz, ha minden $y \in B$-re létezik egy és csak egy $x \in A$ úgy, hogy $f(x) = y$.*

I.1.1.6. Feladat. *Adjunk példát olyan véges A és B halmazokra és olyan $f : A \to B$ függvényre, amely*

i) injektív, de nem szürjektív,

ii) szürjektív, de nem injektív,

iii) nem injektív és nem szürjektív.

I.1.1.7. Feladat. *Legyenek A és B egyenlő számosságú véges halmazok és legyen $f : A \to B$ egy függvény. (Speciálisan, legyen $A = B$ egy véges halmaz és legyen $f : A \to A$ egy függvény.) Igazoljuk, hogy a következő állítások egyenértékűek:*

i) f injektív,

ii) f szürjektív,

iii) f bijektív.

Az $a_1, a_2, ..., a_n$ különböző elemek permutációit úgy is definiálhatjuk, mint az adott $a_1, a_2, ..., a_n$ elemekből alkotott $(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n})$ olyan rendezett elem n-eseket (n komponensű vektorokat), amelyekben $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n}$ páronként különbözőek. Ennél pontosabb definíció a következő:

I.1.1.8. Definíció. *Permutációknak nevezzük egy véges halmaz önmagára való bijekcióit (bijektív leképezéseit). Részletesebben: ha A egy véges, n elemű halmaz ($n \geq 1$), akkor A permutációi az $f : A \to A$ bijektív függvények. Ha $A = \{1,2,...n\}$, akkor tehát A permutációi az $f : \{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$ bijektív függvények. Ezeket* n**-edfokú permutációk***nak nevezzük és így jelöljük:*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}.$$

I.1.2. Ismétléses permutációk

I.1.2.1. Feladat. *Hányféle különböző sorrendje van a MATEMATIKA szó betűinek?*

Megoldás. Különböztessük meg a két M betűt, a három A betűt és a két T betűt, pl. úgy, hogy más-más színnel jelöljük őket: MATEMAT IKA.

Akkor 10 különböző elem permutációiról van szó és ezek száma $P_{10} = 10!$. De a három A betű egymás közötti permutálása, ezek száma $3! = 6$, valójában nem változtat a sorrenden (ismét azonos színnel írjuk őket). Hasonlóan az A és T betűkre vonatkozóan. A lehetséges sorrendek száma:

$$\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 151\,200.$$

I.1.2.2. Definíció. *Az olyan elemek különböző sorrendjeit, amelyek között egyenlőek is vannak* **ismétléses permutáció***knak nevezzük. Ha n elem közül k_1 elem egymással egyenlő (azonos), további k_2 elem egymással egyenlő és az előbbiektől különböző,..., további k_r elem egymással egyenlő és az előbbiektől különböző, ahol $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$, akkor ezek különböző sorrendjeit az n elem $(k_1, k_2, ..., k_r)$ típusú ismétléses permutációinak nevezzük és ezek számát így jelöljük: $P_n^{(k_1,k_2,...,k_r)}$.*

Az I.1.2.1 Feladatban $P_{10}^{(2,3,2,1,1,1)} = 151\,200$. Kérdés: Mennyi $P_n^{(k_1,k_2,...,k_r)}$?

I.1.2.3. Tétel. *Ha $n \geq 1$, $k_1, k_2, ..., k_r \geq 1$, ahol $r \geq 1$, $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$, akkor*

$$\boxed{P_n^{(k_1,k_2,...,k_r)} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_r!}}\,.$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges, rögzített ismétléses permutációt. Ha az ebben szereplő k_1 számú egymással egyenlő elemet permutáljuk, akkor nem kapunk új ismétléses permutációt. Ugyanakkor, megkülönböztetve ezeket az elemeket (pl. úgy, hogy más-más színnel jelöljük őket), ezeket $k_1!$-féleképpen permutálhatjuk. Így a rögzített ismétléses permutációból $k_1!$ számú olyan ismétléses permutációt kapunk, amelyre az n elem közül az első k_1 elem különböző, a további k_2 elem egymással egyenlő és az előbbiektől különböző,..., további k_r elem egymással egyenlő és az előbbiektől különböző. Most megkülönböztetve a k_2 számú azonos elemet, ezeket $k_2!$-féleképpen permutálhatjuk. Így a rögzített ismétléses permutációból $k_1!\,k_2!$ számú olyan ismétléses permutációt kapunk, amelyre az n elem közül az első k_1 elem különböző, a következő k_2 elem egymástól és az előbbiektől különböző, a soron következő k_3 elem egymással egyenlő és az előbbiektől különböző,..., további k_r elem egymással egyenlő és az előbbiektől különböző. Ugyanígy folytatva végül n különböző elem $k_1!\,k_2!\cdots k_r!$ különböző permutációjához jutunk. Így a $P_n^{(k_1,k_2,...,k_r)}$ számú ismétléses permutációból $k_1!\,k_2!\cdots k_r!\,P_n^{(k_1,k_2,...,k_r)}$ számú ismétlés nélküli permutációhoz jutunk. Ezek a permutációk mind különbözőek és minden permutációt megkapunk, ezért $P_n = k_1!\,k_2!\cdots k_r!\,P_n^{(k_1,k_2,...,k_r)}$, azaz $P_n^{(k_1,k_2,...,k_r)} = n!\,/(k_1!\,k_2!\cdots k_r!)$. ■

A $P_n^{(k_1,k_2,...,k_r)}$ számokat polinomiális számoknak vagy polinomiális együtthatóknak is nevezzük, mert ezek a polinomiális tételben szereplő együtthatók, lásd később. Más jelölés: $\binom{n}{k_1,k_2,...,k_r} = \binom{k_1+k_2+...+k_r}{k_1,k_2,...,k_r}$. Figyeljük meg, hogy $P_n^{(1,1,...,1)} = P_n$, $P_n^{(k,1,1,...,1)} = \frac{n!}{k!} = \frac{P_n}{P_k}$.

I.1.2.4. Feladat. *Hányféle különböző sorrendje van n olyan elemnek, amelyek közül k számú egyenlő és a többi $n-k$ is egyenlő, de az előbbiektől különböző?*

Megoldás. $P_n^{(k,n-k)} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

I.1.3. Variációk

I.1.3.1. Feladat. *Az* $1,2,3,4$ *számok közül válasszunk ki kettőt és írjuk fel ezeket az összes lehetséges sorrendben. Mennyi a lehetőségek száma?*

Megoldás. A következőket kapjuk:

12 13 14 21 23 24 31 32 34 41 42 43

A lehetőségek száma 12.

I.1.3.2. Definíció. *Legyen adott* n *különböző elem* $(n \geq 1)$. *Válasszunk ki közülük* k *elemet, ahol* $1 \leq k \leq n$ *és írjuk fel ezeket az összes lehetséges sorrendben. Ezeket a sorrendeket az* n **elem** k**-adosztályú variációi***nak nevezzük. Jelölje* V_n^k *az* n *elem* k*-adosztályú variációinak a számát.*

A I.1.3.1 Feladatban $V_4^2 = 12$. Kérdés: Mennyi V_n^k?

I.1.3.3. Tétel. *Ha* $1 \leq k \leq n$, *akkor* $\boxed{V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}$.

Bizonyítás. A variációk képzését tekinthetjük úgy, hogy adott n elem (pl. az $1,2,\ldots,n$ számok) és adott k hely (cella), ahová a kiválasztott elemeket az összes lehetséges sorrendben beírjuk.

Ezek után az I.1.1.4 Tétel első bizonyításához hasonlóan: Az első helyre (cellába) az n elem közül bármelyiket írhatjuk, ez n lehetőség, a második helyre a megmaradt $n-1$ elem bármelyike kerülhet, ez $n-1$ lehetőség, tovább, a harmadik elem a megmaradt $n-2$ elem bármelyike lehet, ez újabb $n-2$ lehetőség, ... Most a k-adik cellánál meg kell állnunk, az ide kerülő elem megválasztására $n-(k-1) = n-k+1$ lehetőségünk van. Kapjuk, hogy $V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$. ∎

A fenti képlet jobb oldalán a tényezők száma k. Ez a képlet így is írható:

$$V_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!},$$

tehát $\boxed{V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$. Ha $k=0$, akkor innen $V_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$, ami megfelel annak, hogy n elemből 0 számú elemet egyféleképpen választhatunk ki és permutálhatunk: úgy, hogy egy elemet se veszünk.

Figyeljük meg, hogy $V_n^1 = n$, $V_n^n = P_n = n!$. Ha $k > n$, akkor nem lehet variációkat képezni, ezért $k > n$ esetén célszerű használni, hogy $V_n^k = 0$.

A variációk pontosabb definíciója a következő:

I.1.3.4. Definíció. *Variációknak nevezzük egy véges halmaznak egy másik véges halmazba való injektív leképezéseit. Részletesebben: ha* A *egy* k *elemű halmaz,* B *pedig egy* n *elemű halmaz* $(n,k \geq 1)$, *akkor az* $f: A \to B$ *injektív függvényeket* n *elem* k*-adosztályú (ismétlés nélküli) variációinak nevezzük.*

Ha $k > n$, akkor nincs ilyen injektív függvény, ha pedig $k \leq n$, akkor az ilyen injektív függvények száma V_n^k.

Szokásos a következő jelölés: ha x valós szám és $k \geq 1$ természetes szám, akkor

$$[x]_k = x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1).$$

Így $1 \leq k \leq n$ esetén $V_n^k = [n]_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$.

I.1.4. Ismétléses variációk

I.1.4.1. Feladat. *Az $1, 2, 3, 4$ számok közül válasszunk ki kettőt úgy, hogy ugyanazt az elemet kétszer is vehetjük és írjuk fel ezeket az összes lehetséges sorrendben. Mennyi a lehetőségek száma?*

Megoldás. A következőket kapjuk:

11 12 13 14 21 22 23 24 31 32 33 34 41 42 43 44

A lehetőségek száma 16.

I.1.4.2. Definíció. *Legyen adott n különböző elem ($n \geq 1$). Válasszunk ki közülük k elemet, ahol $k \geq 1$ úgy, hogy ugyanazt az elemet többször is vehetjük és írjuk fel ezeket az összes lehetséges sorrendben. Ezeket a sorrendeket az n* **elem k-adosztályú ismétléses variációi***nak nevezzük. Jelölje $\overline{V}_n^k$ az n elem k-adosztályú ismétléses variációinak a számát.*

Az I.1.4.1 Feladatban $\overline{V}_4^2 = 16$. Kérdés: Mennyi $\overline{V}_n^k$?

I.1.4.3. Tétel. *Ha $n, k \geq 1$, akkor* $\boxed{\overline{V}_n^k = n^k}$.

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint az I.1.3.3 Tétel bizonyításában, de most a k számú cella mindegyikébe bármelyik elemet írhatjuk az n közül. Kapjuk, hogy $\overline{V}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k-\text{szor}} = n^k$. ■

Az ismétléses variációk a következőképpen is definiálhatók:

I.1.4.4. Definíció. *Ismétléses variációknak nevezzük egy véges halmaznak egy másik véges halmazba való leképezéseit. Részletesebben: ha A egy k elemű halmaz, B pedig egy n elemű halmaz ($n, k \geq 1$), akkor az $f : A \to B$ függvényeket n elem k-adosztályú ismétléses variációinak nevezzük.*

Ha $n, k \geq 1$, akkor az $f : A \to B$ függvények száma n^k.

Figyelem! Az „ismétléses" jelzőnek más jelentése van a permutációknál és más a variációknál. Az ismétléses permutációknál ez arra vonatkozik, hogy a permutálandó elemek között *ismétlődőek* (azonosak) vannak. Itt pontosan meg van adva, hogy az *ismétlődő* elemek a permutációkban hányszor fordulhatnak elő.

Az ismétléses variációk esetén n *különböző* elemből kell a variációkat képezni úgy, hogy mindegyik elemet *akárhányszor* felhasználhatjuk.

Figyeljük meg azt is, hogy a permutációk a variációknak egy speciális esete (ha $k = n$), ugyanakkor az ismétléses permutációk nem speciális esetei az ismétléses variációknak.

Az ismétléses variáció fogalma általánosítható:

I.1.4.5. Feladat. *Adott n doboz, bennük rendre $k_1, k_2, \ldots, k_n$ darab páronként különböző tárgy. Mindegyik dobozból kiválasztunk egy tárgyat. Hányféle kiválasztás lehetséges a rögzített sorrend mellett?*

Megoldás. A lehetőségek száma $k_1 k_2 \cdots k_n$. Az első dobozból ugyanis k_1-féle tárgyat választhatunk. Bármelyik tárgyat is választottuk, a második dobozból való húzásnál a választást k_2-féleképpen folytathatjuk, így az első két tárgy kiválasztására $k_1 k_2$ lehetőségünk van. Ez a harmadik dobozból való húzással k_3-féleképpen folytatható, és így tovább.

Ezt a számítási módszert, amely a „lehetőségek száma = részlehetőségek számainak szorzata" elven alapszik és amelyet a fentiekben már többször használtunk, **szorzási szabálynak** nevezzük.

I.1.4.6. Feladat. *Hány pozitív osztója van az* $48\,600 = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$ *számnak?*

Megoldás. $4 \cdot 6 \cdot 3 = 72$. Ugyanis az adott szám bármely pozitív osztója $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ alakú, ahol $0 \le a \le 3$, $0 \le b \le 5$, $0 \le c \le 2$. Az a kitevő megválasztására tehát 4 lehetőség van, b-re 6, c-re 3.

Általánosítás: Adott az $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_r}$ szám, ahol $p_1, p_2, \dots, p_r$ páronként különböző prímszámok. Akkor n pozitív osztóinak száma $\tau(n) = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_r+1)$.

Kombinatorikai feladatokban más esetekben a lehetőségek számát nem szorzással, hanem összeadással kapjuk a következő **összeadási szabály** szerint: „összes lehetőségek száma = az egymást kizáró eseteknek megfelelő lehetőségek számainak összege". Gyakran együtt kell alkalmaznunk a szorzási szabályt és az összeadási szabályt.

I.1.4.7. Feladat. *Tekintsük azokat a dominókat, amelyek mindkét felén a pontok száma* 0*-tól* 8*-ig terjed. Ezeket a pontok számának megfelelően így azonosíthatjuk:* xy*, ahol* $0 \le x \le y \le 8$.

a) Hány ilyen dominó van?

b) Hányféleképpen lehet a 45 *ilyen dominó közül kettőt kiválasztani úgy, hogy a két dominót egymás mellé lehessen tenni (azaz valamelyik felükön a pontok száma azonos)?*

Megoldás. a) Ha $x = 0$, akkor y értékei $0,1,2,\dots,8$ lehetnek, ez 9 lehetőség. Ha $x = 1$, akkor y értékei $1,2,\dots,8$ lehetnek, ez 8 lehetőség, és így tovább, ha $x = 8$, akkor csak $y = 8$ lehet, ez 1 lehetőség. Az összeadási szabály szerint a dominók száma $9+8+\ldots+1 = 45$.

b) Válasszunk egy dominót. Ez lehet 1. eset: „dupla" dominó, azaz $00, 11, 22, \dots, 88$, ezek száma 9, vagy 2. eset: olyan dominó, amelyre $x < y$, ezek száma 36.

Az 1. esetben a második dominót 8-féleképpen választhatjuk, pl. 22 esetén vehetjük a 02, 12, 23, 24, 25, 26, 27, 28 jelzésűeket.

A 2. esetben $8+8 = 16$-féle párt választhatunk, pl. 27 lehetséges párjai: 02, 07, 12, 17, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 37, 47, 57, 67, 77, 78.

A szorzási szabály szerint az 1. esetben $9 \cdot 8 = 72$, a 2. esetben pedig $36 \cdot 16 = 576$ a lehetőségek száma. Az összeadási szabály szerint az összes lehetőségek száma $72+576 = 648$.

Az előbbiekben különbséget tettünk aszerint, hogy a két dominót milyen sorrendben húzzuk. Minden összeillő dominó-pár kétszer is szerepel, pl. 35 és 52 majd 52 és 35. Ha ezeket nem tekintjük különbözőknek, akkor a lehetőségek száma az előbbi fele, azaz 324.

I.1.5. Kombinációk

I.1.5.1. Feladat. *Az* $1, 2, 3, 4$ *számok közül válasszunk ki kettőt (két különbözőt) és írjuk fel ezeket úgy, hogy nem vagyunk tekintettel a kiválasztott elemek sorrendjére. Mennyi a lehetőségek száma?*

Megoldás. Hat lehetőség van, ezek a következők:

12 13 14 23 24 34

I.1.5.2. Definíció. *Legyen adott* n *különböző elem* $(n \ge 1)$*. Válasszunk ki közülük* k *elemet, ahol* $1 \le k \le n$ *és írjuk fel ezeket úgy, hogy nem vagyunk tekintettel a kiválasztott elemek sorrendjére. Ezeket az elemsorozatokat az* n **elem** k**-adosztályú kombinációi***nak nevezzük. Jelölje* C_n^k *az* n *elem* k*-adosztályú kombinációinak a számát.*

Ha az $1,2,\ldots,n$ elemek k-adosztályú kombinációit tekintjük, akkor a számokat (általában) nagyságrendi sorrendben írjuk.

Az I.1.5.1 Feladatban $C_4^2 = 6$. Kérdés: Mennyi C_n^k?

I.1.5.3. Tétel. *Ha* $1 \le k \le n$, *akkor* $\boxed{C_n^k = \dfrac{V_n^k}{P_k}}$, $\boxed{C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}}$.

Ha $0 \le k \le n$, *akkor* $\boxed{C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}}$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges, rögzített kombinációt. Ha az ebben szereplő k elemet permutáljuk, akkor nem kapunk új kombinációt. Ugyanakkor ezek n elem k-adosztályú variációinak tekinthetők. Íly módon a rögzített k-adosztályú kombinációból $k!$ számú k-adosztályú variációt kapunk, s így a C_n^k számú kombinációból $k!\,C_n^k$ számú variációhoz jutunk. Ezek a variációk mind különbözőek és minden variációt megkapunk, ezért $V_n^k = k!\,C_n^k$, azaz $C_n^k = V_n^k/k! = V_n^k/P_k$. A többi képlet a V_n^k-ra vonatkozó előbbi képletekből adódik. ■

Ha $k=0$, akkor innen $C_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$, ami megfelel annak, hogy n elemből 0 számú elemet egyféleképpen választhatunk ki: úgy, hogy egy elemet se veszünk.

I.1.5.4. Tétel. *(Szimmetria-tulajdonság) Ha* $0 \le k \le n$, *akkor* $\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}}$.

Bizonyítás. Azonnali az I.1.5.3 Tétel utolsó képlete szerint. Másképp: Az n elemből k elemet kiválasztani ugyanazt jelenti, mint a többi $n-k$ elemet nem kiválasztani. Ezt annyiféleképpen lehet, ahányféleképpen az $n-k$ elemet ki tudjuk választani. ■

Figyeljük meg, hogy minden $n \ge 1$-re $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$, $C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $C_n^3 = C_n^{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}, \dots$. Ha $k > n$, akkor nem lehet kombinációkat képezni, ezért $k > n$ esetén célszerű használni, hogy $C_n^k = 0$.

A n elem k-adosztályú kombinációi számának más jelölése $\binom{n}{k}$, olvasd „n alatt k". Tehát

$$\boxed{C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad 0 \le k \le n},$$

ezeket a számokat binomiális számoknak vagy binomiális együtthatóknak is nevezzük, lásd később a binomiális tételt.

Itt $\binom{n}{k} = P_n^{(k,n-k)}$, lásd I.1.2.4. Ez az egyenlőség közvetlenül is belátható. Tekintsünk n elemet, amelyek k-adosztályú kombinációit képezzük. Írjunk mindegyik elem alá 1-et vagy 0-t aszerint, hogy kiválasztottuk a kombináció képzésekor vagy sem. Pl. ha $n=5$, az elemek a,b,c,d,e és $k=3$, akkor az a,c,d és a,d,e kombinációk esetén legyen: 10110, ill. 10011. Így minden k-adosztályú kombinációnak megfelel egy k számú 1-esből és $n-k$ számú 0-ból álló ismétléses permutáció, és különböző k-adosztályú kombinációknak különböző ilyen ismétléses permutációk felelnek meg.

A következő definíció is adható:

I.1.5.5. Definíció. *Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazait n elem k-adosztályú kombinációinak nevezzük.*

Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak a száma tehát $\binom{n}{k}$. Így a $k{=}0$ elemű részhalmazok száma $\binom{n}{0}=1$, ez az üres halmaz ($\emptyset$), a $k=1$ elemű részhalmazok száma $\binom{n}{1}=n$, ..., a $k=n$ elemű részhalmazok száma $\binom{n}{n}=1$, ez az adott halmaz.

I.1.5.6. Tétel. *Legyen* $n \ge 1$.

1) Egy n elemű halmaz összes részhalmazainak a száma 2^n.

2) $\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n}$.

Bizonyítás. 1) A részhalmazokat úgy kapjuk, hogy az adott halmaz bizonyos elemeit kiválasztjuk a részhalmazba, a többit pedig nem. Így mind az n elemre két lehetőség van: vagy kiválasztjuk, vagy sem. Így a lehetőségek száma, és ezzel együtt a részhalmazok száma $\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n-\text{szer}} = 2^n$.

2) Az 1) pont azonnali következménye. ■

I.1.5.7. Feladat. *Legyen $A = \{1,2,...,k\}$, $B = \{1,2,...,n\}$. Hány $f : A \to B$ szigorúan növekvő függvény létezik?*

Megoldás. Legyen $f(1) = a_1 \in B$, $f(2) = a_2 \in B$,..., $f(k) = a_k \in B$. Feltétel: $a_1 < a_2 < ... < a_k$. Ez csak akkor lehetséges, ha $k \leq n$ és ekkor a lehetőségek száma, tehát az $f : A \to B$ szigorúan növekvő függvények száma éppen C_n^k (a definíció szerint).

Ennek alapján az $1,2,...,n$ elemek k-adosztályú kombinációi úgy is definiálhatók, mint az $f : : A \to B$ szigorúan növekvő függvények.

I.1.5.8. Feladat. *Igazoljuk, hogy minden $k \geq 1$-re k egymásutáni egész szám szorzata osztható $k!$-sal.*

Megoldás. Feltehetjük, hogy az adott számok mind pozitívak, legyenek ezek (fordított sorrendben) $n, n-1, ..., n-k+1$, ahol $n \geq k$. Akkor szorzatuk $n(n-1)\cdots(n-k+1) = k!\, C_n^k$. Itt C_n^k egész szám és következik, hogy $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ osztható $k!$-sal.

Ennek következményeként adódik, hogy két egymásutáni egész szám szorzata osztható 2-vel, három egymásutáni egész szám szorzata osztható 6-tal, stb.

I.1.6. Ismétléses kombinációk

I.1.6.1. Feladat. *Az $1, 2, 3, 4$ számok közül válasszunk ki kettőt úgy, hogy ugyanazt az elemet kétszer is vehetjük, de nem vagyunk tekintettel a kiválasztott elemek sorrendjére. Mennyi a lehetőségek száma?*

Megoldás. A következőket kapjuk:

11 12 13 14 22 23 24 33 34 44

A lehetőségek száma 10.

I.1.6.2. Definíció. *Legyen adott n különböző elem ($n \geq 1$). Válasszunk ki közülük k elemet, ahol $k \geq 1$ úgy, hogy ugyanazt az elemet többször is vehetjük és írjuk fel ezeket úgy, hogy nem vagyunk tekintettel a kiválasztott elemek sorrendjére. Ezeket az elemsorozatokat az n* **elem k-adosztályú ismétléses kombinációi***nak nevezzük. Jelölje $\overline{C}_n^k$ az n elem k-adosztályú ismétléses kombinációinak a számát.*

Ha az $1,2,...,n$ elemek k-adosztályú ismétléses kombinációit tekintjük, akkor a számokat (általában) nagyságrendi sorrendben írjuk úgy, hogy ismétlődések is lehetnek.

Az I.1.6.1 Feladatban $\overline{C}_4^2 = 10$. Kérdés: Mennyi $\overline{C}_n^k$?

I.1.6.3. Tétel. *Ha $n, k \geq 1$, akkor* $\boxed{\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k}$, $\boxed{\overline{C}_n^k = \dfrac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!}}$.

Ha $n \geq 1$, $k \geq 0$, akkor $\boxed{\overline{C}_n^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}}$.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy bijektív leképezés létesíthető n elem k-adosztályú ismétléses kombinációi és $n+k-1$ elem k-adosztályú (ismétlés nélküli) kombinációi között. Innen következni fog, hogy $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Tekintsünk az $1,2,\ldots,n$ elemek egy tetszőleges, rögzített $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ ismétléses kombinációját, ahol $1 \le a_{i_1} \le a_{i_2} \le \ldots \le a_{i_k} \le n$. Adjuk hozzá az elemekhez rendre a $0,1,2,\ldots,k-1$ számokat, azaz legyen

$$a_{i_1}, a_{i_2}+1, \ldots, a_{i_k}+(k-1).$$

Ez az $1,2,\ldots,n+k-1$ elemeknek egy ismétlés nélküli kombinációja, mert itt $1 \le a_{i_1} < a_{i_2}+1 < < \ldots < a_{i_k}+(k-1) \le n+k-1$. Minden ilyen ismétlés nélküli kombinációt megkapunk és pontosan egyszer. Fordítva, ha $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_k}$ az $1,2,\ldots,n+k-1$ elemek egy ismétlés nélküli kombinációja, akkor $b_{i_1}, b_{i_2}-1, \ldots, b_{i_k}-(k-1)$ az $1,2,\ldots,n$ elemek egy ismétléses kombinációja lesz.

A többi képlet a C_n^k számokra vonatkozó korábbi képletekből adódik. ∎

Ha $k=0$, akkor innen $\overline{C}_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$, ami megfelel annak, hogy n elemből 0 számú elemet egyféleképpen választhatunk ki: úgy, hogy egy elemet se veszünk.

Az n elem k-adosztályú ismétléses kombinációi számának más jelölése $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$. Tehát

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

$$\overline{C}_n^k = \left\langle {n \atop k} \right\rangle = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!},$$

ahol a nevezők egyenlőek, a számlálókban pedig mindkét esetben k egymásutáni szám szorzata áll n-től kezdve lefelé, illetve n-től kezdve felfelé.

I.1.6.4. Feladat. *Hány olyan dominó van, amelynek mindkét felén a pontok száma* 0*-tól* 8*-ig terjed, lásd* I.1.4.7 *Feladat.*

Megoldás. A dominókat a pontok számának megfelelően xy-nal jelöljük, ahol $0 \le x \le y \le 8$. A lehetőségek száma definíció szerint $\overline{C}_9^2 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$.

I.1.6.5. Feladat. *Legyen* $A = \{1,2,\ldots,k\}$, $B = \{1,2,\ldots,n\}$. *Hány* $f : A \to B$ *növekvő függvény létezik?*

Megoldás. Legyen $f(1) = a_1 \in B$, $f(2) = a_2 \in B, \ldots, f(k) = a_k \in B$. Feltétel: $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k$. A lehetőségek száma, tehát az $f : A \to B$ növekvő függvények száma minden $n,k \ge 1$ esetén éppen $\overline{C}_n^k$ (a definíció szerint).

Ennek alapján az $1,2,\ldots,n$ elemek k-adosztályú ismétléses kombinációi úgy is definiálhatók, mint az $f : A \to B$ növekvő függvények.

Szokásos a következő jelölés is: ha x valós szám és $k \ge 1$ természetes szám, akkor

$$[x]^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1).$$

Így

$$\overline{C}_n^k = \frac{[n]^k}{k!} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!}.$$

I.2. fejezet

A binomiális és a polinomiális tétel

I.2.1. A binomiális tétel

Az $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ képletek általánosításaként igazoljuk a következő tételt.

I.2.1.1. Tétel. *Ha a, b tetszőleges komplex számok és $n \geq 1$ egész szám, akkor*

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k} \, .$$

Bizonyítás. Itt $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n-\text{szer}}$. A szorzások elvégzése érdekében az n zárójel mindegyikéből vagy az a-t vagy a b-t kell választani, ezeket össze kell szorozni, majd a kapott szorzatokat össze kell adni. Így egy olyan összeget kapunk, amelynek minden tagja $a^{n-k}b^k$ alakú, ahol $0 \leq k \leq n$. Ez a tag annyiszor szerepel, ahányszor az n számú b közül k számú b-t választunk és ez éppen $C_n^k = \binom{n}{k}$. ∎

Kiírva a tagokat $(a+b)^n$ következő kifejtését kapjuk:

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n} \, .$$

Figyeljük meg, hogy a kifejtésben $n+1$ tag van, az a kitevői n-től 0-ig csökkennek, a b kitevői pedig 0-tól n-ig növekednek. Az együtthatók a binomiális együtthatók (a „binom” görög eredetű szó, jelentése „két tag”, ez az $a+b$ kéttagú összegre vonatkozik).

I.2.1.2. Tétel. *Ha $n \geq 1$, akkor* $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0}$.

Bizonyítás. A binomiális tételben legyen $a = b = 1$, ill. $a = 1$, $b = -1$. ∎

A binomiális együtthatók összegére vonatkozó összefüggést már láttuk az I.1.5.6 Tételben. A második, a binomiális együtthatók váltakozó előjelű összegére vonatkozó képlet így is írható:

$$\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}} \, ,$$

tehát rögzített n felső index mellett a páros alsó indexű binomiális együtthatók összege egyenlő a páratlan alsó indexű binomiális együtthatók összegével, és egyenlő 2^{n-1}-gyel, mert az összes binomiális együttható összege 2^n.

A binomiális együtthatók egy másik fontos tulajdonsága a következő:

I.2.1.3. Tétel. *(Addiciós képlet) Ha $1 \le k \le n$, akkor* $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}$.

Bizonyítás. Az $\{a_1, a_2, \ldots, a_n,\}$ halmazból hányféleképpen választhatunk ki k elemet? Egyrészt $\binom{n}{k}$-féleképpen. Másrészt, rögzítsünk egy elemet, pl. az a_n-et. A kiválasztott elemek között a_n vagy szerepel vagy sem. Ha szerepel, akkor az $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ halmazból választanunk kell még $k-1$ számú elemet, ez $\binom{n-1}{k-1}$-féleképpen történhet. Ha nem szerepel, akkor az összes elemet az $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ halmazból kell választanunk. Ez $\binom{n-1}{k}$-féleképpen lehetséges. Összesen tehát $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ a lehetőségek száma. ■

Ez egy tipikus *kombinatorikus bizonyítás*, ellentétben az I.2.1.2 Tétel előbbi bizonyításával, amely *algebrai bizonyítás*, ott nincs semmi szerepe a $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatók jelentésének, csak az algebrai tulajdonságaikat használtuk ki. Természetesen minden (hibát nem tartalmazó) bizonyítás helyes és jó, de gyakran a kombinatorikus bizonyítások *szebbek*, jobban rávilágítanak a tulajdonság lényegére. Ugyanakkor sokszor nehéz ilyeneket találni.

Az I.2.1.3 Tétel algebrai bizonyítása:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,(n-k+k)}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,n}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Ez egy rekurzív képlet, amelynek segítségével kiszámíthatók a binomiális együtthatók. Az I.2.1 táblázat a binomiális együtthatókat tartalmazza. A rekurzív képlet szerint itt minden belső szám egyenlő az előző sorban a szám felett álló és az attól balra álló két szám összegével.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

I.2.1. táblázat. Binomiális együtthatók

A binomiális együtthatók a I.2.2 táblázat szerint is megadhatók, amit **Pascal-háromszög**nek nevezünk. Ebben az elrendezésben minden belső szám egyenlő a szám felett álló két szám összegével. Ennek alapján a táblázat könnyen kiegészíthető további sorokkal.

Mivel $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, a Pascal-háromszög soraiban a szélektől egyenlő távolságra álló számok egyenlőek.

I.2.1.4. Feladat. *Adjuk meg a Pascal-háromszög következő három sorát.*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

I.2.2. táblázat. Pascal-háromszög

I.2.1.5. Feladat. *Adjuk meg* $(a+b)^7$, $(a+b)^8$, $(x^2+1)^6$, $(\sqrt{x}+2\sqrt[3]{y})^6$ *kifejtéseit.*

I.2.1.6. Feladat. *Igazoljuk, hogy* $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}$, *ahol* $n \geq 1$.

Megoldás. $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\cdot 2^{n-1}$, a binomiális együtthatók összegére vonatkozó képlet szerint.

Másképp: Legyen $S(n)=\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = 1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+(n-1)\binom{n}{n-1}+n\binom{n}{n}$. A binomiális együtthatók szimmetria-tulajdonsága miatt $S(n)=n\binom{n}{0}+(n-1)\binom{n}{1}+\ldots+2\binom{n}{n-2}+1\binom{n}{n-1}$. Összeadva: $2S(n)=n(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n})=n\cdot 2^n$, ahonnan $S(n)=n\cdot 2^{n-1}$.

A binomiális képletnek érvényes a következő általánosítása, amelyet **általánosított binomiális képlet**nek nevezünk:

$$(1+x)^{\lambda} = 1+\lambda x+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}{k!}x^k+\ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\lambda}{k}x^k,$$

ahol $\lambda, x\in\mathbb{R}$, $|x|<1$ és $\binom{\lambda}{k} = \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}{k!}$, $k=0,1,2,\ldots$, az **általánosított binomiális együtthatók**. Ezt a képletet itt nem bizonyítjuk.

I.2.1.7. Feladat. *Igazoljuk, hogy az általánosított binomiális együtthatókra is igaz a*

$$\binom{\lambda}{k} = \binom{\lambda-1}{k}+\binom{\lambda-1}{k-1}$$

addiciós képlet.

Útmutatás. Közvetlen számolással.

I.2.1.8. Feladat. *Adjuk meg az általánosított binomiális képletet* $\lambda=-1$ *esetén.*

Megoldás. Ha $\lambda=-1$, akkor $\binom{-1}{k}=(-1)^k$ és azt kapjuk, hogy:

$$(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k.$$

I.2.2. A polinomiális tétel

A binomiális tétel egy általánosítása az $(a_1+a_2+...+a_r)^n$ kifejtésére vonatkozó polinomiális tétel.

I.2.2.1. Tétel. *Ha $r \geq 1$, $n \geq 1$ egész számok és $a_1, a_2, ..., a_r$ tetszőleges komplex számok, akkor*

$$\boxed{(a_1+a_2+...+a_r)^n = \sum_{\substack{k_1,k_2,...,k_r \geq 0 \\ k_1+k_2+...+k_r=n}} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_r!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_r^{k_r}} \;,$$

ahol az összeg a $k_1, k_2, ..., k_r \geq 0$ számok összes olyan megválasztására vonatkozik, a sorrend figyelembevételével, amelyekre $k_1+k_2+...+k_r = n$.

Bizonyítás. Az $(a_1+a_2+...+a_r)^n$ kifejezést egy n-tényezős szorzatként tekintve és „minden tagot minden taggal szorozva" azt kapjuk, hogy

$$(a_1+a_2+...+a_r)^n = \sum_{1 \leq i_1,i_2,...,i_n \leq r} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n},$$

ahol $i_1, i_2, ..., i_n$ az $1,2,...,r$ elemek n-edosztályú ismétléses variációi. Itt minden tag $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_r^{k_r}$ alakra hozható, ahol $k_1, k_2, ..., k_r \geq 0$ és $k_1+k_2+...+k_r = n$. Kérdés: Adott $k_1, k_2, ..., k_r$ esetén hány ilyen tag van?

Az $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n}$ szorzatból (a tényezők felcserélésével) akkor kapunk ilyen $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_r^{k_r}$ tagot, ha az $i_1, i_2, ..., i_n$ között pontosan k_1 db 1-es, k_2 db 2-es,..., k_r db r-es van. Így $i_1, i_2, ..., i_n$ az $1,2,...,r$ ismétléses permutációi és számuk $P_n^{(k_1,k_2,...,k_r)} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$. ∎

Az együtthatók a polinomiális együtthatók (a „polinom" görög eredetű szó, jelentése „több tag", ez az $a_1+a_2+...+a_r$ többtagú összegre vonatkozik).

I.2.2.2. Feladat. *Adjuk meg $(a+b+c)^3$, $(a+b+c)^4$, $(1+x+x^2)^3$, $(x+y+z+t)^3$ kifejtéseit.*

I.2.2.3. Feladat. *Igazoljuk, hogy a polinomiális együtthatók összege:*

$$\sum_{\substack{k_1,k_2,...,k_r \geq 0 \\ k_1+k_2+...+k_r=n}} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_r!} = r^n.$$

Megoldás. A polinomiális tételben legyen $a_1 = a_2 = ... = a_r = 1$.

I.2.3. A binomiális együtthatók tulajdonságai

Vizsgáljuk a binomiális együtthatókat. Ezek további tulajdonságait rögzítik a következő tételek.

I.2.3.1. Tétel.

1) (Elnyelési tulajdonság) Ha $1 \leq k \leq n$, akkor $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}}$.

2) (Trinomiális alak) Ha $1 \leq m \leq k \leq n$, akkor $\boxed{\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}}$.

Bizonyítás. 1) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

2) Algebrai úton az $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ képlet alapján. Végezzük el!

Kombinatorikus eljárás: Adott n fő (személy), akikből egy k tagú bizottságot kell választani, majd a k fős bizottság tagjai közül egy m fős albizottságot kell létrehozni. Ez $\binom{n}{k}\binom{k}{m}$-féleképpen tehető meg. Ugyanezt másképp összeszámolva: Először az n főből kiválasztjuk az m tagú albizottságot, majd a fennmaradó $n-m$ személy közül kiválasztjuk azt a $k-m$ főt, akik a bizottságnak az albizottságon kívüli részét képezik. A lehetőségek száma: $\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$. ∎

I.2.3.2. Tétel.

1) (Felső összegzés) Ha $1 \le k \le n$, *akkor*

$$\boxed{\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \ldots + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}}.$$

2) (Párhuzamos összegzés) Ha $n, m \ge 0$, *akkor*

$$\boxed{\binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \ldots + \binom{m+n}{n} = \binom{m+n+1}{n}}.$$

Bizonyítás. 1) Adjuk össze az addiciós képletből származó következő egyenlőségeket:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
\binom{n-1}{k} &= \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} \\
\binom{n-2}{k} &= \binom{n-3}{k} + \binom{n-3}{k-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\binom{k+1}{k} &= \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}
\end{aligned}$$

Összevonás után a bal oldalon csak az $\binom{n}{k}$ első tag marad, a jobb oldal első oszlopában pedig csak az $1 = \binom{k}{k} = \binom{k-1}{k-1}$ utolsó tag.

Másképp, kombinatorikus úton: Az $\{1,2,3,\ldots,n\}$ halmaznak $\binom{n}{k}$ számú k-elemű részhalmaza van. Csoportosítsuk ezeket a részhalmazokat a legkisebb elemük szerint:

az 1 a legkisebb elem $\binom{n-1}{k-1}$ számú részhalmazban, mert az 1-hez a $2,3,\ldots,n$ számok közül kell még $k-1$ számot választani,

a 2 a legkisebb elem $\binom{n-2}{k-1}$ számú részhalmazban, mert a 2-höz a $3,4,\ldots,n$ számok közül kell még $k-1$ számot választani,

....

az $n-k+1$ a legkisebb elem $\binom{n-(n-k+1)}{k-1} = \binom{k-1}{k-1} = 1$ számú részhalmazban, itt az $n-k+1$-et követő számok az $n-k+2,\ldots,n$ lesznek.

2)

$$\binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \ldots + \binom{m+n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k} \overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{m} =$$

$$= \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \ldots + \binom{m+n}{m} \overset{(2)}{=} \binom{m+n+1}{m+1} \overset{(3)}{=} \binom{m+n+1}{n},$$

ahol a következőket használtuk: (1) - szimmetria-tulajdonság, (2) - felső összegzés (a jelen tétel 1) pontja), (3) - szimmetria-tulajdonság. ■

I.2.3.3. Feladat. *Igazoljuk, hogy az $\{1,2,3,\ldots,n\}$ halmaz összes k-elemű részhalmazai legkisebb elemeinek a számtani középarányosa $\frac{n+1}{k+1}$.*

I.2.3.4. Tétel.

1) (Vandermonde-azonosság) Ha $0 \le r$ és $r \le m$, $r \le n$, akkor

$$\boxed{\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{r-2}+\ldots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{r}}.$$

2) Ha $n \ge 0$, akkor

$$\boxed{\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}}.$$

Bizonyítás. 1) Kombinatorikus eljárás: Legyen A egy m elemű halmaz, B pedig egy n elemű halmaz úgy, hogy $A \cap B = \emptyset$. Akkor $A \cup B$ számossága $m+n$. Hány r elemű részhalmaza van $A \cup B$-nek? Egyrészt $\binom{m+n}{r}$. Másrészt, minden r elemű részhalmazt megkapunk úgy, hogy összes lehetséges módon vesszük A-nak egy k elemű részhalmazát, B-nek egy $r-k$ elemű részhalmazát és képezzük ezek unióját, ahol $0 \le k \le r$. A lehetőségek száma éppen a 1) képletben a bal oldali összeg.

2) A Vandermonde-azonosságban legyen $m = n$, $r = n$ és használjuk a binomiális együtthatók szimmetria-tulajdonságát. ■

I.2.3.5. Feladat. *Legyen $0 \le m \le n$. Igazoljuk, hogy* $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\binom{n}{k}=\binom{n}{m}\cdot 2^{n-m}$.

Megoldás.

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\binom{n}{k}=\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}\overset{(1)}{=}\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}=\binom{n}{m}\sum_{k=m}^{n}\binom{n-m}{k-m}\overset{(2)}{=}$$

$$=\binom{n}{m}\sum_{j=0}^{n-m}\binom{n-m}{j}\overset{(3)}{=}\binom{n}{m}\cdot 2^{n-m},$$

ahol a következőket használtuk: (1) - trinomiális alak, (2) - összegzési index csere: $j = k-m$, (3) - a binomiális együtthatók összegére vonatkozó képlet.

Foglaljuk össze a binomiális együtthatók legfontosabb tulajdonságait:

(1) Faktoriális kifejtés (I.1.5.3 Tétel): $\boxed{\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$, $0 \le k \le n$.

(2) Szimmetria-tulajdonság (I.1.5.4 Tétel): $\boxed{\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}}$, $0 \le k \le n$.

(3) Elnyelési tulajdonság (I.2.3.1 Tétel): $\boxed{\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}}$, $1 \le k \le n$.

(4) Addiciós képlet (I.2.1.3 Tétel): $\boxed{\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}}$, $1 \le k \le n$.

(5) Trinomiális alak (I.2.3.1 Tétel): $\boxed{\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}}$, $1 \le m \le k \le n$.

(6) Binomiális tétel (I.2.1.1 Tétel): $\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n}$, $n \ge 1$.

(7) Felső összegzés (I.2.3.2 Tétel): $\boxed{\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \ldots + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}}$, $1 \le k \le n$.

(8) Párhuzamos összegzés (I.2.3.2 Tétel):

$$\boxed{\binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \ldots + \binom{m+n}{n} = \binom{m+n+1}{n}}, \; n, m \ge 0.$$

(9) Vandermonde-azonosság (I.2.3.4 Tétel):

$$\boxed{\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{r-2} + \ldots + \binom{m}{r}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}},$$

$0 \le r$, $r \le m$, $r \le n$.

(10) Binomiális együtthatók négyzetösszege (I.2.3.4 Tétel):

$$\boxed{\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}}, \; n \ge 0.$$

I.3. fejezet

Szitaképletek

Jelölje $|X|$ az X véges halmaz elemeinek a számát. Ha A és B véges halmazok, akkor

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Valóban, a jobb oldalon $|A|+|B|$ felírásával kétszer számoltuk a közös elemeket, egyszer A-nál, egyszer B-nél, ezért le kell vonni a közös elemek számát, azaz $|A \cap B|$-t. Hasonlóképpen gondolható végig, hogy ha A, B és C véges halmazok, akkor

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Itt a három halmaz közös elemeit tekintve, ezek számát $|A|+|B|+|C|$ felírásával háromszor hozzáadtuk, majd háromszor levontuk $(-|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|)$, az $|A \cap B \cap C|$ felírásával pedig egyszer ismét hozzáadtuk.

Általánosítva ezeket a képleteket igazoljuk, hogy

I.3.1. Tétel. *(Szitaképlet, a tartalmazás és kizárás elve) Ha $A_1, A_2, \ldots, A_r$ véges halmazok, akkor*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le r} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le r} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + \\ + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r|.$$

Bizonyítás. Lássuk be, hogy az $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r$ halmaz minden elemét a jobb oldalon pontosan egyszer számoltuk. Tegyük fel, hogy egy tetszőleges x elem az $A_1, A_2, \ldots, A_r$ halmazok közül p számúnak eleme $(1 \le p \le r)$, a többinek nem. Feltehető (átjelölve a halmazokat), hogy $x \in A_1$, $x \in A_2$,..., $x \in A_p$ és $x \notin A_{p+1}$,..., $x \notin A_r$. Akkor x-et a képlet jobb oldalán m-szer számoltuk, ahol

$$m = p - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \ldots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p},$$

de itt $m = 1$ az I.2.1.2 Tétel második képlete alapján. ■

Megjegyezzük, hogy a szitaképlet r-szerinti indukcióval is igazolható. Ez a képlet megadja az $A_1, A_2, \ldots, A_r$ halmazok uniójának számosságát, ha ismerjük az $A_1, A_2, \ldots, A_r$ halmazok elemszámát és az összes $A_i \cap A_j$, $A_i \cap A_j \cap A_k$, ... metszet elemszámát.

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_r \subseteq E$. Kérdés: Mennyi az E-re vonatkozó $E \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r) = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r}$ kiegészítő halmaz számossága?

I.3.2. Tétel. *(Szitaképlet, második alak) Ha $A_1, A_2, ..., A_r \subseteq E$ véges halmazok, akkor*

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r}| = |E| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le r} |A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le r} |A_i \cap A_j \cap A_k| + ... + \\ + (-1)^r |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_r|.$$

Bizonyítás. $|\overline{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r}| = |E| - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r|$ és alkalmazzuk az előző Tételt. ■

I.3.3. Feladat. *Legyen $n > 1$, $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ kanonikus alakú természetes szám. Jelölje $\phi(n)$ azoknak az a számoknak a számát, amelyekre $1 \le a \le n$ és $(a,n) = 1$ (a és n relatív prímek), ez az Euler-féle számelméleti függvény. Adjunk képletet $\phi(n)$-re!*

Megoldás. Legyen $E = \{1,2,...,n\}$, $A_i = \{a \in \mathbb{N} : 1 \le a \le n, p_i \mid a\}$, $1 \le i \le r$. Akkor $\phi(n) = = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r}|$. Itt, ha $i < j < k$, akkor $A_i \cap A_j = \{a : 1 \le a \le n, p_i p_j \mid a\}$, $A_i \cap A_j \cap A_k = \{a : : 1 \le a \le n, p_i p_j p_k \mid a\}$,..., és kapjuk, hogy $|A_i| = \frac{n}{p_i}$, $|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{n}{p_i p_j p_k}$, ... Következik, hogy

$$\phi(n) = n\left(1 - \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i} + \sum_{1\le i<j\le r} \frac{1}{p_i p_j} - ... + (-1)^k \sum_{1\le i_1<...<i_k\le r} \frac{1}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} + ... + (-1)^r \frac{1}{p_1 \cdots p_r}\right) = \\ = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

I.3.4. Tétel. *(Speciális szitaképlet) Legyenek $A_1, A_2, ..., A_r \subseteq E$ véges halmazok. Ha minden k esetén ($1 \le k \le r$) az $A_1, A_2, ..., A_r$ halmazok közül bármely k különböző metszete azonos elemszámú, akkor*

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r}| = |E| - \binom{r}{1}|A_1| + \binom{r}{2}|A_1 \cap A_2| - \binom{r}{3}|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + ... + \\ + (-1)^r \binom{r}{r} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_r|.$$

Bizonyítás. Azonnali a szitaképlet második alakjából. ■

I.3.5. Feladat. *Legyen A egy k elemű halmaz, B pedig egy n elemű halmaz ($n, k \ge 1$). Hány $f : A \to B$ szürjektív függvény létezik?*

Megoldás. Ha $k<n$, akkor nem létezik $f : A \to B$ szürjektív függvény. Legyen $k \ge n$. Feltehetjük, hogy $A = \{1,2,...,k\}$, $B = \{1,2,...,n\}$. Legyen E az összes $f : A \to B$ függvény halmaza, A_i pedig az olyan $f : A \to B$ függvényeknek a halmaza, amelyekre i nem képelem, ahol $1 \le i \le n$. Akkor az $f : A \to B$ szürjektív függvény halmaza $\overline{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n}$. Ha $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_r \le n$, akkor $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_r}$ azoknak az $f : A \to B$ függvényeknek a halmaza, amelyekre $i_1, i_2, ..., i_r$ egyike sem képelem. Az ilyen függvények száma $(n-r)^k$, lásd I.1.4.4. Az I.3.4 Tétel szerint kapjuk, hogy

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n}| = n^k + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} (n-r)^k = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n}{r} (n-r)^k,$$

ahol elegendő $r = 0$-tól $r = n-1$-ig venni a tagokat, mert $r = n$-re az utolsó tag 0.

Az $f : \{1,2,...,k\} \to \{1,2,...,n\}$ szürjektív függvények száma tehát

$$\boxed{s_{k,n} = n^k - \binom{n}{1}(n-1)^k + \binom{n}{2}(n-2)^k - ... + (-1)^{n-2}\binom{n}{n-2}2^k + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}}\ .$$

Ha $k < n$, akkor nincs szürjektív függvény, ezért $s_{k,n} = 0$ és következik, hogy a fenti összeg értéke nulla.

Ha $n = k$, akkor $s_{n,n}$ az $f : \{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$ bijektív függvények száma, ami $n!$, és a következő egyenlőséget kapjuk:

$$n! = n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - ... + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}.$$

Az $s_{k,n}$-re adott képlet így is írható: $s_{k,n} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^k = (-1)^n\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^k$, ahol a $j = n-r$ helyettesítést végeztük és használtuk, hogy $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$.

I.3.6. Feladat. *Legyen σ egy n-edfokú permutáció. Azt mondjuk, hogy i a σ fixpontja, ha $\sigma(i)=i$ (i a helyén marad). Hány olyan n-edfokú permutáció van, amelynek nincs fixpontja (egy szám se marad a helyén)?*

Megoldás. Legyen A_i azoknak a σ permutációknak a halmaza, amelyeknek i fixpontja, azaz $\sigma(i) = i$, ahol $1 \le i \le n$. Akkor a fixpont nélküli permutációk száma: $D_n = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n}|$. Ha $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_r \le n$ tetszőleges számok, akkor $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_r}$ azoknak a σ permutációknak a halmaza, amelyeknek $i_1, i_2, ...i_r$ fixpontjai, azaz $\sigma(i_1) = i_1$, $\sigma(i_2) = i_2$,..., $\sigma(i_r) = i_r$, és így $|A_{i_1} \cap \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_r}| = (n-r)!$.

A speciális szitaképlet szerint kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} D_n &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + ... + (-1)^n\binom{n}{n}0! = \\ &= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + (-1)^n\frac{1}{n!}\right). \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy itt $L = \lim_{n\to\infty}\frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e}$, ahol $e \approx 2{,}718$ a természetes logaritmus alapszáma. Az $L = \frac{1}{e} \approx 0{,}367$ érték annak a valószínűségének tekinthető, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott permutáció fixpont nélküli legyen.

A fenti képletből azonnali a következő rekurzió: $\boxed{D_n = nD_{n-1} + (-1)^n}$, ahol $n \ge 1$ és $D_0 = 1$ (megállapodás szerint). Innen meghatározhatók D_n egymást követő értékei: $D_1=0$, $D_2=1$, $D_3=2$, $D_4 = 9$, $D_5 = 44$, $D_6 = 265$,... .

I.3.7. Feladat. *Hány olyan n-edfokú permutáció van, amelynek pontosan r fixpontja van ($0 \le \le r \le n$)?*

Megoldás. A választ a $D_{n,r} = \binom{n}{r}D_{n-r}$ képlet adja, ugyanis az r fixpont $\binom{n}{r}$-féleképpen választható meg, a többi $n-r$ elem pedig egy olyan $(n-r)$-edfokú permutációt határoz meg, amely fixpont nélküli és ezek száma D_{n-r}. Alkalmazzuk ezek után a szorzási szabályt.

Megjegyzés. Csoportosítsuk az n-edfokú permutációkat aszerint hogy hány fixpontjuk van. Az összes n-edfokú permutáció száma $n!$ és a következő képletet kapjuk:

$$n! = \sum_{r=0}^{n} D_{n,r} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}D_{n-r}.$$

I.4. fejezet

Összeszámlálási feladatok

I.4.1. Összeszámlálási feladatok

I.4.1.1. Feladat. *Adott n különböző tárgy és r doboz $(n, r \geq 1)$. Helyezzük a tárgyakat a dobozokba úgy, hogy az 1. dobozba k_1 tárgy kerüljön, a 2. dobozba k_2 tárgy,..., az r-edik dobozba k_r tárgy, ahol $k_1+k_2+...+k_r=n$. Hányféleképpen lehetséges ez? (Az egyes dobozokban számít a tárgyak sorrendje.)*

Megoldás. Az 1. dobozba $\binom{n}{k_1}$-féleképpen választható meg a k_1 tárgy (a sorrend nem számít). Ezután a 2. dobozba a megmaradt $n-k_1$ közül bármelyiket választhatjuk $\binom{n-k_1}{k_2}$-féleképpen. A 3. dobozba a megmaradt $n-k_1-k_2$ közül bármelyiket választhatjuk $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$-féleképpen, stb. A lehetőségek száma így

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{n-k_1-k_2-...-k_{r-1}}{k_r} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!\,(n-k_1-k_2)!}\cdot\frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!\,(n-k_1-k_2-k_3)!}\cdots\frac{(n-k_1-k_2-...-k_{r-1})!}{k_r!\,0!} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_r!},$$

ami nem más, mint n elem $(k_1, k_2, ..., k_r)$ típusú ismétléses permutációinak $P_n^{(k_1,k_2,...,k_r)}$ száma.

Ez közvetlenül is belátható: Számozzuk meg az n tárgyat és a sorszámokat írjuk le egymás mellé. Írjunk 1-eseket azon sorszámok alá, amelyek az 1. dobozba kerültek (k_1 db 1-es lesz), írjunk 2-eseket azon sorszámok alá, amelyek a 2. dobozba kerültek (k_2 db 2-es), ..., írjunk r-eseket azoknak a tárgyaknak a sorszámai alá, amelyek az r-edik dobozba kerültek (k_r db r-es). Így egy $(k_1, k_2, ..., k_r)$ típusú ismétléses permutációt kapunk. Fordítva, minden ilyen ismétléses permutációnak megfelel egy dobozokba osztás.

Pl. $n=10$, $k_1=2$, $k_2=4$, $k_3=3$, $k_4=1$ esetén:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \quad \text{vagy} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{matrix}\ , \text{ stb.}$$

I.4.1.2. Feladat. *Hányféleképpen lehet n egyforma tárgyat k számozott dobozba helyezni úgy, hogy nem kell feltétlen minden dobozba tárgyakat tenni $(n, k \geq 1)$? (Az egyes dobozokban itt nem számít a tárgyak sorrendje.)*

Megoldás. Az $n=5$, $k=3$ esetben tekintsünk 5 egyforma pontot (labdát): ●●●●● .

Az elhelyezési lehetőségeket adjuk meg | elválasztójelekkel, pl. $\bullet\,|\,\bullet\bullet\bullet\,|\,\bullet$ azt jelenti, hogy az 1. dobozba 1 tárgy kerül, a 2. dobozba 3 tárgy, a 3. dobozba 1 tárgy kerül, ez az (1,3,1) rendezett számhármassal is jellemezhető. Más példa: $\bullet\bullet\,||\,\bullet\bullet\bullet$ azt jelenti, hogy az 1. dobozba 2 tárgy kerül, a 2. dobozba nem kerül tárgy, a 3. dobozba 3 tárgy kerül, azaz (2,0,3).

Két elválasztójel is kerülhet egymás mellé, és | jel állhat a legelején, vagy a legvégén. Két | jelre van szükség, amelyek elválasztják a pontokat. A pontokkal együtt ez $5+2=7$ jel, amelyeket tetszőlegesen permutálhatunk. A megoldások száma így $P_7^{(5,2)}=\frac{7!}{5!\cdot 2!}=21$.

Általánosan $k-1$ db | jelre van szükség, az n db ponttal együtt ez $n+k-1$ jel, amelyeket tetszőlegesen permutálhatunk. A megoldások száma

$$P_{n+k-1}^{(n,k-1)}=\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}=\binom{n+k-1}{n}=\binom{n+k-1}{k-1}.$$

Másképp: Annyi lehetőség van, ahányféleképpen az $n+k-1$ pozíció közül kiválasztható az a $k-1$, ahova az elválasztójelek kerülnek (illetve az az n hely, ahová a labdák kerülnek), és ez kombinációk definíciója szerint $\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{n+k-1}{n}$.

I.4.1.3. Feladat. *Legyenek $n,k\geq 1$. Hány olyan megoldása van az $x_1+x_2+...+x_k=n$ egyenletnek, ahol $x_1,x_2,...,x_k\geq 0$ egész számok és tekintettel vagyunk a sorrendre is?*

Megoldás. Pl. $n=5$, $k=3$ esetén az $x_1+x_2+x_3=5$ egyenlet ilyen megoldásai $(x_1,x_2,x_3)=$ =(0,0,5), (0,5,0), (5,0,0), (0,1,4), (0,4,1), (1,0,4), (1,4,0), (4,0,1), (4,1,0), (0,2,3), (0,3,2), (2,0,3), (2,3,0), (3,0,2), (3,2,0), (1,1,3), (1,3,1), (3,1,1), (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1), a megoldások száma 21.

Látható, hogy ez ugyanaz a probléma, mint az I.4.1.2 Feladatbeli. Ha $(x_1,x_2,...,x_k)$ jelöli a megoldásokat, akkor éppen $x_1,x_2,...,x_k\geq 0$ lesznek az egyes dobozokba kerülő tárgyak darabszámai.

A válasz tehát: az $(x_1,x_2,...,x_k)$ megoldások száma $\binom{n+k-1}{n}$.

I.4.1.4. Feladat. *Hányféleképpen lehet n egyforma tárgyat k számozott dobozba helyezni úgy, hogy minden dobozba kerüljön legalább egy tárgy ($n\geq k\geq 1$)?*

Megoldás. Az $n=5$, $k=3$ esetnél maradva tekintsünk 5 egyforma pontot (labdát): $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$. A megoldásokat adjuk meg most is | elválasztójelekkel (lásd I.4.1.2 Feladat), pl. ha az 1. dobozba 1 tárgy kerül, a 2. dobozba is 1 tárgy, a 3. dobozba 3 tárgy kerül, azaz (1,1,3), akkor ennek megfelel: $\bullet\,|\,\bullet\,|\,\bullet\bullet\bullet$, (2,2,1)-nek pedig megfelel $\bullet\bullet\,|\,\bullet\bullet\,|\,\bullet$. Itt két elválasztójel nem kerülhet egymás mellé, és | jel nem állhat a legelején és a legvégén.

Annyi megoldás van, ahányféleképpen a pontok közötti 4 helyre a 2 elválasztójel beilleszthető, tehát a 4 hely közül kell kettőt kiválasztani a sorrendre való tekintet nélkül, ez a szám $C_4^2=\binom{4}{2}=6$.

Általánosan az n pont közötti $n-1$ helyre kell a $k-1$ elválasztójelet beilleszteni, tehát az $n-1$ hely közül kell $k-1$-et kiválasztani a sorrendre való tekintet nélkül, ez a szám $C_{n-1}^{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$.

Másképp: Visszavezetjük az I.4.1.2 Feladatra. Tegyünk először minden dobozba egy-egy tárgyat. Akkor a megmaradt $n-k$ tárgyat kell még a k dobozba tenni úgy, hogy nem kell feltétlen minden dobozba további tárgyakat tenni. Az I.4.1.2 Feladat eredményét alkalmazva (n helyett $n-k$-ra) kapjuk, hogy a lehetőségek száma $\binom{n-k+k-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$ feltéve, hogy $n\geq k$.

Megjegyzés. Ha minden dobozba legalább r tárgynak kell kerülnie, akkor a lehetőségek száma $\binom{n-k(r-1)-1}{k-1}$. Valóban, előbb minden dobozba tegyünk r tárgyat, majd osszuk szét a megmaradt $n-kr$ tárgyat. Az I.4.1.2 Feladat szerint a lehetőségek száma $\binom{n-kr+k-1}{k-1}=\binom{n-k(r-1)-1}{k-1}$. Ha $r=1$, akkor az I.4.1.4 Feladat feltételei teljesülnek.

I.4.1.5. Feladat. *Legyenek $n,k\geq 1$. Hány olyan megoldása van az $x_1+x_2+...+x_k=n$ egyenletnek, ahol $x_1,x_2,...,x_k\geq 1$ egész számok és tekintettel vagyunk a sorrendre is?*

Megoldás. Pl. $n=5$, $k=3$ esetén az $x_1+x_2+x_3=5$ egyenlet ilyen megoldásai $(x_1,x_2,x_3)=$ $=(1{,}1{,}3),(1{,}3{,}1),(3{,}1{,}1),(1{,}2{,}2),(2{,}1{,}2),(2{,}2{,}1)$, a megoldások száma 6.

Látható, hogy ez ugyanaz a probléma, mint az I.4.1.4 Feladatbeli. Ha $(x_1,x_2,...,x_k)$ jelöli a megoldásokat, akkor éppen $x_1,x_2,...,x_k \geq 1$ lesznek az egyes dobozokba kerülő tárgyak darabszámai.

Így a válasz: az $(x_1,x_2,...,x_k)$ megoldások száma $\binom{n-1}{k-1}$, ahol $n \geq k$. Ha $n<k$, akkor nincs megoldás (a megoldások száma nulla).

Másképp: Az egyenlet így írható: $(x_1-1)+(x_2-1)+...+(x_k-1)=n-k$, ahol $x_i-1 \geq 0$ minden i-re. Az I.4.1.3 Feladat szerint (n helyett $n-k$-t írva) a megoldások száma $\binom{n-1}{k-1}$.

Megjegyzés. Jelölje az I.4.1.5 Feladatbeli egyenlet megoldásainak számát $c_k(n)$, ahol $c_k(n)=$ $=\binom{n-1}{k-1}$, itt k rögzített. Az egyenlet összes $x_1,x_2,...,x_k \geq 1$ egész számú megoldásainak a száma, tekintettel a sorrendre, ahol k változó:

$$c_n=\sum_{k=1}^{n} c_k(n)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=2^{n-1}.$$

I.4.1.6. Feladat. *Hányféleképpen lehet n különböző tárgyat k számozott dobozba helyezni a sorrend figyelembevételével ($n,k \geq 1$)?*

Megoldás. Az I.4.1.2 Feladathoz képest az a változás, hogy most nem n egyforma tárgyat, hanem n különböző tárgyat kell a k dobozba tenni.

A tárgyakat jelölje $\bullet_1\bullet_2...\bullet_n$, ezek most különbözők. Az elhelyezési lehetőségeket $k-1$ elválasztójellel tudjuk megadni, pl. $n=5$, $k=3$ esetén $\bullet_2\bullet_3|\bullet_1|\bullet_4$, vagy $\bullet_4\bullet_2||\bullet_1\bullet_3$. Ezt az $n+k-1$ jelet tetszőlegesen permutálhatjuk. A megoldások száma így $P_{n+k-1}^{(1,1,...,1,k-1)}=\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}=k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)$.

Ha $n=5$, $k=3$, akkor a lehetőségek száma $3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=2520$.

Másképp: Az elhelyezést két lépésben végezzük. 1. lépés: Sorbatesszük a tárgyakat, erre $P_n=n!$ lehetőség van. 2. lépés: A tárgyakat egyformáknak tekintve a dobozokba tesszük, a lehetőségek száma a I.4.1.2 Feladat szerint $\binom{n+k-1}{k-1}$. A szorzási szabály szerint a elhelyezések száma $n!\binom{n+k-1}{k-1}=$ $=\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}$.

Megjegyzés. Az eredmény így is megadható: $[k]^n=k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)$.

I.4.1.7. Feladat. *Adott n A-típusú különböző tárgy és k B-típusú különböző tárgy ($n,k \geq 1$). Hányféle sorrendje lehetséges ezeknek úgy, hogy két B-típusú tárgy nem kerülhet egymás mellé?*

Megoldás. Először helyezzük el egymás mellé az n db A-típusú tárgyat. Az elhelyezések száma $P_n=n!$. Ezután a k db B-típusú tárgy számára $n+1$ hely van, ugyanis az A-típusúak közé lehet tenni őket (a legelejére és a legvégére is lehet tenni). Az $n+1$ helyből kell k számú helyet kiválasztani úgy, hogy a sorrend is számít. A lehetőségek száma V_{n+1}^k, feltéve, hogy $k \leq n+1$. A válasz: $P_n V_{n+1}^k=\frac{n!(n+1)!}{(n-k+1)!}$, ha $k \leq n+1$. Ha $k>n+1$, akkor a ez a szám 0.

I.4.1.8. Feladat. *Adott n A-típusú egyforma tárgy és k B-típusú egyforma tárgy ($n,k \geq 1$). Hányféle sorrendje lehetséges ezeknek úgy, hogy két B-típusú tárgy nem kerülhet egymás mellé?*

Megoldás. Pl. hányféleképpen lehet sorba rendezni n db nullát (A-típus) és k db egyest (B-típus) úgy, hogy két egyes ne kerüljön egymás mellé?

1. mód. Hasonlóan, mint az I.4.1.7 Feladat megoldása, de most a sorrend nem számít, mivel egyforma elemekről (tárgyakról) van szó. Először helyezzük el az n nullát. Ekkor a k db egyes számára $n+1$ hely van, a nullák közé lehet tenni őket (a legelejére és a legvégére is lehet tenni). Pl. $n=5$, $k=3$ esetén: 10010100, 01001001, 00010101, stb. Az $n+1$ helyből kell k számú helyet kiválasztani úgy, hogy a sorrend nem számít. A lehetőségek száma $C_{n+1}^k=\binom{n+1}{k}$, feltéve, hogy $k \leq n+1$. Ha $n=5$, $k=3$, akkor ez $\binom{6}{3}=20$. Ha $k>n+1$, akkor a lehetőségek száma 0.

2. mód. Először a k egyes közé beírunk $k-1$ nullát, így egy ilyen sorozatot kapunk: 101010...10, majd a többi $n-k+1$ nullát tetszőlegesen beillesztjük úgy, hogy a legelejére és a legvégére is tehetünk. Tehát $n-k+1$ nullát $k+1$ helyre teszünk ismétléssel: $\overline{C}_{k+1}^{n-k+1} = C_{k+1+n-k+1-1}^{n-k+1} = C_{n+1}^{n-k+1} = \binom{n+1}{n-k+1} = \binom{n+1}{k}$. Pl. $n=5$, $k=3$-ra előbb a $k=3$ egyes közé a $k-1=2$ nullát beírva 10101, majd még $n-k+1=3$ nullát beillesztve: 10010010, 01001010, 01001001, stb.

I.4.1.9. Feladat. *a) A könyvespolcon* 15 *különböző könyv van. Hányféleképpen lehet közülük kiválasztani* 7 *könyvet úgy, hogy ezek között ne legyenek egymás mellett állók?*

b) Hányféleképpen lehet n könyv közül k könyvet kiválasztani úgy, hogy ezek között ne legyenek egymás mellett állók?

Megoldás. a) Alkalmazzuk az I.4.1.8 Feladat eredményét. A kiválasztott könyvhöz 1-est rendelünk, a többihez 0-t, ahol két 1-es nem lehet egymás mellett. Tehát $k=7$ db 1-est és $n=8$ db 0-t kell elhelyeznünk az adott módon. A keresett érték: $\binom{n+1}{k} = \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 36$.

b) A keresett érték $\binom{n-k+1}{k}$. Ez akkor nem nulla, ha $k \le n-k+1$, azaz $2k-1 \le n$, tehát ekkor lehet n könyv közül k könyvet az adott módon kiválasztani.

I.4.2. Egész számok partíciói

Ebben a szakaszban azt vizsgáljuk, hogy egy $n \ge 1$ egész szám hányféleképpen írható fel pozitív egészek összegeként, ill. k db pozitív egész összegeként, ahol k rögzített, úgy, hogy nem vagyunk tekintettel a tagok sorrendjére.

Például: $1=1$, $\quad 2=2=1+1$, $\quad 3=3=2+1=1+1+1$,

$4=4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$,

$5=5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$.

I.4.2.1. Definíció. *Az $n \ge 1$* **egész szám partíciójá***nak nevezünk minden $n=\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_k$ előállítást, ahol $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge ... \ge \lambda_k \ge 1$ egészek, jelölés: $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k)$. Azt mondjuk, hogy ez egy k részre (tagra) való partíció. Legyen $p(n)$ az n szám összes partícióinak száma és $p_k(n)$ az n olyan partícióinak száma, amelyekben a tagok száma k.*

A fentiek szerint $p(1)=1$, $p(2)=2$, $p(3)=3$, $p(4)=5$, $p(5)=7$. Továbbá pl. $p_1(5)=1$, $p_2(5)=2$, $p_3(5)=2$, $p_4(5)=1$, $p_5(5)=1$. Célszerű a (*) $p_0(0)=1$, $p_k(0)=0$, $k \ge 1$ megállapodás.

Rögtön adódik, hogy minden n-re $p_1(n)=1$ (ahol $n=n$), $p_n(n)=1$ (ahol $n=1+1+...+1$) és $p(n)=p_1(n)+p_2(n)+...+p_n(n)$.

Az I.4.1.5 Feladat megoldásában láttuk, hogy ha tekintettel vagyunk a sorrendre is, akkor az $n=x_1+x_2+...+x_k$, $x_1,...,x_k \ge 1$ előállítások száma $\binom{n-1}{k-1}$. Következik, hogy $p_k(n) \ge \frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1}$. Nem létezik explicit képlet $p(n)$-re.

A $p_k(n)$ függvényre vonatkozik a következő rekurzió:

I.4.2.2. Tétel. *Ha $n \ge k \ge 2$, akkor* $\boxed{p_k(n)=p_{k-1}(n-1)+p_k(n-k)}$.

Bizonyítás. Legyen λ egy k részre való partíció. Vizsgáljuk $p_k(n)$-et aszerint, hogy az utolsó λ_k rész 1 vagy 1-nél nagyobb.

Ha $\lambda_k=1$, akkor n-nek ugyanannyi partíciója van k részre, mint amennyi partíciója van $n-1$-nek $k-1$ részre. Ha $\lambda_k>1$, akkor minden rész nagyobb, mint 1, így minden részből 1-et kivonva az $n-k$ egy k részre való partícióját kapjuk. ■

n	$p(n)$	$p_1(n)$	$p_2(n)$	$p_3(n)$	$p_4(n)$	$p_5(n)$	$p_6(n)$	$p_7(n)$	$p_8(n)$
1	1	1							
2	2	1	1						
3	3	1	1	1					
4	5	1	2	1	1				
5	7	1	2	2	1	1			
6	11	1	3	3	2	1	1		
7	15	1	3	4	3	2	1	1	
8	22	1	4	5	5	3	2	1	1

I.4.1. táblázat. $p(n)$ és $p_k(n)$ értékei

Ha $k=n$, akkor $p_n(n)=p_{n-1}(n-1)+p_n(0)$ adódik, azaz $1=1+p_n(0)$, ami igaz (*) alapján.

Az I.4.1 táblázat a $p(n)$ és $p_k(n)$ értékeket tartalmazza, ahol $k \leq n \leq 8$.

A partíciók egy lehetséges reprezentálása az ún. **Ferrers-diagram**okkal történik. Pl. a $10 = 5+3+1+1$ partíciót úgy adjuk meg, hogy 5 pont kerül az első sorba, 3 pont a második sorba, 1 pont a harmadikba és 1 pont a negyedikbe:

• • • • •
• • •
•
•

Ennek a partíciónak a **konjugált**ja a $10=4+2+2+1+1$, amelynek **Ferrers-diagram**ját úgy kapjuk, hogy az előbbi diagramot tükrözzük a főátlóra (az $y=-x$ egyenesre). Az (5,3,1,1) partíció konjugáltja tehát a (4,2,2,1,1), amelynek diagramja a következő:

• • • •
• •
• •
•
•

A diagramok segítségével belátható:

I.4.2.3. Tétel. *Az n szám olyan partícióinak száma, amelyekben k a legnagyobb rész, egyenlő az n szám k részre való partícióinak számával.*

I.5. fejezet

Kombinatorika a geometriában

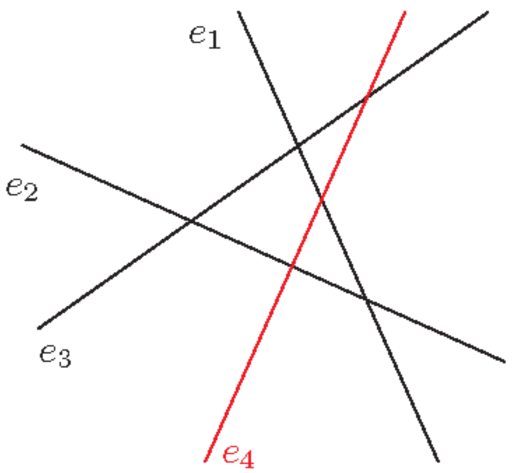
Azt mondjuk, hogy n egyenes *általános helyzetű* a síkban, ha bármely kettő metszi egymást, de bármely háromnak nincs közös pontja. Hasonlóan, n sík *általános helyzetű* a térben, ha bármely háromnak van közös pontja, bármely négynek viszont nincs.

I.5.1. Feladat. *Hány részre osztja a síkot n általános helyzetű egyenes?*

Megoldás. Jelölje E_n ezt a számot. Itt $E_1 = 2$, $E_2 = 4$, $E_3 = 7$. Rajzoljunk meg n egyenest, amelyek a síkot E_n részre osztják. Az $(n+1)$-edik egyenest meghúzva, ez az előbbi n egyenes mindegyikét metszi és az n metszéspont az $(n+1)$-edik egyenest $(n+1)$-részre osztja. Minden rész egy síkbeli tartományt kettévág, tehát így a síkrészek száma $(n+1)$-gyel növekszik. Kapjuk a következő rekurziót:

$$\boxed{E_{n+1} = E_n + (n+1), \quad n \geq 1.}$$

Például, ha $n = 3$, akkor adottak az e_1, e_2, e_3 egyenesek és rajzoljunk meg újabb e_4 egyenest, amely három (különböző) pontban metszi az előző egyeneseket, lásd az I.5.1 ábrát. Ezek a metszéspontok e_4-et négy részre osztják. Mindegyik rész egy síkbeli tartományt kettévág, tehát a síkrészek száma 4-gyel növekszik: $E_4 = E_3 + 4$, $E_4 = 7 + 4 = 11$.



I.5.1. ábra. *Egyenesek a síkban*

Összeadve az $E_2 = E_1 + 2$, $E_3 = E_2 + 3$, $E_4 = E_3 + 4$, ..., $E_{n-1} = E_{n-2} + (n-1)$, $E_n = E_{n-1} + n$

egyenleteket kapjuk, hogy $E_n = E_1 + (2+3+\ldots+(n-1)+n)$, ahonnan $E_n = 1+\dfrac{n(n+1)}{2}$,

$$\boxed{E_n = \frac{n^2+n+2}{2}, \quad n \geq 1.}$$

Megjegyzés. $E(n)$ így is írható: $E(n) = 1+\binom{n+1}{2}$, vagy $E(n) = \binom{n}{2}+\binom{n}{1}+\binom{n}{0}$.

I.5.2. Feladat. *Hány részre osztja a teret n általános helyzetű sík?*

Megoldás. Jelölje S_n a keresett számot. Itt $S_1 = 2$, $S_2 = 4$. Tekintsünk n síkot, amelyek a teret S_n részre osztják. Egy $(n+1)$-edik síkot az előbbi síkok E_n részre osztanak a metszésvonalaikkal, ahol E_n az I.5.1 Feladatbeli szám. Az $(n+1)$-edik sík E_n számú része minden eddigi térrészt kettéoszt, így a térrészek számát E_n-nel növeli. Következik, hogy

$$\boxed{S_{n+1} = S_n + E_n, \quad n \geq 1.}$$

Felírva ezt $n = 1,2,3,\ldots,n-1$-re és összeadva a kapott egyenleteket kapjuk, hogy $S_n = 2+E_1+$ $+E_2+\ldots+E_{n-1}$. Használva, hogy $E_n = 1+\binom{n+1}{2}$, innen $S_n = 2+(n-1)+\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n}{2}$, $S_n = n+1+\binom{n+1}{3}$ a binomiális együtthatók felső összegzési tulajdonsága szerint (I.2.3.2 Tétel), tehát

$$\boxed{S_n = \frac{n^3+5n+6}{6}, \quad n \geq 1.}$$

Megjegyezzük, hogy az addiciós képletet használva S_n így is írható: $S_n = \binom{n}{3}+\binom{n}{2}+\binom{n}{1}+$ $+\binom{n}{0}$.

Rögtön adódik, hogy n különböző pont az egyenest $P_n = n+1 = \binom{n}{1}+\binom{n}{0}$ részre osztja. Vegyük észre, hogy a rekurzív képletek szerint az (S_n) sorozat különbségsorozata az (E_n) számsorozat, (E_n) különbségsorozata pedig a (P_n) számsorozat, azaz $S_{n+1}-S_n = E_n$, $E_{n+1}-E_n = P_n$ minden n-re.

Innen az egymást követő P_n, E_n, S_n értékek könnyen meghatározhatók, lásd az I.5.1 táblázatot, ahol az E_n és az S_n sorában a második számtól kezdődően minden szám az előtte álló N szám és az N fölött álló számok összege.

n	1	2	3	4	5	6
P_n	2	3	4	5	6	7
E_n	2	4	7	11	16	22
S_n	2	4	8	15	26	42

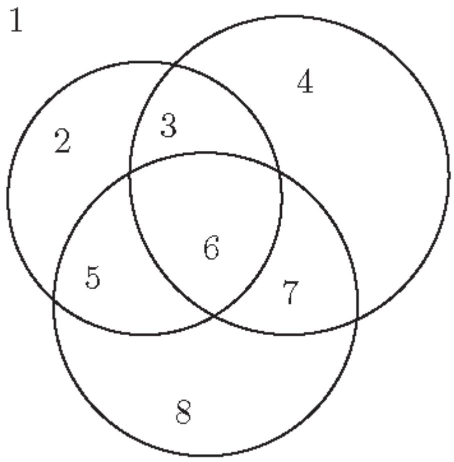
I.5.1. táblázat. A P_n, E_n és S_n számok táblázata

Azt mondjuk, hogy n kör általános helyzetű a síkban, ha bármely kettőnek két közös pontja van, bármely háromnak viszont nincs közös pontja.

I.5.3. Feladat. *Hány részre osztja a síkot n általános helyzetű kör?*

Megoldás. Jelölje K_n a keresett számot. Itt $K_1 = 2$, $K_2 = 4$, $K_3 = 8$. Három általános helyzetű kör a síkot 8 részre osztja, lásd az I.5.2 ábrát. Hány részre osztja a síkot négy kör?

Igaz-e vajon, hogy $K_n = 2^n$ minden n-re?



I.5.2. ábra. *Körök a síkban*

Tekintsünk n kört és még egy $(n+1)$-edik kört. Az $(n+1)$-edik kör az az első n kör mindegyikét két pontban metszi, így ezek a metszéspontok az $(n+1)$-edik kört $2n$ részre (körívre) osztják. Minden ilyen körív minden síktartományt kettévág, ezért

$$\boxed{K_{n+1} = K_n + 2n, \quad n \geq 2.}$$

Felírva ezt $n = 2, 3, .., n-1$-re és összeadva kapjuk, hogy $K_n = 2 + 2(1 + 2 + \ldots + n - 1) = 2 + n(n - - 1) = n^2 - n + 2$, tehát

$$\boxed{K_n = n^2 - n + 2, \quad n \geq 1.}$$

Így $K_4 = 14$, $K_5 = 22$, $K_6 = 32$, stb., és következik, hogy $K_n < 2^n$, ha $n \geq 4$.

Megjegyzés. Innen következik, hogy négy halmaz esetén Venn-diagramot nem lehet körlapokkal megrajzolni. Ugyanis négy halmaz esetén a síkot, illetve egy téglalapot, 16 részre kell osztani, mert egy elem az adott négy halmaz mindegyikéhez vagy hozzátartozik vagy sem, ez $\overline{V}_4^2 = 16$ lehetőség. Körök helyett más zárt görbékkel (pl. ellipszisekkel) vagy téglalapokkal megadható a Venn-diagram.

I.6. fejezet

Fibonacci-számok

A Fibonacci-számokat így definiáljuk: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $\boxed{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}$, ahol $n \geq 2$. A rekurziós képlet alapján F_2-től kezdve minden tag egyenlő az előző két tag összegével és kapjuk, hogy $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$, ...

Ez a számsorozat a következő problémából származik, amely szerepel Fibonacci (Leonardo Pisano) „Liber Abaci" című 1202-ben írt munkájában:

„Hány pár nyúlra szaporodik egy év alatt a kezdeti pár, ha tudjuk, hogy a nyulak két hónap alatt válnak szaporodóképessé, és ezután minden nyúl-pár minden hónapban egy új párnak ad életet és mindegyikük életben marad?"

A feladat megoldásában a nyúl-párok számának időbeli alakulását kell követni. Az első hónapban 1 nyúl-pár van, és ugyanannyi lesz a másodikban is, a párok száma a harmadik hónapban változik 1-ről 2-re. A következő hónapban a szülők újabb párnak adnak életet, így a párok száma 3-ra nő. Az ötödik hónapban már az új pár is szaporodóképes, így az új párok száma kettővel nő, és az összes párok száma 5 lesz. A következő hónapban már mindkét ifjabb generáció hoz létre utódokat, és a párok száma hárommal növekedve 8-ra változik, stb.

Jelölje a_n a nyúlpárok számát az n-edik hónapban. Itt $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 2$, mert az n-edik hónapban annyi nyúlpár van, mint az előző, az $(n-1)$-edik hónapban (a_{n-1} „régi" nyúlpár), amihez hozzá kell adni az $(n-2)$-edik hónapban létező nyúlpárok számát, mert ezek egy-egy új párral szaporodtak (a_{n-2} „új" nyúlpár).

Tehát, a kezdeti értékeket is figyelembe véve, a nyúl-párok száma az n-edik hónapban éppen F_n.

I.6.1. Feladat. *Hányféleképpen mehetünk fel egy n lépcsőfokból álló lépcsőn, ha egyszerre csak egy vagy két lépcsőfokot léphetünk?*

Megoldás. Legyen x_n a lehetőségek száma. Itt $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, mert pl. $n = 3$-ra ezek a lehetőségek: $1+1+1$, $1+2$ vagy $2+1$ lépcsőfok. Sejtés: $x_n = F_{n+1}$ minden $n \geq 1$-re.

Valóban, ha $n \geq 3$, akkor az utolsó lépés szerint két lehetőség van:

1. ha az utolsó lépés 1 lépcsőfok, akkor az $(n-1)$-edik fokra x_{n-1}-féleképpen léphetünk és 1 foknyi lépéssel felérünk az n-edik fokra,

2. ha az utolsó lépés 2 lépcsőfok, akkor az $(n-2)$-edik fokra x_{n-2}-féleképpen léphetünk és 2 foknyi lépéssel felérünk az n-edik fokra,

tehát $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ és innen indukcióval azonnali, hogy $x_n = F_{n+1}$ minden $n \geq 1$-re.

I.6.2. Feladat. *Egy n emeletes ház emeleteit hányféleképpen festhetjük le zöld és sárga színekkel úgy, hogy ne legyen két szomszédos sárga emelet?*

I.6.3. Feladat. *Hány olyan részhalmaza van az $\{1,2,...,n\}$ halmaznak, amelyek elemei között nincs két egymásutáni szám?*

Megoldás. Jelölje x_n ezt a számot. Itt $x_1=2$ (mert jó az $\emptyset$ és az $\{1\}$), $x_2=3$ (jó: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, nem jó: $\{1,2\}$), $x_3=5$ (jó: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,3\}$, nem jó: $\{1,2\}$, $\{2,3\}$,$\{1,2,3\}$).

Legyen $n\geq 3$ tetszőleges és tekintsük az $\{1,2,...,n\}$ halmaz olyan H részhalmazait, amelyek elemei között nincs két egymásutáni szám. Csoportosítsuk ezeket így:

I. Ha $n\in H$, akkor $n-1\notin H$ és annyi H részhalmaz van, amennyi az x_{n-2} érték.

II. Ha $n\notin H$, akkor annyi H részhalmaz van, amennyi az x_{n-1} érték.

Ezért $x_n=x_{n-2}+x_{n-1}$, és kapjuk, hogy $x_n=F_{n+2}$, ahol $n\geq 1$.

A továbbiakban képletet adunk F_n-re. Legyen

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n=x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5+8x^6+13x^7+...$$

az a hatványsor, amelynek együtthatói a Fibonacci-számok. Ezt a hatványsort a Fibonacci számsorozat **generátorfüggvény**ének nevezzük. Szorozva x-szel, majd x^2-tel kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}F(x)&=F_0+F_1x+F_2x^2+F_3x^3+F_4x^4+F_5x^5+...\\xF(x)&=\qquad F_0x+F_1x^2+F_2x^3+F_3x^4+F_4x^5+...\\x^2F(x)&=\qquad\qquad F_0x^2+F_1x^3+F_2x^4+F_3x^5+....\end{aligned}$$

Adjuk össze az utolsó két sort: $xF(x)+x^2F(x)=F_0x+(F_0+F_1)x^2+(F_1+F_2)x^3+(F_2+F_3)x^4+$ $+(F_3+F_4)x^5+...=F_0x+F_2x^2+F_3x^3+F_4x^4+F_5x^5+...$, amiből kivonva az első sort: $xF(x)+$ $+x^2F(x)-F(x)=-F_1x=-x$, tehát

$$F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}.$$

Bontsuk $F(x)$-et elemi törtek összegére. Itt az $1-x-x^2=0$ egyenlet gyökei $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Jelölje: $\vartheta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\overline{\vartheta}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ahol $\vartheta+\overline{\vartheta}=1$, $\vartheta\cdot\overline{\vartheta}=-1$. Akkor $1-x-x^2=-(x-x_1)(x-x_2)=-(x+\vartheta)(x+\overline{\vartheta})$. Legyen $F(x)=\dfrac{A}{x+\vartheta}+\dfrac{B}{x+\overline{\vartheta}}$. Az A és B értékeket meghatározva kapjuk, hogy

$$F(x)=-\frac{\vartheta}{\sqrt{5}(x+\vartheta)}+\frac{\overline{\vartheta}}{\sqrt{5}(x+\overline{\vartheta})}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\vartheta x}-\frac{1}{1-\overline{\vartheta}x}\right),$$

ami közvetlenül is ellenőrizhető.

Most használjuk, hogy $1+x+x^2+...+x^n+...=\dfrac{1}{1-x}$, ahol $|x|<1$ (geometriai sor). Innen

$$\frac{1}{1-ax}=1+ax+a^2x^2+...+a^nx^n+...,$$

amit alkalmazva $F(x)$ előbbi felírására kapjuk, hogy

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((1+\vartheta x+\vartheta^2x^2+...)-(1+\overline{\vartheta}x+\overline{\vartheta}^2x^2+...)\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((\vartheta-\overline{\vartheta})x+(\vartheta^2-\overline{\vartheta}^2)x^2+...\right),$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(\vartheta^n-\overline{\vartheta}^n)x^n.$$

Azonosítva az $F(x)$ hatványsorában az együtthatókat következik, hogy $F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\vartheta^n-\overline{\vartheta}^n)$, ahol $n\geq 0$. Összefoglalva az eddigieket:

I.6.4. Tétel.

i) A Fibonacci-számok generátorfüggvénye $\boxed{F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}}$.

ii) (Binet-képlet) [1] *Az F_n Fibonacci-számokra* $\boxed{F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\vartheta^n - \overline{\vartheta}^n),\ n \geq 0}$, *ahol* $\vartheta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx$ $\approx 1{,}618033$, $\overline{\vartheta} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}618033$.

Megjegyezzük, hogy ϑ és $\overline{\vartheta}$ az $x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet gyökei. Ezek a számok kapcsolatosak az **aranymetszés**sel. Aranymetszést akkor végzünk, ha egy szakaszt úgy osztunk két részre, hogy a nagyobbik aránya az egész szakaszhoz egyenlő legyen a kisebbik résznek a nagyobbik részhez való arányával. Ha x és y jelöli ezeket a részeket, ahol $x > y$, akkor a feltétel: $\dfrac{x}{x+y} = \dfrac{y}{x} = a$. Innen $x^2 - xy - y^2 = 0$ és az $x/y = u$ jelöléssel $u^2 - u - 1 = 0$, $u_1 = \vartheta > 0$, $u_2 = \overline{\vartheta} < 0$, tehát $u = x/y = \vartheta$. Az a „tökéletes arány" értéke pedig $y/x = 1/\vartheta = -\overline{\vartheta} \approx 0{,}618033$ (ez számos képzőművészeti alkotás elemei között megfigyelhető).

Mivel $|\overline{\vartheta}| < 1$, következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{\vartheta}^n = 0$, így $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_n}{\vartheta^n/\sqrt{5}} = 1$, azaz $F_n \sim \vartheta^n/\sqrt{5}$, olvasd: F_n aszimptotikusan egyenlő $\vartheta^n/\sqrt{5}$-tel.

Tehát nagy n értékekre F_n közelítőleg $\vartheta^n/\sqrt{5}$. Sőt, ez már kis n-ekre is nagyon jó közelítést ad. Pl. $n = 10$-re $F_{10} = 55$, $\vartheta^{10}/\sqrt{5} = 55{,}003636$, $n = 20$-ra $F_{20} = 6765$, $\vartheta^{20}/\sqrt{5} \approx 6765{,}000029$, $n = 25$-re $F_{25} = 75025$, $\vartheta^{25}/\sqrt{5} = 75024{,}999997$.

Mi több, $|\overline{\vartheta}^n/\sqrt{5}| < 1/2$, ahol $n \geq 0$, így a Binet-képletből $|F_n - \vartheta^n/\sqrt{5}| < 1/2$, tehát F_n távolsága $\vartheta^n/\sqrt{5}$-től $1/2$-nél kisebb minden $n \geq 0$-ra. Következik, hogy $\boxed{F_n = \left[\dfrac{\vartheta^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{2}\right],\ n \geq 0}$, ahol $[x]$ az x szám egészrészét jelöli, ami egy újabb zárt alak F_n-re. Az is igaz, hogy ha n páros, akkor $F_n < \vartheta^n/\sqrt{5}$, ha pedig n páratlan, akkor $F_n > \vartheta^n/\sqrt{5}$.

I.6.5. Feladat. *Igazoljuk, hogy* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n}$, *ahol* $n \geq 0$.

Megoldás. Használva a Binet-képletet és a binomiális-tételt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\vartheta^k - \overline{\vartheta}^k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \vartheta^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overline{\vartheta}^k =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}((1+\vartheta)^n - (1+\overline{\vartheta})^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vartheta^{2n} - \overline{\vartheta}^{2n}) = F_{2n}.$$

Az I.6.4 Tételbeli Binet-képlet teljes indukcióval közvetlenül is igazolható, de ehhez szükséges, hogy azt előre megsejtsük (ami nehéz). A Fibonacci-sorozat generátorfüggvényét használó fenti módszer előnye az, hogy az F_n-re vonatkozó képlet úgy vezethető le, hogy azt (vagy annak alakját) előre nem sejtjük. A levezetésben elég, ha formális hatványsorokkal dolgozunk, a konvergencia vizsgálata nélkül.

Általánosan az $(a_n)_{n\geq 0}$ valós **számsorozat generátorfüggvénye** az $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ formális hatványsor, az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ **véges** valós **számsorozat generátorfüggvénye** az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ polinom.

---

[1] Ezt a képletet Leonhard EULER publikálta 1765-ben, Jacques BINET 1843-ban újra felfedezte.

Pl. a binomiális együtthatók $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ sorozatához tartozó generátorfüggvény a következő polinom:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\ldots+\binom{n}{n}x^n=(1+x)^n.$$

A formális hatványsorokra, illetve a polinomokra vonatkozó szokásos műveleti szabályok (pl. az összeadásra, szorzásra, hatványozásra vonatkozó szabályok) alkalmazásával lehetőség van a vizsgált sorozatok tulajdonságainak viszgálatára (általános tag, rekurziós képletek). Továbbá a matematikai analízis eszközei is alkalmazhatók (differenciálás, integrálás). A műveletek többsége attól függetlenül elvégezhető, hogy a fellépő sorok konvergensek-e vagy sem.

A generátorfüggvények vizsgálata egy fontos és hatékony módszer nemcsak a kombinatorikában, hanem a matematika más területein is.

Megjegyezzük, hogy végtelen sok tagú sorozatok esetén a generátorfüggvény elnevezés kissé félrevezető, mert $A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$-et függvényként tekintve az $A(x)$ függvényérték konvergencia problémákat vet fel, amelyekkel nem szükséges foglalkoznunk, ha formális hatványsorokkal dolgozunk.

I.6.6. Feladat. *A binomiális együtthatók $(1+x)^n$ generátorfüggvényéből kiindulva igazoljuk, hogy*

a) $\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{r-2}+\ldots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{r}$, *ahol* $r\geq 0$, $r\leq m$, $r\leq n$, *lásd I.2.3.4 Tétel,*

b) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$, *ahol* $n\geq 1$, *lásd I.2.1.6 Feladat.*

Megoldás. a) $(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n$, itt a bal oldalon x^r együtthatója $\binom{m+n}{r}$. Vizsgáljuk meg mennyi x^r együtthatója a jobb oldalon.

b) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n$, deriválva: $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}=n(1+x)^{n-1}$, és $x=1$-re $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$.

A Fibonacci-sorozat általános tagjára vontkozó képlet másképpen is levezethető. A példatári részben szereplő 3 Feladatbeli eljárás alkalmas az $\boxed{x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1},\ n\geq 1}$ **másodrendű állandó együtthatós lineáris rekurzió**kkal adott sorozatok n-edik tagjának a meghatározására is, ahol $x_0=c$ és $x_1=d$ adott értékek.

Ha $a=b=1$, $c=0$, $d=1$ akkor visszakapjuk a Fibonacci-sorozatot. Ha $a=b=1$, $c=2$, $d=1$, akkor a következő sorozatot kapjuk:

$(L_n)_{n\geq 0}$, $L_{n+1}=L_n+L_{n-1}$, ahol $L_0=2$, $L_1=1$, ezt **Lucas-sorozat**nak nevezzük. Itt tehát $L_0=2$, $L_1=1$, $L_2=3$, $L_3=4$, $L_4=7$, $L_5=11$, $L_6=18, \ldots$.

I.7. fejezet

Catalan-számok

I.7.1. Feladat. *Adottak az $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ változók (számok), ahol $n \geq 0$, és tekintsük ezek $a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ szorzatát. Hányféleképpen zárójelezhető egyértelműen ez a szorzat? Pontosabban: Hányféleképpen zárójelezhető ez a szorzat $n-1$ zárójelpár alkalmazásával?*

Jelöljük C_n-nel ezt a számot. Ha $n=2$, akkor két lehetőség van: $(a_0 \cdot a_1) \cdot a_2$ és $a_0 \cdot (a_1 \cdot a_2)$, tehát $C_2 = 2$. Ha $n=3$, akkor a lehetőségek: $((a_0 \cdot a_1) \cdot a_2) \cdot a_3$, $(a_0 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \cdot a_3$, $a_0 \cdot ((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3)$, $a_0 \cdot (a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3))$, $(a_0 \cdot a_1) \cdot (a_2 \cdot a_3)$, ezek száma $C_3 = 5$. Továbbá $C_1 = 1$ (két tényező), $C_0 = 1$ (ekkor egy tényező van). Mi lesz C_n?

A továbbiakban a generátorfüggvény módszerrel igazoljuk, hogy $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ minden $n \geq$ ≥ 0-ra. Ezeket a számokat, amelyek számos kombinatorikai problémában fellépnek, **Catalan-számok**nak nevezzük. [1]

A Catalan-számok sorozata $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$, $C_5 = 42$, $C_6 = 132$, $C_7 = 429$, $C_8 = 1430$, ... Jelölje $C(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ...$ a C_n számok generátorfüggvényét.

I.7.2. Tétel.

1) Ha $n \geq 1$, akkor $\boxed{C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + ... + C_{n-1} C_0}$.

2) $\boxed{C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}}}$.

Bizonyítás. 1) Legyen $n \geq 1$ tetszőleges és tekintsük $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ valamely zárójelezését. Figyeljük meg, hogy pontosan egy olyan szorzásjel van, amely minden zárójelen kívül esik. Ha ez a szorzásjel az a_k és a_{k+1} közé esik, akkor az előtte levő $a_0, a_1, ..., a_k$ változók C_k-féleképpen zárójelezhetők, az utána levő $n-k$ változó pedig C_{n-k-1}-féleképpen, így a lehetőségek száma rögzített k-ra $C_k C_{n-k-1}$, összesen pedig $\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$.

2) Az 1) pontbeli képlet alapján

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}) x^n = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \sum_{n=k+1}^{\infty} C_{n-k-1} x^{n-k} =$$

$$= 1 + x \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \sum_{n=k+1}^{\infty} C_{n-(k+1)} x^{n-(k+1)},$$

[1] Catalan, Eugène Charles (1814–1894) belga matematikus neve után. Catalan ezeket a számokat Segner-számoknak nevezte. Segner, János András (1704–1777) magyar tudós volt, Pozsonyban született, Jénában, Göttingenben, Halléban volt egyetemi tanár, orvosi, fizikai és matematikai előadásokat tartott. 1758-ban adta meg az $a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + ... + a_{n-1} a_0$ rekurziót Eulernek a konvex sokszögekre vonatkozó problémájára, lásd I.7.4 Feladat.

ahol $\sum_{n=k+1}^{\infty} C_{n-(k+1)} x^{n-(k+1)} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots = C(x)$, így kapjuk, hogy

$$C(x) = 1 + xC^2(x), \quad \text{és innen} \quad C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{2}{1 \mp \sqrt{1-4x}}.$$

Melyik a megfelelő előjel? Mivel $C(0) = C_0 = 1$ következik, hogy $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}}$ a helyes képlet. ∎

Az 1) pontbeli rekurzív képletből (amelynek jobb oldala egy konvolúciós összeg) meghatározhatók az egymást követő C_n számok.

I.7.3. Tétel. *Minden $n \geq 0$ számra* $\boxed{C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}$.

Bizonyítás. Használjuk az általánosított binomiális képletet, lásd az I.2.1.7 előtti képletet, ahonnan $\lambda = 1/2$-re $\sqrt{1-4x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4x)^k$ és az I.7.2 Tétel szerint

$$C(x) = \frac{1}{2x}\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4x)^k\right) = -\frac{1}{2x} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4)^k x^k = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4)^k x^{k-1},$$

és a $k-1 = n$ helyettesítéssel

$$C(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n+1} (-4)^n x^n.$$

Adjuk meg most $\binom{1/2}{n+1}$ értékét:

$$\binom{1/2}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(n+1)!\, 2^{n+1}} =$$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{n+1}(n+1)! \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n)} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n+1)!\, n!} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n+1}(n+1)} \binom{2n}{n}.$$

Behelyettesítve következik, hogy

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n,$$

ahonnan kapjuk a C_n-re vonatkozó képletet. ∎

Ismertetünk további néhány olyan kombinatorikai feladatot, amelyekben a Catalan-számok lépnek fel.

I.7.4. Feladat. *(Euler) Hányféleképpen lehet egy n oldalú konvex sokszöget háromszögekre bontani olyan átlókkal, amelyek a sokszög belsejében nem metszik egymást?*

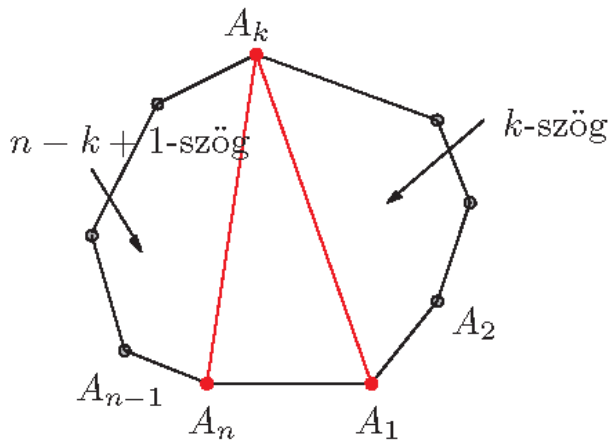
Megoldás. Jelöljük a keresett számot E_n-nel. Itt $E_2=1$ (megállapodás szerint), $E_3=1$, $E_4=2$, $E_5=5$. Tekintsük az $A_1A_2\dots A_n$ sokszög egy háromszögekre bontását. Legyen az A_1A_n oldalú háromszög harmadik csúcsa A_k (5. ábra). Az A_1A_k és A_kA_n átlók az n-szöget az $A_1A_2...A_k$ k-szögre, az $A_1A_kA_n$ háromszögre és az $A_kA_{k+1}...A_n$ $(n-k+1)$-szögre bontják. Mivel a k-szöget E_k-féleképpen, az $(n-k+1)$ szöget E_{n-k+1}-féleképpen bonthatjuk fel háromszögekre ezért az $A_1A_kA_n$ háromszöget tartalmazó háromszögekre bontások száma E_kE_{n-k+1}, ahol $2\le k\le n-1$. Összegezve: $E_n=\sum_{k=2}^{n-1}E_kE_{n-k+1}$, ahol $n\ge 3$.

Ha n helyett $(n+2)$-őt írunk (a feladatban n oldalú sokszög helyett $n+2$ oldalú sokszöget tekintünk), akkor kapjuk, hogy $E_{n+2}=\sum_{k=2}^{n+1}E_kE_{n-k+3}$, innen az $E'_n=E_{n+2}$ jelöléssel $E'_n=\sum_{k=2}^{n+1}E'_{k-2}E'_{n-k+1}$, azaz

$$E'_n=\sum_{j=0}^{n-1}E'_jE'_{n-j-1},$$

ami ugyanaz, mint a I.7.2 Tételben szereplő rekurzió. Mivel a kezdeti értékekre $E'_1=1=C_1$, következik, hogy $E'_n=C_n$ minden $n\ge 1$-re.

Tehát $E_n=C_{n-2}=\dfrac{1}{n-1}\dbinom{2n-4}{n-2}$, $n\ge 3$.



I.7.1. ábra. *Konvex sokszög felbontása háromszögekre*

Közvetlenül is beláthatjuk, hogy minden n-re bijektív megfeleltetés van egy $(n+2)$-oldalú konvex sokszög háromszögekre bontásai és az $a_0\cdot a_1\cdots a_n$ szorzat zárójelezései között, ahonnan következik, hogy $E_{n+2}=C_n$. Valóban, ha adott egy $(n+2)$-oldalú konvex sokszögnek egy háromszögekre bontása, akkor kövessük az alábbi eljárást:

a) írjuk fel a sokszög oldalaira egymásután az a_0, a_1, ..., a_n változókat,

b) keressünk egy olyan háromszöget, amelynek két oldala a sokszög szomszédos megjelölt oldalai (biztosan van ilyen háromszög),

c) töröljük le az ábráról ezt a két oldalt, és a két oldalon levő változók szorzatát írjuk fel a háromszög harmadik oldalára (az eredeti sokszög egy átlójára),

d) a kapott sokszögre ismételjük meg a b), c), d) lépéseket.

Így a $a_0\cdot a_1\cdots a_n$ szorzat egy zárójelezését kapjuk. Belátható, hogy különböző háromszögekre bontásokhoz különböző zárójelezések tartoznak, és minden zárójelezést megkapunk.

I.7.5. Feladat. *Hányféleképpen juthatunk el a koordinátarendszerben a* $(0{,}0)$ *pontból a* $(2n{,}0)$ *pontba úgy, hogy lépéseink az* $f=(1{,}1)$ *és* $\ell=(1,-1)$ *vektorok lehetnek és ne menjünk a vízszintes tengely alá? (*$f=$ *átlósan fel egyet,* $\ell=$ *átlósan le egyet a rácspontok között.)*

I.7.6. Feladat. *Hány olyan* $2n$*-tagú* $x_1,x_2,\dots,x_{2n}$ *sorozat van, ahol a tagok mindegyike* $+1$ *vagy* -1*,* $x_1+x_2+\dots+x_{2n}=0$*, és az* $x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3,\dots,x_1+x_2+\dots+x_{2n}$ *parciális összegek mindegyike* ≥ 0*?*

Megoldás. Ez ugyanaz a probléma, mint az I.7.5 Feladatbeli. Az $f=$ fel lépést jelölje $+1$, az $\ell=$ le lépést jelölje -1, ahol az $n-1$ db. $+1$-et és az $n-1$ db. (-1)-et egymás mellé írva összegük 0 lesz. Az, hogy az út nem megy a vízszintes tengely alá éppen azzal ekvivalens, hogy a parciális összegek mind ≥ 0 értékűek.

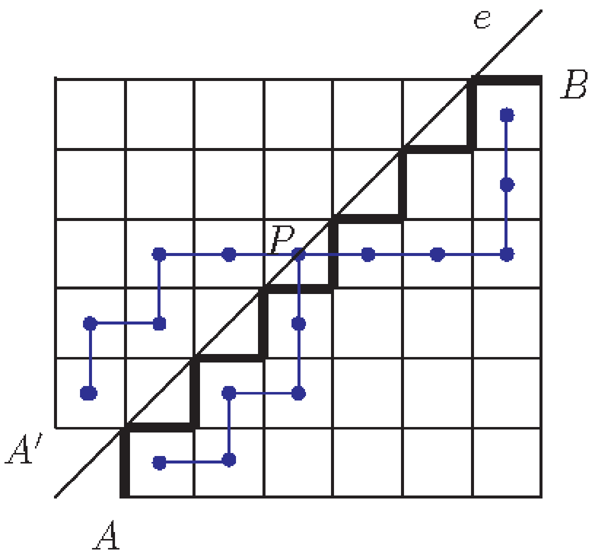
Válasz: $C_n=\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

I.7.7. Feladat. *Hányféleképpen juthatunk el az* $n\times n$*-es sakktáblán a bal alsó sarokból a jobb felső sarokba úgy, hogy egyszerre egyet léphetünk felfelé vagy jobbra és nem léphetünk a (bal alsó sarkot a jobb felső sarokkal összekötő) mellékátló fölé?*

Megoldás. Legyen a_n és b_n az összes lehetséges utak száma, ill. a mellékátló alatt maradó utak száma. Itt $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=6$, $a_4=20$, ... és $b_1=1$, $b_2=1$, $b_3=2$, $b_4=5$, ...

Jelölje A és B a bal alsó sarkot, ill. a jobb felső sarkot. Az A-t B-vel összekötő utak (törött vonalak) száma $a_n=\binom{2n-2}{n-1}$, mert $2n-2$ lépésre van szükség, ebből $n-1$ lépés felfelé és $n-1$ lépés jobbra. Azt kell megadni pl., hogy mikor lépünk jobbra. A $2n-2$ lépésből kell tehát kiválasztani $(n-1)$-et, a sorrend nem számít.

Ezek közül hány olyan $A-B$ út van, amely a mellékátló alatt marad? Nevezzük ezeket „jó” utaknak. Tekintsük a nem ilyen, a „rossz” utakat. Minden rossz út a mellékátló fölé kerül, tehát metszi az I.7.2 ábrán látható e egyenest. Jelölje P azt a pontot, ahol egy rossz út először metszi az e egyenest. A rossz út így az $A-P$ és $P-B$ részekből áll. Az $A-P$ törött vonalat tükrözzük az e egyenesre, legyen a tükörkép az $A'-P$ törött vonal. Az $A'-P$ együtt a $P-B$-vel (ez utóbbi változatlanul) egy $A'-B$ út.



I.7.2. ábra. *Sakktábla és a Catalan-számok*

Belátható, hogy így bijektív megfeleltetést létesítettünk az $A-B$ rossz utak és az $A'-B$ (összes lehetséges) utak között. Itt A'-ből B-be úgy juthatunk, hogy a $2n-2$ lépésből megadjuk azt az n-et, amikor jobbra lépünk. Ezek száma $\binom{2n-2}{n}$, hasonlóan, mint a megoldás elején.

A jó utak száma így $b_n=\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n}=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}=C_{n-1}$. Ez egy közvetlen bizonyítás, itt nem hivatkoztunk a Catalan-számok előzetesen levezett tulajdonságaira.

Innen következik az I.7.6 Feladat megoldása is. Valóban, n helyett $n+1$-et írva tekintsük az $(n+1)\times(n+1)$-es sakktáblát. A jobbra lépést jelölje $+1$, a felfele történő lépést -1. Itt az n db. $+1$ és az n db. (-1)-et egymás mellé írva összegük 0 lesz. Az, hogy az út a mellékátló alatt marad éppen azzal ekvivalens, hogy a parciális összegek mind ≥ 0 értékűek. Tehát az I.7.6 Feladatra a válasz: $C_n=\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

Megmutatjuk, hogy az eredeti I.7.1 Feladatra is adható a generátorfüggvény módszert nem használó, elemi megoldás úgy, hogy visszavezetjük a most közvetlenül megoldott I.7.6 Feladatra. Bijektív megfeleltetés van az $a_0 \cdot a_1 \cdots a_n$ szorzat zárójelezett alakjai és az I.7.6 Feladat feltételeinek eleget tevő $2n$-tagú $x_1, x_2, ..., x_{2n}$ sorozatok között.

Valóban, tekintsük az $a_0 \cdot a_1 \cdots a_n$ szorzat egy tetszőleges zárójelezett alakját.

1. lépés: tegyünk ki még egy pár zárójelet az elejére és a végére,

2. lépés: a szorzásjelek helyett írjunk $+1$-et,

3. lépés: a jobb oldali zárójelek helyett írjunk -1-et,

4. lépés: a bal oldali zárójeleket és az $a_0, a_1, ..., a_n$ változókat töröljük le.

Ekkor a kapott $+1$ és -1 számokból álló sorozat teljesíti a 15.6. Feladat feltételeit. Különböző zárójelezésekhez különböző sorozatok tartoznak és minden sorozatot megkapunk. Pl. $n=3$-ra

$(a_0 \cdot a_1) \cdot (a_2 \cdot a_3)$-ból kiindulva $((a_0 \cdot a_1) \cdot (a_2 \cdot a_3))$ és $+1-1+1+1-1-1$ adódik,

$a_0 \cdot (a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3))$-ból kiindulva $(a_0 \cdot (a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3)))$ és $+1+1+1-1-1-1$ adódik.

I.8. fejezet

Stirling-számok

I.8.1. Másodfajú Stirling-számok

Először az ún. másodfajú Stirling-számokkal foglalkozunk.

Legyen A egy tetszőleges véges halmaz és legyenek $B_1, B_2, ..., B_k \subseteq A$. Ha ezek a részhalmazok nem üresek, páronként diszjunktak és uniójuk az A halmaz, akkor azt mondjuk, hogy $B_1, B_2, ..., B_k$ az A halmaz egy osztályfelbontását (más néven osztályozását vagy partícióját) alkotják. A B_i részhalmazokat osztályoknak vagy blokkoknak nevezzük. Az osztályfelbontások képzését az adott halmaz particionálásának is nevezzük.

Legyen A egy n-elemű halmaz ($n \ge 1$). Hány k részhalmazra való osztályfelbontása van A-nak? Ha pl. $k = 2$, akkor A-t két nemüres valódi részhalmazra kell bontanunk. Egy ilyen részhalmazt $(2^n - 2)$-féleképpen lehet kiválasztani (az üres halmaz és az A nem jók), ekkor a másik részhalmaz meghatározott. De a két halmaz sorrendje lényegtelen, ezért a lehetőségek száma $2^n - 2$ fele, azaz $2^{n-1} - 1$.

Pl. $A = \{1,2,3\}$ két részhalmazra való partíciói: $\{1,2\} \cup \{3\}$, $\{1,3\} \cup \{2\}$, $\{2,3\} \cup \{1\}$, ezek száma $3 = 2^{3-1} - 1$.

Az $A = \{1,2,3,4\}$ két részhalmazra való partíciói: $\{1\} \cup \{2,3,4\}$, $\{2\} \cup \{1,3,4\}$, $\{3\} \cup \{1,2,4\}$, $\{4\} \cup \{1,2,3\}$, $\{1,2\} \cup \{3,4\}$, $\{1,3\} \cup \{2,4\}$, $\{1,4\} \cup \{2,3\}$, ezek száma $7 = 2^{4-1} - 1$.

I.8.1.1. Definíció. *Legyenek $n \ge 1$, $k \ge 1$. Egy n-elemű halmaz k részhalmazra való osztályfelbontásainak számát* **másodfajú Stirling-szám***nak nevezzük, jelölés $\left\{ {n \atop k} \right\}$ vagy $S(n,k)$. Az összes partíciók száma a $B(n)$-nel jelölt* **Bell-szám**, *amelyre $B(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$.*

Megjegyezzük, hogy $B(n)$ nem más, mint egy n elemű halmazon definiálható ekvivalenciarelációk száma.

A definíció szerint azonnali, hogy ha $k > n$, akkor $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$. Továbbá $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$ $(n \ge 1)$, $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$ $(n \ge 2)$, $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ $(n \ge 1)$. Láttuk, hogy $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$ $(n \ge 2)$.

Megállapodás szerint (*) $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ minden $n \ge 1$-re és (**) $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$.

I.8.1.2. Tétel. *Ha $1 \le k \le n$, akkor*

$$\boxed{\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}}\,.$$

Bizonyítás. Legyen $2 \le k \le n$. Tekintsük egy n-elemű halmaz k részhalmazra (k blokkra) való partícióit. Az n-edik elem vagy önmaga alkot egy blokkot, vagy nem.

n	$\left\{ n \atop 1 \right\}$	$\left\{ n \atop 2 \right\}$	$\left\{ n \atop 3 \right\}$	$\left\{ n \atop 4 \right\}$	$\left\{ n \atop 5 \right\}$	$\left\{ n \atop 6 \right\}$	$B(n)$
1	1						1
2	1	1					2
3	1	3	1				5
4	1	7	6	1			15
5	1	15	25	10	1		52
6	1	31	90	65	15	1	203

I.8.1. táblázat. Másodfajú Stirling-számok és Bell-számok

Ha $\{n\}$ egy blokk, akkor $n-1$ elemet kell még $k-1$ blokkra osztani és ez $\left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$-féleképpen lehetséges.

Ha $\{n\}$ nem blokk, akkor particionáljuk először az $\{1,2,...,n-1\}$ halmazt k blokkra, ezt $\left\{ n-1 \atop k \right\}$-féleképpen lehet megtenni. Majd mind a k blokkhoz vegyük hozzá az n elemet, ez k-féleképpen lehetséges.

A partíciók száma tehát $\left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k\left\{ n-1 \atop k \right\}$.

Ha $k=1$, akkor $\left\{ n \atop 1 \right\} = \left\{ n-1 \atop 1 \right\} + \left\{ n-1 \atop 0 \right\}$. Innen $n \geq 2$-re a fenti (*) konvenció szerint $1=1+0$, ami igaz, $n=1$-re pedig (**) szerint $1=0+1$, ami igaz (ezért célszerűek a (*) és (**) konvenciók). ∎

Az I.8.1 táblázat a másodfajú Stirling-számokat és a Bell-számokat tartalmazza:

Az előbbi rekurzív képlet szerint (amely hasonló a binomiális együtthatók addiciós képletéhez) itt minden $\left\{ n \atop k \right\}$ belső szám egyenlő a felette álló szám k-szorosának és az attól egy hellyel balra álló szám összegével. Ennek alapján a táblázat könnyen kiegészíthető újabb sorokkal.

I.8.1.3. Feladat. *Adjuk meg az 5. Táblázat következő három sorát.*

A Bell-számokra vonatkozik a következő rekurzió. Megjegyezzük, hogy az I.8.1.1 Definíció és az előbbi (*) konvenció szerint $B(n) = \left\{ n \atop 0 \right\} + \left\{ n \atop 1 \right\} + ... + \left\{ n \atop n \right\}$ $(n \geq 1)$. Ha $n=1$, akkor innen $B(0) = \left\{ 0 \atop 0 \right\} = 1$ (**) szerint, ezért legyen (***) $B(0)=1$.

I.8.1.4. Tétel. *Ha $n \geq 0$, akkor*

$$\boxed{B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k)}\,.$$

Bizonyítás. Nézzük az $\{1,2,...,n,n+1\}$ halmaz összes partícióit aszerint, hogy az $n+1$ elem blokkja hány elemet tartalmaz.

Tegyük fel, hogy az $n+1$ blokkjában j számú elem van, ahol $1 \leq j \leq n+1$. Akkor a blokk többi $j-1$ számú elemét $\binom{n}{j-1}$-féleképpen lehet megválasztani, és ha ez megtörtént, akkor a további $n+1-j$ számú elemet összesen $B(n+1-j)$-féleképpen lehet particionálni (ha itt $j=n+1$, akkor $n+1-j=0$, ide kell, hogy $B(0)=1$). Így

$$B(n+1) = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} B(n+1-j) = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{n-j+1} B(n+1-j) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k).$$

∎

A következő képletből az $\left\{ n \atop k \right\}$ másodfajú Stirling-számok közvetlenül is számíthatók.

I.8.1.5. Tétel. *Ha $1 \le k \le n$, akkor*

$$\boxed{\left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!} s_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n},$$

ahol $s_{n,k}$ az $f:\{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,k\}$ szürjektív függvények száma (lásd I.3.5, n és k felcserélve).

Bizonyítás. Ha az $f:\{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,k\}$ függvény szürjektív, akkor $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$, ..., $f^{-1}(k)$ az $\{1,2,...,n\}$ halmaz egy olyan partícióját adják, amely k blokkot tartalmaz. Figyeljük meg, hogy a különböző szürjektív f függvények minden k blokkot tartalmazó partíciót $k!$-szor adnak meg, mert az $f^{-1}(i)$ halmazokat permutálva a partíció nem változik, de f megváltozik. Következik, hogy a tekintett szürjektív függvények száma $s_{n,k} = k! \left\{ n \atop k \right\}$, és lásd az I.3.5 Feladat megoldásában adott képletet. ∎

I.8.1.6. Feladat. *Ha $n \ge 1$, akkor*

$$\boxed{x^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ n \atop k \right\} [x]_k},$$

ahol $[x]_k = x(x-1)\cdots(x-k+1)$.

Megoldás. 1. mód. Ellenőrzés: $n=1$-re $x = \left\{ 1 \atop 1 \right\} [x]_1 \Leftrightarrow x = x$ igaz, $n=2$-re $x^2 = \left\{ 2 \atop 1 \right\} [x]_1 + \left\{ 2 \atop 2 \right\} [x]_2 \Leftrightarrow x^2 = x + x(x-1)$ igaz, $n=3$-ra $x^3 = \left\{ 3 \atop 1 \right\} [x]_1 + \left\{ 3 \atop 2 \right\} [x]_2 + \left\{ 3 \atop 3 \right\} [x]_3 \Leftrightarrow x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2)$ igaz.

Az I.8.1.2 Tételbeli rekurzió alapján n szerinti indukcióval. Tegyük fel, hogy a képlet igaz $n-1$-re és igazoljuk n-re, ahol $n \ge 2$.

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ n \atop k \right\} [x]_k = \left\{ n \atop n \right\} [x]_n + \sum_{k=1}^{n-1} k \left\{ n-1 \atop k \right\} [x]_k + \sum_{k=2}^{n-1} \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} [x]_k,$$

ahol használva, hogy $[x]_k = [x]_{k-1}(x-k+1)$, a $j = k-1$ index-cserével kapjuk, hogy

$$\left\{ n \atop n \right\} [x]_n + \sum_{k=2}^{n-1} \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} [x]_k = \left\{ n-1 \atop n-1 \right\} [x]_n + \sum_{k=2}^{n-1} \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} [x]_{k-1}(x-k+1) = \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ n-1 \atop j \right\} [x]_j (x-j) =$$

$$= x \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ n-1 \atop j \right\} [x]_j - \sum_{j=1}^{n-1} j \left\{ n-1 \atop j \right\} [x]_j = x \cdot x^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k \left\{ n-1 \atop k \right\} [x]_k,$$

az indukciós feltétel szerint és visszahelyettesítve kész.

2. mód. A képlet két n-edfokú polinom egyenlősége. Ezt elegendő minden $x \in \mathbb{N}^*$ esetén igazolni, mert ha a két polinom minden $x \in \mathbb{N}^*$-ra egyenlő, akkor minden $x \in \mathbb{R}$-re is egyenlő. Legyen tehát $x \in \mathbb{N}^*$. Kombinatorikusan bizonyítunk: Legyen $A = \{1,2,...,n\}$, $B = \{1,2,...,x\}$. Akkor x^n az $f : A \to B$ függvények száma. Ezeket csoportosítsuk $f(A)$ számossága szerint: ha $|f(A)| = k$, akkor az $f : A \to f(A)$ szürjektív függvények száma $s_{n,k} = k! \left\{ n \atop k \right\}$, lásd I.8.1.5 Tétel, és az $f(A)$-ban levő k elem megválasztására $\binom{x}{k}$ lehetőség van. Tehát $|f(A)| = k$ esetén a függvények száma $k! \left\{ n \atop k \right\} \binom{x}{k} = \left\{ n \atop k \right\} [x]_k$, ahol $1 \le k \le n$, kész.

I.8.2. Elsőfajú Stirling-számok

Térjünk át az ún. elsőfajú Stirling-számok vizsgálatára. Ezek n elem k ciklusba való rendezhetőségeinek számát adják meg (a másodfajú Stirling-számok n elem k nemüres részhalmazba való elrendezéseinek számát jelentik).

Tekintsük pl. a

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 6 & 9 & 4 & 1 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

9-edfokú permutációt (lásd I.1.1.8). Itt 1-nek megfelel 3, azaz $\sigma(1)=3$, hasonlóan $\sigma(3)=6$, $\sigma(6)=1$, visszakapjuk az 1-et. Nem szerepelt a 2, amelyre $\sigma(2)=2$, tovább, $\sigma(4)=9$, $\sigma(9)=5$, $\sigma(5)=4$, visszaadja a 4-et. Nem volt még a 7: $\sigma(7)=8$, $\sigma(8)=7$. Tehát: $1\mapsto 3\mapsto 6\mapsto 1$, $2\mapsto 2$, $4\mapsto 9\mapsto 5\mapsto 4$, $7\mapsto 8\mapsto 7$.

Így a következő ún. ciklusokat kapjuk: $(1\,3\,6)$, (2), $(4\,9\,5)$, $(7\,8)$. A ciklusokban minden elemnek a rákövetkező felel meg, az utolsónak pedig az első. Egy ciklust bármelyik elemével lehet kezdeni, pl. $(4\,9\,5)=(9\,5\,4)=(5\,4\,9)$. A σ permutációt így adjuk meg:

$$\sigma = (1\,3\,6)(2)(4\,9\,5)(7\,8).$$

A ciklusok sorrendje megváltoztatható, σ írható pl. így is: $\sigma=(7\,8)(1\,3\,6)(4\,9\,5)$, vagy $\sigma = (4\,9\,5)(7\,8)(1\,3\,6)$, stb.

Hasonlóképpen, minden n-edfokú permutáció felbontható ciklusokra és a felbontás egyértelmű, eltekintve a ciklusok sorrendjétől és a ciklusok kezdőelemétől.

Valójában a σ permutáció felbontható ezeknek a diszjunkt ciklusoknak a szorzatára, ahol a ciklusokat is permutációknak tekintjük és a szorzás a permutációknak, mint függvényeknek a kompozícióját (összetételét) jelenti, de ezekre az algebrai fogalmakra és tulajdonságokra itt nincs szükségünk.

Azt mondjuk, hogy a σ n-edfokú **permutáció típusa** $(k_1,k_2,...,k_n)$, ha σ felbontható k_1 számú 1 hosszúságú, k_2 számú 2 hosszúságú, ..., k_n számú n hosszúságú diszjunkt ciklusra, akol $k_1+2k_2+...+nk_n=n$. Itt tehát k_i az i hosszúságú ciklusok száma.

A fenti példában adott σ 9-edfokú permutáció típusa (1,1,2,0,0,0,0,0,0), ahol $n=9$, $k_1=k_2=1$, $k_3=2$, $k_4=...=k_9=0$ és $1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 2=9$.

A $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 6-odfokú permutációra $1\mapsto 5\mapsto 4\mapsto 3\mapsto 2\mapsto 6\mapsto 1$, ezért egy ciklus van, $\tau=(1\,5\,4\,3\,2\;6)$. Azt mondjuk, hogy ez egy ciklikus permutáció, és ennek típusa (0,0,0,0,0,1).

Az $e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 6-odfokú identikus permutációra $e=(1)(2)(3)(4)(5)(6)$, ennek típusa (6,0,0,0,0,0).

I.8.2.1. Tétel. *(Cauchy) A $(k_1,k_2,...,k_n)$ típusú n-edfokú permutációk száma*

$$\boxed{T(k_1,k_2,...,k_n) = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_n!\,1^{k_1}2^{k_2}\cdots n^{k_n}}}\,.$$

Bizonyítás. Egy $(k_1,k_2,...,k_n)$ típusú σ permutációt írjunk a ciklusok hosszainak növekvő sorrendjében:

$$\sigma = \underbrace{(*)...(*)}_{k_1}\underbrace{(**)...(**)}_{k_2}\;...\;\underbrace{(\overbrace{**...*}^{n})...(\overbrace{**...*}^{n})}_{k_n}\,,$$

ahol a csillagok az $1,2,...,n$ számokat jelölik. Ezt úgy kapjuk, hogy az $1,2,...,n$ számok közül kiválasztunk k_1-et, amelyek a k_1 számú 1-hosszúságú ciklust alkotják, kiválasztunk $2k_2$ számot, amelyek a k_2 számú 2-hosszúságú ciklust alkotják, stb. Ez összesen $P_n = n!$ lehetőség (ha a zárójeleket töröljük, akkor az $1,2,...,n$ elemek permutációit kapjuk). De a k_i számú i-hosszúságú ciklus egymás között felcserélhető, ezért osztani kell $k_i!$-sal minden i-re. Továbbá, mind a k_i számú i-hosszúságú ciklust i-féleképpen írhatjuk, hiszen bármelyik elemmel kezdhetjük, ezért osztani kell i^{k_i}-nel minden i-re. ■

I.8.2.2. Definíció. *Legyen $1 \le k \le n$. Azoknak az n-edfokú permutációknak a számát, amelyek k ciklust tartalmaznak* **elsőfajú Stirling-szám***nak nevezzük, jelölés $\left[{n \atop k}\right]$ vagy $s(n,k)$.*

A definíció szerint azonnali, hogy $\left[{n \atop n}\right] = 1$ (az e identikus permutáció, amelyben minden elem a helyén marad). Továbbá $\left[{n \atop 1}\right] = (n-1)!$, mert ha egy ciklus van, azaz ciklikus permutációról van szó, akkor a típus $(0,0,...,0,1)$ és a Cauchy-tétel szerint $T(0,0,...,0,1) = \frac{n!}{n} = (n-1)!$. Ugyanakkor $\left[{n \atop n-1}\right] = \binom{n}{2}$, mert ha $n-1$ ciklus van, akkor a típus $(n-2,1,0...,0)$ és a Cauchy-tétel szerint $T(n-$ $-2,1,0,...,0) = \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2^1} = \frac{n(n-1)}{2}$. Megállapodás szerint (*) $\left[{n \atop 0}\right] = 0$ minden $n \ge 1$-re és (**) $\left[{0 \atop 0}\right] = 1$.

A definíció alapján azonnali, hogy $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[{n \atop k}\right] = n!$ $(n \ge 1)$.

I.8.2.3. Tétel. *Ha $1 \le k \le n$, akkor*

$$\boxed{\left[{n \atop k}\right] = (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] + \left[{n-1 \atop k-1}\right]}\,.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $2 \le k \le n$. Tekintsük a k ciklust tartalmazó n-edfokú permutációkat. Számoljuk meg ezeket aszerint, hogy n fixpont-e, azaz (n) ciklus-e vagy sem.

Ha (n) ciklus, akkor marad $n-1$ elem, amely $k-1$ ciklust alkot. Az ilyen permutációk száma $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$.

Ha (n) nem ciklus, akkor n tagja egy legalább 2 hosszúságú ciklusnak. Legyen σ egy k ciklusú $(n-1)$-edfokú permutáció. Az n-et beírhatjuk bármely a szám után a σ ciklusokra való felbontásában, és így egy n-edfokú permutációt kapunk, amelyben n nem fixpont. Itt $\left[{n-1 \atop k}\right]$ lehetőség van σ megválasztására és $(n-1)$ lehetőség van az a szám megválasztására. Az ilyen permutációk száma tehát $(n-1)\left[{n-1 \atop k}\right]$.

A k ciklust tartalmazó n-edfokú permutációkat száma tehát $\left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right]$.

Ha most $k=1$, akkor $\left[{n \atop 1}\right] = (n-1)\left[{n-1 \atop 1}\right] + \left[{n-1 \atop 0}\right]$. Innen $n \ge 2$-re a fenti (*) megállapodás szerint $1 = 1+0$, ami igaz, $n = 1$-re pedig (**) szerint $1 = 0+1$, igaz (ezért célszerűek a (*) és (**) konvenciók). ■

Az I.8.2 táblázat az elsőfajú Stirling-számokat tartalmazza. A rekurzív képlet szerint itt minden $\left[{n \atop k}\right]$ belső szám egyenlő a felette álló szám $(n-1)$-szeresének és az attól egy hellyel balra álló szám összegével.

I.8.2.4. Feladat. *Adjuk meg a 6. Táblázat következő három sorát.*

I.8.2.5. 16.11. Feladat. *i) Adjuk meg azokat a harmadfokú permutációkat, amelyek $k=1$, illetve $k=2$ ciklust tartalmaznak.*

ii) Adjuk meg azokat a negyedfokú permutációkat, amelyek k=2, illetve k=3 ciklust tartalmaznak.

Megoldás. i) Ezek száma $\left[{3 \atop 1}\right] = 2$, ill. $\left[{3 \atop 2}\right] = 3$. A permutációk pedig $(1\,2\,3)$, $(1\,3\,2)$, ill. $(1)(2\,3)$, $(2)(1\,3)$, $(3)(1\,2)$.

ii) Ezek száma $\left[{4 \atop 2}\right]$=11, ill. $\left[{4 \atop 3}\right]$=6. A permutációk pedig $(1\,2)(3\,4)$, $(1\,3)(2\,4)$, $(1\,4)(2\,3)$, $(1)(2\,3\,4)$, $(1)(2\,4\,3)$, $(2)(1\,3\,4)$, $(2)(1\,4\,3)$, $(3)(1\,2\,4)$, $(3)(1\,4\,2)$, $(4)(1\,2\,3)$, $(4)(1\,3\,2)$, ill. $(1)(2)(3\,4)$, $(1)(3)(2\,4)$, $(1)(4)(2\,3)$, $(2)(3)(1\,4)$, $(2)(4)(1\,3)$, $(3)(4)(1\,2)$.

n	$\left[{n \atop 1}\right]$	$\left[{n \atop 2}\right]$	$\left[{n \atop 3}\right]$	$\left[{n \atop 4}\right]$	$\left[{n \atop 5}\right]$	$\left[{n \atop 6}\right]$
1	1					
2	1	1				
3	2	3	1			
4	6	11	6	1		
5	24	50	35	10	1	
6	120	274	225	85	15	1

I.8.2. táblázat. Elsőfajú Stirling-számok

Az $[x]_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$ polinom együtthatói az elsőfajú Stirling-számok segítségével adhatók meg a következőképpen:

I.8.2.6. Tétel. *Ha $n \geq 1$, akkor*

$$\boxed{[x]_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k}\right] x^k} \,.$$

Bizonyítás. Ellenőrzés: $n=1$-re $x = \left[{1 \atop 1}\right] x \Leftrightarrow x = x$ igaz, $n=2$-re $[x]_2 = -\left[{2 \atop 1}\right] x + \left[{2 \atop 2}\right] x^2 \Leftrightarrow x(x-1) = -x + x^2$ igaz, $n=3$-ra $[x]_3 = \left[{3 \atop 1}\right] x - \left[{3 \atop 2}\right] x^2 + \left[{3 \atop 3}\right] x^3 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2) = 2x - 3x^2 + x^3$ igaz.

Az I.8.2.3 Tételbeli rekurzió alapján n szerinti indukcióval. Tegyük fel, hogy a képlet igaz $n-1$-re és igazoljuk n-re, ahol $n \geq 2$.

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k}\right] x^k = \left[{n \atop n}\right] x^n + (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} \left[{n-1 \atop k}\right] x^k + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{n-k} \left[{n-1 \atop k-1}\right] x^k,$$

ahol $\left[{n \atop n}\right] = \left[{n-1 \atop n-1}\right] = 1$, így

$$\left[{n \atop n}\right] x^n + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{n-k} \left[{n-1 \atop k-1}\right] x^k = \sum_{k=2}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n-1 \atop k-1}\right] x^k = x \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-1-j} \left[{n-1 \atop j}\right] x^j.$$

Következik, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k}\right] x^k = (x-n+1) \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-1-j} \left[{n-1 \atop j}\right] x^j = (x-n+1)[x]_{n-1} = [x]_n,$$

az indukciós feltétel szerint. ∎

Az itt fellépő $(-1)^{n-k} \left[{n \atop k}\right]$ számokat szokás **elsőfajú algebrai Stirling-számok**nak nevezni, a $\left[{n \atop k}\right]$ számokat pedig **elsőfajú abszolút Stirling-számok**nak. Más szerzők az előbbieket nevezik elsőfajú Stirling-számoknak.

I.8.2.7. Feladat. *Ha $n \geq 1$, akkor*

$$\boxed{[x]^n = \sum_{k=1}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k} \,,$$

ahol $[x]^n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$.

Megoldás. Azonnal következik x helyett $(-x)$-et írva az I.8.2.6 Tételbeli képletbe.

I.8.2.8. Feladat. *Jelölje* $H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ *az ún.* **harmonikus számok***at, ahol* $n \geq 1$. *Igazoljuk, hogy minden* $n \geq 1$*-re* $\boxed{H_n = \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} /n!}$.

Megoldás. Ellenőrzés: $n=1$-re $H_1 = 1 = \left[{2 \atop 2}\right]$ igaz, $n=2$-re $H_2 = 3/2 = \left[{3 \atop 2}\right]/2$ igaz, $n=3$-ra $H_3 = 11/6 = \left[{4 \atop 2}\right]/6$ igaz. Tegyük fel, hogy a képlet igaz $n-1$-re és igazoljuk n-re, ahol $n \geq 2$. Írható, hogy

$$H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n} = \frac{\left[{n \atop 2}\right]}{(n-1)!} + \frac{1}{n} = \frac{n\left[{n \atop 2}\right] + (n-1)!}{n!} = \frac{n\left[{n \atop 2}\right] + \left[{n \atop 1}\right]}{n!} = \frac{\left[{n+1 \atop 2}\right]}{n!},$$

használva az elsőfajú Stirling-számokra vonatkozó rekurziót.

Megjegyzés. Igazolható, hogy ha $n \geq 2$, akkor H_n nem egész szám, és $\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = \gamma$, ahol $\gamma \approx 0{,}5772$ az ún. Euler-állandó.

I.9. fejezet

Gráfelméleti fogalmak

I.9.1. A gráfok szemléletes bevezetése

Tekintsük a következő feladatokat:

I.9.1.1. Feladat. *Egy* 21 *tagú társaság bizonyos tagjai kézfogással üdvözölték egymást. Igazoljuk, hogy biztosan van olyan személy, aki páros számú emberrel fogott kezet.*

I.9.1.2. Feladat. *Igazoljuk, hogy ebben a* 21 *tagú társaságban van legalább két ember, akik ugyanannyiszor fogtak kezet.*

I.9.1.3. Feladat. *Mutassuk meg, hogy egy* 6 *fős társaságnak mindig van* 3 *olyan tagja, akik ismerik egymást, vagy* 3 *olyan tagja, akik nem ismerik egymást (az ismerettségek kölcsönösek.)*

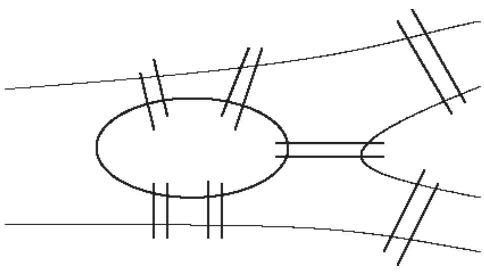
I.9.1.4. Feladat. *Königsberg városában (mai nevén Kalinyingrád) a Pregel folyón* 7 *híd vezetett keresztül az I.9.1 ábra szerint. Végig lehetett-e sétálni minden hídon pontosan egyszer úgy, hogy a séta végére visszaérkezzünk a kiindulópontba?*

Ezek a feladatok, és ezeken kívül sok más, látszólag teljesen különböző jellegű probléma ugyanazzal a fontos kombinatorikai struktúrával írható le és vizsgálható. Ennek a neve: *gráfstruktúra* vagy *gráf.*

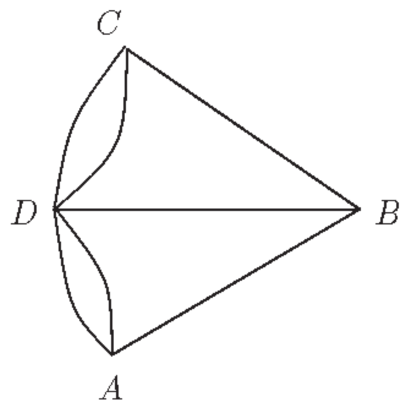
Ebben a szakaszban és a későbbiekben visszatérünk ezekre a feladatokra és bemutatjuk a megoldásukat.

Az I.9.1 ábrán jelölje A, B és C a partokat, D a szigetet, a hidakat pedig jelöljük a pontokat összekötő vonalakkal. Így a következő sematikus ábrát kapjuk (I.9.2 ábra).

Az ilyen és ehhez hasonló alakzatokat **gráfok**nak nevezzük, itt A, B, C, D az adott **gráf csúcsai** (vagy pontjai, csúcspontjai, csomópontjai, szögpontjai), a csúcsokat összekötő vonalak a



I.9.1. ábra. Königsbergi hidak



I.9.2. ábra. A königsbergi hidak gráfja

gráf élei. Megtörténhet, hogy a síkbeli ábrán az élek olyan pontban is metszik egymást, amely nem csúcsa a gráfnak.

A gráf csúcsait vastagított pontokkal jelezzük. Két csúcs között több él is lehet, ezeket **többszörös élek**nek nevezzük. Egy csúcs önmagával is össze lehet kötve, az ilyen él neve **hurokél**.

Az I.9.1.4 Feladatban megfogalmazott kérdést Königsberg lakói tették fel Eulernek, a kor híres matematikusának. A fenti kérdés így is megfogalmazható: le tudjuk-e rajzolni ezt a gráfot egy vonallal úgy, hogy közben a ceruzát nem emeljük fel és minden vonalat csak egyszer rajzolunk le?

Euler válaszként igazolta (általánosan vizsgálva a kérdést), hogy nem lehet végigmenni a hidakon, azaz nem tudjuk lerajzolni a gráfot a feltétel szerint. Ugyanis bármely pontból is indulunk ki, ha egy másik pontba beérkezünk, onnan ki is kell menni. Lehet, hogy utunk során újra érintjük ezt a pontot, de akkor is két él bejárásával. Ezért szükséges, hogy minden pontból páros sok él induljon ki. Ez nem teljesül a fenti gráfra, mert minden ponthoz páratlan sok él tartozik.

Euler azt is megmutatta, hogy ez a feltétel (minden pontból páros sok él indul ki) nemcsak szükséges, hanem elégséges is a gráf ilyen bejárásához.

A gráfelmélet kialakulását 1736-tól számítjuk, attól a dolgozattól, amelyben Euler a königsbergi hidak problémáját megoldotta.

Egy gráf valamely pontjának **fokszám**a vagy foka az adott pontból kiinduló élek száma. Jelölés: $d(A)$ a A pont fokszáma. A I.9.2 ábrán pl. $d(A) = d(B) = D(C) = 3$, $d(D) = 5$. Egy gráf **izolált pont**ja egy olyan pont, amelyből nem indul ki egyetlen egy él sem. Az izolált pontok tehát a 0 fokszámú pontok, az I.9.2 ábrán nincsenek ilyenek. Az I.9.3 ábrán látható gráfon d izolált pont, az a és f pontokban egy-egy hurokél van.

Jelölje $|E|$ egy adott gráf éleinek a számát.

I.9.1.5. Tétel. *Tekintsünk egy tetszőleges n pontú gráfot, amelynek pontjai $P_1, P_2, ..., P_n$.*

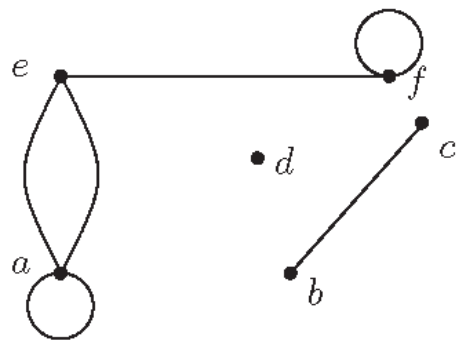
i) A pontok fokszámainak összege egyenlő az élek számának a kétszeresével: $d(P_1)+d(P_2)+...+$ $+d(P_n) = 2|E|$.

ii) A páratlan fokszámú pontok száma páros.

Bizonyítás. i) Vegyük sorra a pontokat és számoljuk össze a pontokhoz tartozó éleket. Ezek száma összesen a pontok fokszámainak összege, másrészt éppen az élek számának kétszerese.

ii) Azonnali i) alapján. ■

Vizsgáljuk az I.9.1.1 Feladatot. Tekintsük azt a gráfot, amelynek pontjait a társaság tagjai alkotják, az éleket pedig a kézfogások. Ez egy 21 pontú gráf. Alkalmazva az előző Tétel ii) pontját

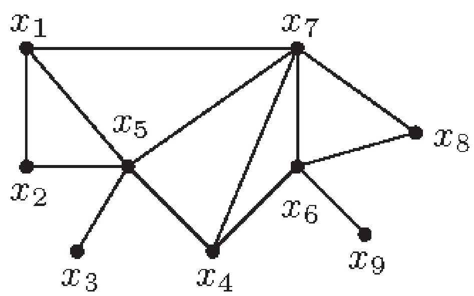


I.9.3. ábra. Példa gráfra

azt kapjuk, hogy páros azoknak a száma, akik páratlan sok emberrel fogtak kezet. De 21 páratlan szám, ezért biztosan van olyan személy, akire ez nem igaz, aki tehát páros sok emberrel fogott kezet.

Az I.9.1.1 Feladatban megfogalmazott állítás nemcsak egy 21 tagú társaságra, hanem egy n tagú társaságra is igaz, ahol $n > 1$ tetszőleges páratlan szám. Az is igaz, hogy ekkor páratlan azoknak a száma, akik páros számú emberrel fogtak kezet.

Egy olyan gráfot, amelyben nincsenek hurokélek és többszörös élek **egyszerű gráf**nak nevezünk, lásd pl. az I.9.4 ábrát.



I.9.4. ábra. Példa egyszerű gráfra

I.9.1.6. Tétel. *Egy n pontú egyszerű gráfban mindig van két azonos fokszámú pont.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Akkor a pontok fokszámai mind különbözők. Egy pont legfeljebb $n-1$ másik ponttal lehet összekötve, ezért a pontok fokszámai $0,1,2,\dots,n-1$. De így van olyan pont, amely foka 0 (izolált pont) és van olyan pont is, amely foka $(n-1)$, azaz olyan, amely minden más ponttal össze van kötve. Ez ellentmondás. ■

Térjünk rá az I.9.1.2 Feladat megoldására. A megfelelő gráf egyszerű gráfnak tekinthető (feltéve, hogy két ember legfeljebb egyszer fog kezet és senki sem fog kezet saját magával) és alkalmazzuk az I.9.1.5 Tételt. Az állítás egy n tagú társaságra is igaz, ahol $n \geq 2$ tetszőleges szám. Ha $n = 21$, akkor az I.9.1.2 Feladatot kapjuk.

Sok más olyan probléma is van, amelyek gráfokkal modellezhetők, pl. úthálózatok, telefonhálózatok, elektromos áramkörök. Bizonyos problémákra iranyított gráfokkal történik a modellezés, azaz olyan gráfokkal, amelyeknek élei irányítottak. Sok esetben a gráfelméleti módszerek és eredmények alkalmasak a felmerülő problémák megválaszolására.

Irányított gráfnak tekinthető a világháló is, a World Wide Web, amelynek pontjai a weblapok, az élei pedig a weblapok közötti hiperlinkek. A Google és a hasonló keresők bonyolult gráfelméleti ötleteket és módszereket használnak, hogy ennek a gráfnak a pontjaira egy sorrendet állítsanak fel figyelembe véve a gráf globális jellemzőit.

I.9.2. Egyszerű gráfok

A továbbiakban egyszerű gráfokkal foglalkozunk, ezek matematikai definíciója a következő:

I.9.2.1. Definíció. *Legyen V egy nemüres halmaz és legyen $V^{(2)} = \{\{x,y\} : x,y \in V, x \neq y\}$ a V kételemű részhalmazainak halmaza. A $G = (V,E)$ rendszert, ahol $E \subseteq V^{(2)}$* **egyszerű gráf***nak, a továbbiakban röviden* **gráf***nak nevezzük. Itt V elemei a* **gráf pontjai** *(vagy csúcsai, csúcspontjai), E elemei a* **gráf élei***.*

A G gráfra vonatkozóan jelölés: $V=V_G$, $E=E_G$, tehát $G=(V_G,E_G)$. További jelölés: $\{x,y\}=xy$, ahol $xy = yx$, és $x \in V_G$ helyett néha ezt írjuk: $x \in G$.

Ha $e = xy \in E_G$ a gráf egy éle, akkor azt mondjuk, hogy x és y az él **végpontjai**. Az u és v pontok **szomszédos pontok**, ha létezik egy $uv \in E_G$ él. Az $e_1, e_2 \in E_G$ **szomszédos élek**, ha van közös végpontjuk, azaz $e_1 = xy$, $e_2 = xz$ valamely $x,y,z \in V$-re.

Megjegyzés: Angolul a gráf pontjai = [vertex, vertices], élek = [edge, edges], innen a V és E jelölések.

Itt és a továbbiakban egy A véges halmaz számosságát (elemeinek számát) így jelöljük: $|A|$ vagy $\#A$.

Ha V véges halmaz, akkor $|V_G|$, $|E_G|$ végesek és **véges gráf**ról beszélünk, a továbbiakban ilyenekről lesz szó. A V_G halmaz $|V_G|$ számosságát, tehát a gráf pontjainak számát a gráf rendjének is nevezzük. Ha $|V_G| = n$, akkor azt mondjuk, hogy G egy n pontú gráf. Ha V végtelen halmaz, akkor G egy **végtelen gráf**.

A gráfok ábrázolhatók a síkban. Pl. az I.9.4 ábra annak a G gráfnak a képe, amelyre $V_G = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$,

$E_G = \{x_1x_2, x_1x_5, x_1x_7, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5, x_4x_6, x_4x_7, x_5x_7, x_6x_7, x_6x_8, x_6x_9, x_7x_8\}$,

ez egy 9 pontú gráf, az élek száma 13.

Egy x pont **foka** (vagy fokszáma) az x-szel szomszédos pontok száma, jelölés: $d_G(x) = d(x)$, azaz $d_G(x) = \#\{y \in G : xy \in E_G\}$. Az x **izolált pont**, ha $d(x) = 0$.

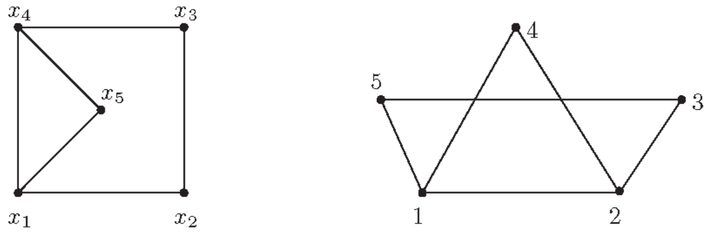
A fokszámokra vonatkozó I.9.1.5 és I.9.1.6 Tételek igazak egyszerű gráfokra, az előző szakaszban adott bizonyítások megfelelnek az I.9.2.1 Definíciónak.

I.9.2.2. Definíció. *Legyen G és H két gráf. Azt mondjuk, hogy ezek* **izomorf gráfok***, jelölés $G \simeq H$, ha létezik egy olyan $\phi : G \to H$ bijektív függvény, amelyre $xy \in E_G \Leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in E_H$ (minden $x,y \in E_G$-re), azaz xy akkor és csak akkor éle G-nek, ha $\phi(x)\phi(y)$ éle H-nak.*

Például az I.9.5 ábrán levő gráfok izomorfak, itt egy izomorfizmus a következő: $x_1 \mapsto 2$, $x_2 \mapsto 3$, $x_3 \mapsto 5$, $x_4 \mapsto 1$, $x_5 \mapsto 4$.

I.9.2.3. Feladat. *Mennyi az n pontú gráfok száma?*

Megoldás. Annyi n pontú gráf van, ahányféleképpen az élek megválaszthatók. Az élek maximális száma $|V^{(2)}| = \binom{n}{2}$. Következik, hogy az n pontú gráfok száma a $V^{(2)}$ halmaz részhalmazainak a száma, azaz $2^{\binom{n}{2}} = 2^{n(n-1)/2}$ $(n \geq 1)$.



I.9.5. ábra. Példa izomorf gráfokra

I.9.2.4. Feladat. *Rajzoljuk le az n pontú gráfokat, ahol n=1,2,3. Azonosítsuk az izomorf gráfokat.*

Az I.9.1 táblázat azt mutatja, hogy adott n-re az n pontú nemizomorf gráfok száma jóval kisebb az összes gráf számánál.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
gráfok száma	1	2	8	64	1 024	32 768	2 097 152	268 435 456
nemizomorf gráfok száma	1	2	4	11	34	156	1044	12 346

I.9.1. táblázat. Az n pontú gráfok száma

I.9.2.5. Feladat. *Rajzoljuk le az $n = 4$ pontú nemizomorf gráfokat (ezek száma 11).*

A pontok fokszámai nem határozzák meg a gráfot. Megtörténhet, hogy a $G = (V, E_G)$ és $H = (V, E_H)$ gráfokra $d_G(x) = d_H(x)$ minden $x \in V$-re, de G és H nem izomorf gráfok.

I.9.2.6. Feladat. *Adjunk példát ilyen G és H gráfokra.*

További definíciók és jelölések:

I.9.2.7. Definíció. *Legyen G egy gráf. Azt mondjuk, hogy*

G **él nélküli gráf**, *ha nincs egy éle sem,*

G **teljes gráf**, *ha $E_G = \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$, azaz ha bármely két pont szomszédos (össze van kötve éllel). Az n pontú teljes gráf jelölése: K_n („komplett” gráf),*

G **csillag**, *ha úgy kapjuk, hogy egy pontját összekötjük az összes többivel,*

G **út**, *ha úgy kapjuk, hogy megállapítva a pontok egy sorrendjét az első pontot összekötjük a másodikkal, a másodikat a harmadikkal,..., az utolsó előttit az utolsóval,*

G **kör**, *ha egy útnak az első és utolsó pontját is összekötjük,*

G **reguláris gráf**, *ha minden pontja egyenlő fokszámú, ha ez a fokszám r, akkor G egy r-reguláris gráf.*

A K_n teljes gráf egy $(n-1)$-reguláris gráf. Az I.9.6 ábrán a K_8 teljes gráf látható. A 3 pontú teljes gráfot **háromszög**nek is nevezzük.

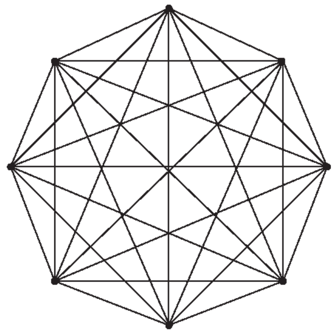
Az I.9.7 ábrán a 10-edredű 3-reguláris gráf, az ún. Petersen-gráf szerepel.

I.9.2.8. Feladat. *i) Hány éle van az n pontú csillagnak, útnak, körnek, illetve a K_n teljes gráfnak?*

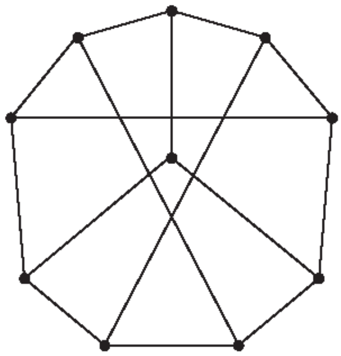
ii) Rajzoljuk meg a K_n teljes gráfokat, ahol $1 \leq n \leq 7$.

iii) Adjunk meg egy 2-reguláris gráfot és egy 4-reguláris gráfot.

iv) Létezik-e 3-reguláris 5 pontú gráf? És 7 pontú?



I.9.6. ábra. K_8 gráf



I.9.7. ábra. Petersen-gráf

I.9.2.9. Tétel. *Ha $n \geq 4$ páros szám, akkor létezik n pontú 3-reguláris gráf.*

Bizonyítás. $n=4$-re a K_4 teljes gráf 3-reguláris. Legyen $n=2k$. k-szerinti indukcióval tegyük fel, hogy G egy $2k-2$ pontú 3-reguláris gráf. Legyen $xy, xz \in E_G$ a G két egy pontból kiinduló két éle. Vegyünk két újabb pontot, jelölje ezeket u, v és képezzük a H gráfot, amelyre $V_H = V_G \cup \{u, v\}$ és $E_H = (E_G \setminus \{xy, xz\}) \cup \{xu, xv, yu, zv, uv\}$. Következik, hogy H egy $2k$ pontú 3-reguláris gráf (lásd I.9.8 ábra). ■

I.9.2.10. Definíció. *Legyen $G=(V_G, E_G)$ egy gráf. Azt mondjuk, hogy a G gráfnak H* **részgráf***ja, ha $V_H \subseteq V_G$ és $E_H \subseteq E_G$. Jelölés: $H \subseteq G$.*

A H részgráf **kifeszíti** *a G gráfot, ha G minden pontja H-ban van, azaz $V_H = V_G$. Ekkor a G gráfnak H egy* **feszítő részgráf***ja.*

G **kiegészítő gráf***ja (komplementer gráfja) a $\overline{G} = (V_G, V^{(2)} \setminus E_G)$ gráf.*

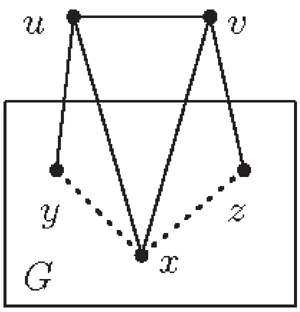
Egy adott gráfból részgráfot tehát úgy kapunk, hogy bizonyos pontokat és az ezekhez tartozó összes élt töröljük. A kiegészítő gráfot úgy kapjuk, hogy töröljük G meglévő éleit és megrajzoljuk az összes többi lehetséges élet (a pontokat nem változtatjuk).

I.9.2.11. Feladat. *Adjuk meg a 10. és 13. ábrán levő gráfok egy-egy részgráfját és kiegészítő gráfjait.*

I.9.2.12. Feladat. *i) Igazoljuk, hogy ha G egy n pontú gráf, ahol $n \geq 6$, akkor létezik G-ben vagy $\overline{G}$-ben háromszög.*

ii) Igaz-e ez a tulajdonság az 5 pontú gráfokra?

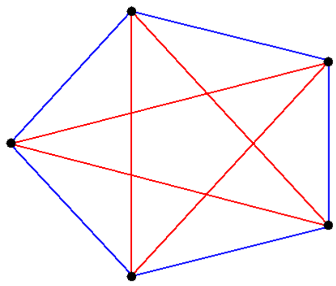
iii) Kapcsolat az I.9.1.3 Feladattal?



I.9.8. ábra. Az I.9.2.9 Tétel bizonyításához

Megoldás. i) A G gráf éleit szinezzük pirosra, a $\overline{G}$ komplementer gráf éleit pedig kékre. Legyen a egy tetszőleges pont, amelyből legalább 5 él húzható, mert $n \geq 6$. Következik, hogy ezek között biztosan van 3 azonos színű ab, ac, ad él, tehát vagy mind a három piros (G-beli élek) vagy mind a három kék ($\overline{G}$-beli élek). Legyenek pl. ab, ac, ad piros élek. Ha bc vagy bd vagy cd piros él, akkor van egy piros háromszög (ha pl. bd piros, akkor abd piros háromszög). Ellenkező esetben bcd kék háromszög.

ii) Az állítás 5 pont esetén nem igaz. Ehhez elegendő egyetlen ellenpéldát mutatnunk. Tekintsük azt az ötcsúcsú egyszerű gráfot, melyben minden csúcsból pontosan két él és két „nem-él" indul ki. (Az előző jelöléssel: Rajzoljunk olyan ötcsúcsú teljes gráfot, melyben minden csúcsból pontosan két piros és két kék él fut, lásd I.9.9 ábra.) Ez a gráf háromszögmentes (és izomorf a komplementerével).



I.9.9. ábra. Ellenpélda 5 pontú gráf esetén

iii) $n = 6$-ra éppen az I.9.1.3 Feladat állítását kapjuk!

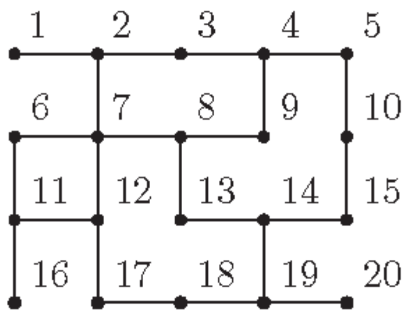
I.9.2.13. Definíció. *Legyenek $e_1{=}x_0x_1$, $e_2{=}x_1x_2, \ldots,$ $e_k{=}x_{k-1}x_k$ egy G gráf egymáshoz csatlakozó különböző élei. Azt mondjuk, hogy $W = e_1e_2...e_k$ egy k hosszúságú* **séta***, amelynek x_0 és x_k a végpontjai (angolul séta = walk).*

A W **zárt séta (körséta)***, ha $x_0 = x_k$, ellenkező esetben W* **nyitott séta***.*

A W séta **nyitott út***, ha az $x_0, x_1, \ldots, x_k$ pontok páronként különbözők.*

A W séta **zárt út (körút)** *vagy* **kör***, ha az $x_0, x_1, \ldots, x_k$ pontok páronként különbözők, kivéve $x_0 = x_k$ (ennek hossza $k \geq 3$).*

Egy sétát tehát úgy kapunk, hogy kiindulunk egy pontból egy él mentén, beérkezünk egy másik pontba, onnan tovább haladunk egy másik él mentén, és így tovább, míg eljutunk a séta másik



I.9.10. ábra. Példa gráfra

végpontjába. A bejárt élek nem ismétlődhetnek. Ha az érintett pontok sem ismétlődnek, kivéve esetleg a végpontokat, akkor útról beszélünk.

Például az I.9.10 ábrán levő 20 pontú gráfban $v_2 - v_7 - v_{12} - v_{11} - v_6 - v_7 - v_8$ egy nyitott séta. Pontosabban, megadva az éleket, $(v_2v_7)(v_7v_{12})(v_{12}v_{11})(v_{11}v_6)(v_6v_7)(v_7v_8)$ egy nyitott séta, amelynek hosszúsága 6, végpontjai v_2 és v_8. Ez nem út, mert a séta a v_7 pontot kétszer is érinti.

A v_2-ből induló és ide visszaérkező $v_2-v_7-v_{12}-v_{11}-v_6-v_7-v_8-v_9-v_4-v_3-v_2$, pontosabban $(v_2v_7)(v_7v_{12})(v_{12}v_{11})(v_{11}v_6)(v_6v_7)(v_7v_8)(v_8v_9)(v_9v_4)(v_4v_3)(v_3v_2)$ séta egy zárt séta, amelynek hosszúsága 10. Ez sem út.

A $v_1-v_2-v_3-v_4-v_5$ -nek megfelelő $(v_1v_2)(v_2v_3)(v_3v_4)(v_4v_5)$ séta egy 4 hosszúságú nyitott út.

A $v_2-v_3-v_4-v_9-v_8-v_7-v_2$ -nek megfelelő $(v_2v_3)(v_3v_4)(v_4v_9)(v_9v_8)(v_8v_7)(v_7v_2)$ egy 6 hosszúságú zárt út, azaz kör.

I.9.2.14. Feladat. *i) Igazoljuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább* 2*, akkor a gráfban van egy kör.*

ii) Mit lehet mondani a gráfról, ha minden pont foka 2*?*

Megoldás. i) Induljunk ki a gráf egy tetszőleges pontjából és haladjunk az éleken. Minden pont foka ≥ 2, ezért bármely új pontba jutva tovább mehetünk még be nem járt élen (így egy sétát kapunk). Csak akkor akadhatunk el, ha olyan pontba jutunk, amelyet korábban már érintettünk. De akkor bejártunk a gráfban egy kört.

I.9.2.15. Tétel. *Legyen G egy n pontú gráf. Ha G-nek van legalább n éle, akkor G-ben van kör.*

Bizonyítás. Ha $n=1$ vagy $n=2$, akkor a feltétel nem teljesülhet (egyszerű gráfról van szó). Ha $n=3$, akkor a gráfot 3 pont és 3 él alkotja, ez egy háromszög, és az állítás igaz. n-szerinti indukcióval tegyük fel, hogy a tulajdonság igaz minden $n-1$ pontú gráfra. Legyen G egy olyan n pontú gráf, amelynek van legalább n éle. Tekintsünk a G-beli utak közül egy leghosszabbat (biztosan van ilyen).

Ha ez egy zárt út, akkor egy kör, és készen vagyunk.

Ha ez nyitott út, akkor mindkét végpontja elsőfokú. Valóban, ha nem így lenne, akkor az egyik végponthoz újabb él csatlakoztatásával egy hosszabb utat kapnánk, ami ellentmond annak, hogy a választott út hossza maximális. Töröljük az egyik végpontot a hozzá tartozó éllel együtt. Kapunk egy olyan $n-1$ pontú gráfot, amelynek van legalább $n-1$ éle. Az indukciós feltétel szerint ebben van kör, és ez G-nek is része. ■

I.9.2.16. Definíció. *A G gráf* **összefüggő***, ha bármely két u, v pontjára létezik olyan út G-ben (az út G-nek részgráfja), amelynek végpontjai u és v. Az egy pontból álló gráfot is összefüggőnek tekintjük.*

A G maximális, összefüggő részgráfjait a G **összefüggő komponensei***nek nevezzük. Ugyanazon komponenshez tartoznak azok a pontok, amelyek között van G-beli út (amelyek élekkel összeköthetők).*

Megjegyzés. Az, hogy a gráf két u,v pontjára létezik olyan út G-ben, amelynek végpontjai u és v egy reláció a gráf pontjainak V_G halmazán. Ha megengedjük a 0 hosszúságú utakat is, akkor belátható, hogy ez egy ekvivalenciareláció a V_G halmazon. Az így meghatározott ekvivalenciaosztályok lesznek a G összefüggő komponensei.

I.9.2.17. Feladat. *Legyen G egy összefüggő gráf és ebben legyen C egy kör. Akkor a C kör bármely e élének törlésével kapott $G\setminus\{e\}$ gráf is összefüggő.*

Megoldás. Legyen u, v a gráf két tetszőleges pontja. Ha az ezeket összekötő útban szerepel a törölt él, akkor vehetjük helyette a C körnek a törölt él elhagyasával kapott részét.

I.9.2.18. Feladat. *Legyen G egy n pontú összefüggő gráf ($n \geq 2$). Igazoljuk, hogy ha az élek száma $< n$, akkor G-ben létezik legalább egy elsőfokú pont.*

Megoldás. Jelölje G pontjait $P_1, P_2, ..., P_n$. G összefüggő gráf, ezért nincs izolált pontja, azaz $d(P_i) \geq 1$ minden i-re. Ha nem lenne elsőfokú pont, akkor $d(P_i) \geq 2$ minden i-re, és így az I.9.1.5 Tétel szerint az élek száma $|E| = (d(P_1)+d(P_2)+...+d(P_n))/2 \geq (2n)/2 = n$ lenne, ami ellentmondás.

I.9.2.19. Tétel. *Bármely n pontú összefüggő gráfnak van legalább $n-1$ éle ($n \geq 1$).*

Megoldás. Ha $n = 1,2,3$, akkor ez igaz. n-szerinti indukcióval tegyük fel, hogy minden $n-1$ pontú összefüggő gráfnak van legalább $n-2$ éle. Legyen G egy n pontú összefüggő gráf. Azt kell belátnunk, hogy G-nek van legalább $n-1$ éle. Tegyük fel, hogy ez nem így van. Akkor G-nek kevesebb, mint $n-1$ éle van, és az I.9.2.18 Feladat szerint van egy P elsőfokú pont. A P pontot a hozzá tartozó éllel együtt törölve egy $n-1$ pontú összefüggő gráfot kapunk, amelynek az indukciós feltétel szerint van legalább $n-2$ éle. A törölt éllel együtt akkor G-nek van legalább $n-1$ éle, ami ellentmondás.

A gráfok reprezentálására készített ábrák tetszetősek, a feladatok megoldása során gyakran ilyen ábrákat vázolva gondolkodunk, de ezek programozási célokra nem használhatók.

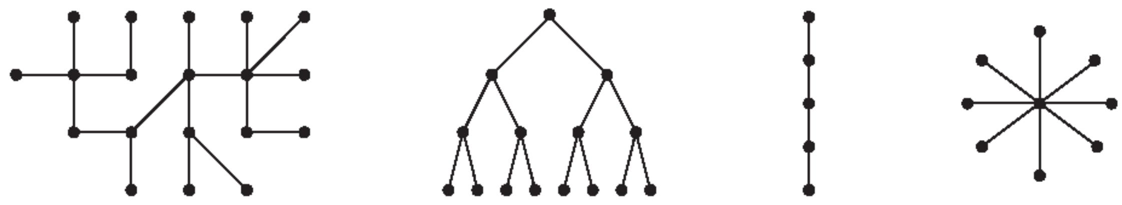
Egy lehetőség a gráfok számítógépes tárolására a következő. Ha $x_1, x_2 ..., x_n$ egy G gráf pontjai, legyen $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ az az $n \times n$-es mátrix, amelyre $a_{ij} = 1$, ha $x_i x_j \in E_G$ ($x_i x_j$ a gráf éle), és $a_{ij} = 0$ ellenkező esetben ($x_i x_j$ a gráfnak nem éle). Ezt a gráf **szomszédsági mátrix**ának nevezzük, amely szimmetrikus (a főátlóra nézve) és a főátlóban nullák vannak. Pl. az I.9.5 ábra első gráfjának szomszédsági mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I.9.3. Fagráfok

I.9.3.1. Definíció. *Azokat az (egyszerű) gráfokat, amelyek összefüggőek és nem tartalmaznak kört* **fagráfok***nak, röviden* **fák***nak nevezzük.*

I.9.3.2. Tétel. *Egy G gráf akkor és csak akkor fa, ha bármely két különböző pontja között pontosan egy út vezet.*



I.9.11. ábra. Fagráfok

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy G egy fa. Akkor G összefüggő (definíció), ezért bármely két különböző pontja között van út. Több út nem lehet, mert akkor G-ben lenne kör, ami ellentmondás.

Fordítva, tegyük fel, hogy G-ben bármely két különböző pont között pontosan egy út vezet. Akkor G összefüggő (mert van út) és körmentes (mert csak egy út van), tehát G fa. ■

Az I.9.11 ábrán néhány fagráf látható, az utolsó egy csillag(gráf), az előtte levő egy út(gráf).

A fákat definiáló két tulajdonság azt vonja maga után, hogy a fáknak nem lehet túl kevés élük, hiszen összefüggőek, de túl sok élük se lehet, mert körmentesek. Másképp: A fagráfok minimális összefüggő gráfok és maximális körmentes gráfok. Pontosabban:

I.9.3.3. Tétel. *Legyen G egy egyszerű gráf. Akkor egyenértékűek a következő feltételek:*
1) G fa(gráf),
2) G összefüggő, de ha bármely élét töröljük, akkor nem marad összefüggő,
3) G körmentes, de bármely új él hozzávétele esetén a keletkező gráf tartalmaz kört.

Bizonyítás. 1) $\Rightarrow$ 2) Tegyük fel, hogy G egy fa. Akkor G összefüggő (definíció). Tegyük fel, hogy egy xy élt törölve a kapott G' gráf összefüggő marad. Eszerint a G' gráfban van x-et és y-t összekötő P út. De akkor az xy élt visszatéve a P út és az xy él egy kört alkot, ami ellentmond a fa definíciójának.

2) $\Rightarrow$ 1) Tegyük fel, hogy teljesül a 2)-beli tulajdonság. Akkor G összefüggő és azt kell megmutatnunk, hogy G-ben nincs kör. Indirekt módon, tegyük fel, hogy G-ben van egy C kör. Akkor C-nek egy élét elhagyva a gráf összefüggő marad, lásd I.9.2.17 Feladat, ami ellentmondás. ■

I.9.3.4. Feladat. *Igazoljuk az I.9.3.3 Tételben az 1) $\Rightarrow$ 3) és 3) $\Rightarrow$ 1) implikációkat.*

I.9.3.5. Tétel. *Ha G egy n pontú fa, akkor G-nek $(n-1)$ éle van.*

Bizonyítás. Ha G egy n pontú fa, akkor G összefüggő, ezért G-nek van legalább $(n-1)$ éle, lásd I.9.2.19 Tétel. Ugyanakkor G körmentes, ezért G-nek legfeljebb $(n-1)$ éle van, lásd 10.2.15. Tétel. Következik, hogy G-nek pontosan $(n-1)$ éle van. ■

I.9.3.6. Tétel. *Bármely $n \geq 2$ pontú fának van legalább két elsőfokú pontja.*

Bizonyítás. Induljunk ki a gráf egy tetszőleges pontjából és haladjunk az éleken úgy, hogy egy új pontba érkezve mindig még be nem járt élen megyünk tovább. Nem történhet meg, hogy olyan pontba érjünk, amelyet korábban már érintettünk, mert akkor bejártunk volna egy kört, ami lehetetlen. Csak akkor akadhatunk el, ha egy elsőfokú pontba jutunk (vesd össze az ref18.14 Feladat megoldásával).

Ezzel igazoltuk, hogy létezik legalább egy elsőfokú pont. Hogyan mutatható meg, hogy biztosan van még egy elsőfokú pont? ■

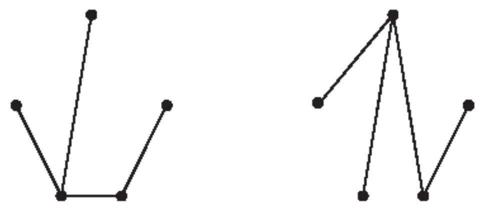
Ha a tekintett fa egy út, akkor ennek pontosan két elsőfokú pontja van, a végpontjai.

I.9.3.7. Feladat. *Rajzoljuk le az n pontú fákat, ahol $n = 1,2,3,4$. Mennyi ezeknek a száma? Azonosítsuk az egymással izomorf fákat. Mennyi ezeknek a száma?*

Kérdések: Hány n pontú fa létezik? Hány n pontú, egymással nem izomorf fa létezik?

Tekintsük pl. az I.9.12 ábrán levő két 5 pontú fát. Ha e két fának ugyanolyan sorrendben megszámozzuk (megcimkézzük) a pontjait, pl. az 1,2,3,4,5 számokkal, akkor azt mondjuk, hogy ezek különböző **cimkézett fák** (vagy számozott fák). Általában két n pontú cimkézett fa akkor különböző, ha van olyan (i, j) számpár, hogy az egyik fában van ij él, a másikban pedig nincs.

Ha elhagyjuk a pontok számozását, akkor **cimkézetlen fák**ról (vagy számozatlan fákról) beszélünk. Két cimkézetlen fa akkor különböző, ha nem izomorfak. Az I.9.12 ábrán levő két fa egymással izomorf, ezért cimkézetlen fákként tekintve őket nem különbözőek.



I.9.12. ábra. Példa izomorf fagráfokra

Ennek megfelelően az előbbi kérdések így is megfogalmazhatók:
Mennyi az n pontú cimkézett fák száma? Mennyi az n pontú cimkézetlen fák száma?

Az I.9.2 táblázat az n pontú cimkézett és cimkézetlen fák számát tartalmazza.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
cimkézett fák száma	1	1	3	16	125	1 296	16 807	262 144
cimkézetlen fák száma	1	1	1	2	3	6	11	23

I.9.2. táblázat. Az n pontú fagráfok száma

Megállapítható, hogy adott n-re az n pontú cimkézetlen fák száma jóval kisebb a cimkézett fák számánál.

Jelölje x_n az n pontú cimkézett fák számát Az I.9.2 táblázat szerint $x_2 = 1 = 2^{2-2}$, $x_3 = 3 = 3^{3-2}$, $x_4 = 16 = 4^{4-2}$, $x_5 = 125 = 5^{5-2}$. Innen már megsejthető a következő, Cayley-tételként ismert eredmény: $x_n = n^{n-2}$ minden $n \geq 1$-re (ez $n = 1$-re is igaz). Ez egy meglepően egyszerű képlet, amelyet bizonyítani fogunk, a bizonyítás viszont nem olyan egyszerű.

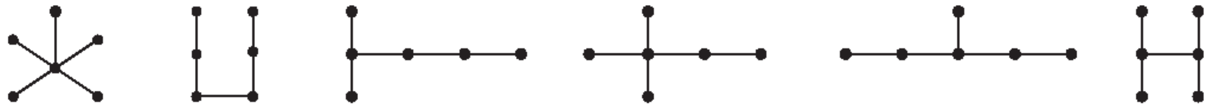
I.9.3.8. Feladat. *Hány n pontú cimkézett csillag létezik? Hány n pontú cimkézett út létezik?*

Megoldás. A válasz: n, illetve $n!/2$. Miért épp ennyi?

Az n pontú cimkézetlen (tehát nemizomorf) fák T_n számára nincs hasonló egyszerű képlet, csak becslések adhatók. Mivel egy n pontú cimkézetlen fa legfeljebb $n!$-féleképpen cimkézhető meg, azonnal következik, hogy $T_n \geq x_n/n! = n^{n-2}/n!$ minden $n \geq 1$-re. Az is igazolható, hogy $T_n \leq 4^{n-1}$ minden $n \geq 1$-re.

Az I.9.13 ábrán a 6 pontú cimkézetlen fák láthatók, ezek száma $T_6 = 6$.

A továbbiakban ismertetünk egy módszert, amely lehetővé teszi a cimkézett fák megadását a megfelelő ábra nélkül, az ún. *Prüfer-kód* segítségével. A fa persze megadható az élek felsorolásával



I.9.13. ábra. A 6 pontú cimkézetlen fák

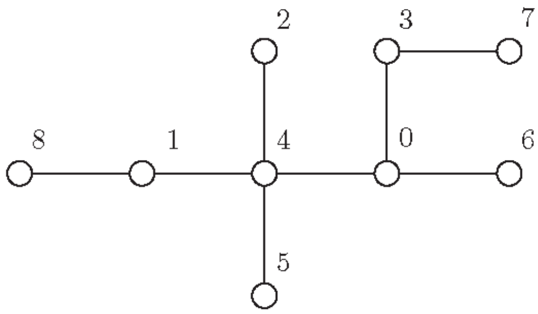
vagy a szomszédsági mátrixszal is, de ez egy tömörebb reprezentáció, amely ugyanakkor elvezet a Cayley-tétel bizonyításához is.

Tekintsünk egy n pontú cimkézett gráfot, a cimkék legyenek a $0,1,2,\dots,n-1$ számok. Akkor a fa Prüfer-kódja egy, a $0,1,2,\dots,n-1$ számok közül $(n-2)$ számból álló $\boxed{k_1\,k_2\dots k_{n-2}}$ alakú kód, ahol fontos a számok sorrendje.

A 0 cimkéjű pontot a **fa gyökeré**nek nevezzük, ez a fa tetszőleges rögzített pontja lehet. A gyökértől különböző elsőfokú pontokat a **fa levelei**nek nevezzük. Biztosan van legalább egy levél. Mi több, ha a gyökér nem elsőfokú, akkor létezik legalább két levél, lásd I.9.3.6 Tétel.

A Prüfer-kódot a következőképpen kapjuk meg:

Megkeressük a levelek közül a legkisebb cimkéjűt (t_1) és leírjuk ennek a szomszédját (k_1). Ez lesz a kód első száma (k_1). Töröljük a t_1 pontot a hozzátartozó éllel együtt. Megkeressük a megmaradt fa levelei közül a legkisebb cimkéjűt (t_2) és leírjuk ennek a szomszédját (k_2). Ez lesz a kód második száma (k_2). Most töröljük a t_2 pontot a hozzátartozó éllel együtt. Keressük meg a megmaradt fa levelei közül a legkisebb cimkéjűt (t_3) és leírjuk ennek a szomszédját (k_3). Ezt ismételjük (sorra letépjük a leveleket) mindaddig, amíg egy két pontból álló fa nem marad. Így összesen $(n-2)$ pontot töröltünk, a törölt pontok szomszédaiból álló kód tehát valóban $(n-2)$ számból áll.



I.9.14. ábra. Példa/1/Prüfer-kód

Például, adott az I.9.14 ábrán levő $n=9$ pontú fa. Először a 2 pontot kell törölni: $t_1=2$, ennek szomszédja a $k_1=4$, töröljük az 5 pontot: $t_2=5$, ennek a szomszédja a $k_2=4$, tovább $t_3=6$ és $k_3=0$, $t_4=7$ és $k_4=3$, $t_5=3$ és $k_5=0$, $t_6=8$ és $k_6=1$, $t_7=1$ és $k_7=4$ (rendre letépjük a megmaradt fa leveleit). Készítsünk egy táblázatot így:

2	5	6	7	3	8	1
4	4	0	3	0	1	4

A kód tehát ennek a második sora: $\boxed{4\,4\,0\,3\,0\,1\,4}$. Megjegyezzük, hogy így végül megmarad a $4-0$ él, a 4 törlésével a 0-t is leírhatnánk, de ez felesleges, mert mindig a 0 gyökér az utolsó szám.

Ebben az eljásban az az igazán figyelemre méltó, hogy egy ilyen kód megadásával rekonstruálható a fa. Tehát

I.9.3.9. Tétel. *A Prüfer-kód egyértelműen meghatározza a fát.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a Prüfer-kód ismeretében egyértelműen megadható a fa $n-1$ éle. Tekintsük a következő példát. Adott az $\boxed{5\,2\,4\,1\,0\,2\,3\,1}$ kód. Ez 8 számból áll, ezért $n-2=8$, tehát egy $n=10$ pontú fáról van szó. Melyek voltak vajon azok a $t_1, t_2, \ldots, t_8$ pontok, amelyek törlésével ezt kaptuk? Mi állhat az alábbi táblázat első sorában?

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
5	2	4	1	0	2	3	1

Lehet-e $t_1 = 1$? Nem, mert mert ekkor az első lépésben törölnünk kellett volna, és nem szerepelhetne a táblázat második sorában. Lehet-e $t_2 = 2$? Nem, ugyanezen oknál fogva. Így $t_1 \neq = 1,2,3,4,5$. Következik innen, hogy $t_1 = 6$? Igen, mert ha a 6 nem lenne elsőfokú pont, akkor szomszédja lenne valaminek, és bekerült volna a második sorba. Tehát $t_1 = 6$.

Mi lehet t_2? Az első oszlop elhagyásával az 5 kikerül a második sorból, és az 5 lesz az a legkisebb szám, amely nem szerepel a második sorban. Tehát $t_2=5$. Tovább hasonlóan: $t_3=7$, $t_4=4$, $t_5=8$, $t_6=9$, $t_7=2$, $t_8=3$, azaz:

6	5	7	4	8	9	2	3
5	2	4	1	0	2	3	1

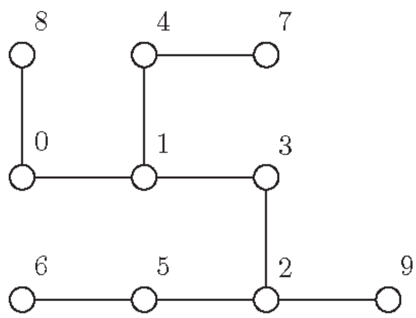
A szabály tehát ez: *az első sor minden eleme az a legkisebb pozitív szám, amely nem szerepel korábban az első sorban vagy később a második sorban.*

Hiányzik még az 1, ez alkotja a 0 gyökérrel az utolsó élet. Ezzel kiegészítve kapjuk a bővített táblázatot:

6	5	7	4	8	9	2	3	1
5	2	4	1	0	2	3	1	0

Az oszlopok jelentik az éleket és ennek alapján rekonstruálható a fa. Kezdjük az utolsó oszloppal és haladjunk visszafelé, így egy egyre bővülő fát kapunk(!), lásd az I.9.15 ábrát.

Ezek a meggondolások teljesen általánosak és a tulajdonság bizonyítását adják. ∎



I.9.15. ábra. Példa/2/Prüfer-kód

I.9.3.10. Feladat. *Melyik az a fa, amelynek a Prüfer-kódja* $\boxed{5\,3\,2\,3\,4\,1\,7\,2\,0\,3}$*?*

Nem lehetne egyszerűbben kódolni? Felejtsük el egy rövid időre a Prüfer-kódot és tekintsük a következő feladatot:

I.9.3.11. Feladat. *Próbálkozzunk a következő egyszerűbbnek tűnő kódolással: Adott egy cimkézett fa, ennek rögzített a gyökere. Vegyük sorra az éleket és írjuk le előbb a gyökértől távolabbi pontot, majd a gyökérhez közelebbi pontot. Az éleket rendezzük az elsőként leírt pontok növekvő sorrendjében. Pl. az I.9.14 ábrából kindulva ezt kapjuk:*

1	2	3	4	5	6	7	8
4	4	0	0	4	0	3	1

A próbakód legyen a táblázat második sora: 4 4 0 0 4 0 3 1. *Egy n pontú fának így megfeleltetünk $n-1$ számot.*

a) Biztos az, hogy az első sorban mindegyik szám egyszer szerepel?

b) Rekonstruálható-e ennek a próbakódnak alapján a fa? Vizsgáljuk a következő próbakódokat: 0 1 2 3 4 5 6 7 8, 8 7 6 5 4 3 2 1 0, 0 0 0 0 0 0, 3 1 2 5 4 5.

c) Miért nem jó ez a módszer? Miért nem lesz ez kód?

Térjünk vissza a Prüfer-kódhoz és igazoljuk a Cayley-tételt.

I.9.3.12. Tétel. *(Cayley-tétel) Az n pontú cimkézett fák száma* $\boxed{x_n = n^{n-2},\ n \geq 1}$.

Bizonyítás. Ahogy azt láttuk, a Prüfer-kód bijektív megfeleltetést létesít az n pontú cimkézett fák és azok között az $n-2$ tagú számsorozatok között, amelyek minden tagja a $0, 1, 2, \ldots, n-1$ számok valamelyike. Az ilyen sorozatok száma $\overline{V}_n^{n-2} = n^{n-2}$ (ismétléses variációk száma). Következik, hogy ugyanennyi az n pontú cimkézett fák száma is. ■

I.9.3.13. Definíció. *Egy körmentes, de nem feltétlenül összefüggő gráf neve* **erdő**. *Rögtön adódik, hogy egy erdő összefüggő komponensei fák (innen származik az elnevezés).*

I.9.3.14. Feladat. *Hány éle van egy n pontú, k komponensű erdőnek?*

I.9.4. Feszítőfák, Kruskal-algoritmus

Ebben a szakaszban is egyszerű gráfokkal foglalkozunk.

I.9.4.1. Definíció. *Egy összefüggő gráf* **feszítőfájá***nak nevezzük a gráf olyan feszítő részgráfját, amely fa (lásd az I.9.2.10 Definíciót).*

Másképp: Egy összefüggő gráf feszítőfája a gráf olyan részgráfja, amely az adott gráf minden pontját tartalmazza (a gráf élei közül csak bizonyos éleket), és amely fa. A feszítőfa más elnevezése: faváz.

I.9.4.2. Tétel. *Minden összefüggő gráfnak létezik feszítőfája.*

Bizonyítás. Legyen G egy tetszőleges összefüggő gráf. Ha G körmentes, akkor G egy fa és G lesz a feszítőfa. Ebben az esetben G az egyedüli feszítőfa.

Ha G nem körmentes, akkor van benne egy C kör. A C kör egy e élét elhagyva $G \setminus \{e\}$ összefüggő marad, lásd I.9.2.17 Feladat. Ha $G \setminus \{e\}$ körmentes, akkor egy fa, és ez lesz egy feszítőfa. Ellenkező esetben hagyjuk el egy kör valamelyik élét. Ezt ismételve véges sok lépés után a G egy feszítőfájához jutunk. ■

Ha egy G összefüggő gráfban van kör, akkor G-ben több feszítőfa is van, és ezek között nem izomorfak is lehetnek.

Nézzük a következő gyakorlati problémát: Adott n település, amelyek között vízvezeték hálózatot akarnak létesíteni úgy, hogy az minden települést ellásson az egyik A településen levő vízforrásból. Nem akarják feltétlenül A-t összekötni az összes többivel, a hálózaton keresztül azonban mindegyik számára biztosítani akarják a vízzel való ellátást. Az egyes települések közötti közvetlen vezetékek építési költségei ismertek (ezeket a távolság, a domborzati viszonyok és egyébb tényezők határozzák meg).

Kérdés: Mely településeket kell közvetlenül összekapcsolni úgy, hogy a teljes építési költség a lehető legkisebb legyen?

Gráfelméleti fogalmakat használva: Adott egy n pontú teljes gráf, amelynek minden éléhez hozzárendelünk egy pozitív valós számot, az építési költséget.

Feladat: Határozzuk meg ennek a gráfnak egy olyan részgráfját, amely
- összefüggő,
- minden pontot tartalmaz,
- éleihez rendelt költségek összege minimális.

Rögtön adódik, hogy a keresett részgráf egy fa, mert összefüggő (feltétel) és körmentes, hiszen ha lenne benne kör, akkor annak legköltségesebb élét megszüntetve a részgráf összefüggő marad, az összköltség pedig csökken. Következik, hogy a keresett részgráf az adott n pontú teljes gráf egy feszítőfája, amelynek $n-1$ éle van.

Hogyan lehet egy ilyen feszítőfát megadni?

Tudjuk, hogy összesen n^{n-2} számú n pontú cimkézett fa létezik (Cayley-tétel). Ha sorra akarnánk venni a lehetőségeket, akkor pl. már $n=10$-re $10^8 = 100\,000\,000$ lehetséges fát kellene megvizsgálnunk. Ennél egyszerűbb és hatékonyabb módszerre van szükség, és ilyen eljárás létezik.

A gyakorlatban bizonyos települések közötti közvetlen vezeték (kapcsolat) valamilyen meggondolás miatt ki van zárva. A teljes gráf helyett tehát adott egy összefüggő gráf, és ennek kell meghatározni egy minimális költségű feszítőfáját. Általában több ilyen fa létezik.

Bemutatjuk a Kruskal-algoritmust, amely alkalmas ennek a feladatnak a megoldására és amelynek lényege a következő: kiválasztunk a legkisebb költségű (legolcsóbb) élek közül egyet, majd ismételten a még ki nem választott, legolcsóbb élek közül kiválasztunk egy olyan élt, amely nem hoz létre kört a már kiválasztott élekkel.

Pontosabban, legyen G egy n pontú összefüggő gráf, amely éleinek halmaza $E(G)$ és legyen $c: E(G) \to (0,\infty)$ egy költségfüggvény a G élein. Határozzunk meg egy olyan F feszítőfát, amelyre a $c(F) = \sum_{e\in E(F)} c(e)$ teljes költség minimális.

Kruskal-algoritmus:

Rendezzük az éleket a költségek növekvő sorrendjében:

$E(G) = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, ahol $c(e_1) \le c(e_2) \le ... \le c(e_m)$.

Legyen $A = \emptyset \subseteq E(G)$, A lesz a kiválasztott élek halmaza.

Minden i=1,2, ..., m esetén az e_i élt vagy kiválasztjuk, vagy sem az A halmazba a következőképpen:

- Ha az $A\cup\{e_i\}$ élhalmaz nem tartalmaz kört, akkor az e_i élt kiválasztjuk: $A := A\cup\{e_i\}$.
- Ha az $A\cup\{e_i\}$ élhalmaz tartalmaz kört, akkor az e_i élt nem választjuk ki, ekkor A nem változik.

Az algoritmus egy olyan F részgráfot eredményez, amelyet a G gráf összes pontja és az A-beli élek alkotnak ($E(F) = A$).

I.9.4.3. Tétel. *A Kruskal-algoritmus által eredményezett F részgráf egy minimális költségű feszítőfa.*

Bizonyítás. Az algoritmus során minden lépés után körmentes részgráfot kapunk, így a F output részgráf is körmentes.

Tegyük fel, hogy F nem összefüggő. Legyen F' az F egy összefüggő komponense. G összefüggő, ezért G-nek van olyan e_i éle, amelynek egyik végpontja F'-beli, a másik végpont pedig nem F-beli. Ez az e_i él nem került kiválasztásra, azaz $e_i \notin A$. Ugyanakkor ez az e_i él nem alkot kört F-ben, ezért az algoritmus során ezt ki kellett volna választani. Ez ellentmondást jelent.

Következik, hogy F egy fa, és mivel F pontjai között a G minden pontja szerepel (Indokoljuk meg!), ezért F a G egy feszítőfája.

Most igazoljuk, hogy F egy minimális költségű feszítőfa. Legyenek F élei $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ a kiválasztás sorrendjében, azaz $c(a_1) \le c(a_2) \le ... \le c(a_{n-1})$. Legyen ugyanakkor T egy tetszőleges, F-től különböző feszítőfa, amely éleinek halmaza $E(T) = \{t_1, t_2, ..., t_{n-1}\}$.

Legyen a_i $(i \ge 1)$ az első olyan él az algoritmus során, amely nem éle T-nek (biztosan van ilyen él, mert $T \ne F$), tehát $a_1, a_2, ..., a_{i-1} \in E(T)$, de $a_i \notin E(T)$. Itt $i = 1$ is lehet, ebben az esetben már $a_1 \notin E(T)$.

Az a_i élt a T fához hozzávéve egy C kört kapunk (lásd I.9.3.3 Tétel). Ez a C kör nem lehet teljes egészében F-ben, mert F egy fa, ezért C-nek létezik legalább egy olyan éle e éle, amely nem éle F-nek: $e \notin E(F)$, és éle T-nek: $e \in E(T)$. Legyen T_1 az a gráf, amelyet úgy kapunk T-ből, hogy T éleihez hozzávesszük a_i-t és elhagyjuk e-t, azaz $E(T_1) = E(T) \cup \{a_i\} \setminus \{e\}$. Akkor T_1 is egy feszítőfa (Igazoljuk ezt!).

Megmutatjuk, hogy itt $c(a_i) \le c(e)$. Tegyük fel, hogy ez nem így van, azaz $c(e) < c(a_i)$. Ha itt $i = 1$, akkor $c(e) < c(a_1)$ ellentmond az algoritmus első lépésének. Ha $i = 2$, akkor $c(e) < c(a_2)$ ismét ellentmondás, mert e az a_1-gyel nem alkothat kört, ezért a második lépésben az e élt kellett volna választani. Legyen $i \ge 3$ és $c(e) < c(a_i)$. Az algoritmus az i-edik lépésben nem az „olcsóbb” e élt választotta, hanem a „drágább” a_i élt, aminek csak az a magyarázata lehet, hogy az e él kört alkot az F fa már kiválasztott $a_1, a_2, ..., a_{i-1}$ éleivel. De ezek az élek mind élei a T fának, ezért itt is ellentmondásra jutunk. Következik, hogy valóban $c(a_i) \le c(e)$. Innen pedig azt kapjuk, hogy T_1 költsége nem több, mint T költsége: $c(T_1) \le c(T)$.

Cseréljük ki a T fát a T_1 fára. A T_1 feszítőfának több közös éle van F-fel, mint T-nek, mert T_1-et úgy kaptuk, hogy T egy nem F-beli élét (az e élt) egy F-beli élre (az a_i élre) cseréltük. Ha T_1 különbözik F-től, akkor ugyanezt az eljárást ismételve olyan T_2, T_3,... feszítőfákat kapunk, amelyeknek egyre több közös élük van F-fel és $... \le c(T_3) \le c(T_2) \le c(T_1) \le c(T)$.

Véges sok lépés (csere) után olyan T_k fát kapunk, amelyre $T_k = F$ és következik, hogy F költsége nem több, mint T költsége: $c(F) = c(T_k) \le c(T)$. ■

Megjegyzések. 1. A fenti eljárást *mohó algoritmus*nak is nevezzük, mert az minden lépésben a még nem vizsgált élek közül a „legolcsóbbat” választja. Csak akkor nem használja a „legolcsóbbat”, ha az már nem megengedett. Ez a „filozófia” sok esetben, így a fentiekben is (de nem mindig!) eredményre vezet.

2. Ha az eredeti G gráf élei mind különböző költségűek, azaz $c(e_1) < c(e_2) < ... < c(e_m)$, akkor a fentiek szerint következik, hogy a minimális költségű feszítőfa egyértelműen meghatározott.

3. Az *R. C. Prim által adott algoritmus* a következő: Legyen G egy összefüggő gráf. Tekintsük ennek egy a_1 tetszőleges pontját. Az a_1-ből kiinduló élek közül válasszunk egy minimális költségűt, így egy a_1, a_2 pontokból álló fát kapunk. Válasszunk egy olyan minimális költségű élt, amelynek egyik végpontja a_1 vagy a_2, a másik végpontja pedig egy ezektől különböző a_3 pont, így egy hárompontú fát kapunk. Ezt ismételve, ha már van egy $a_1, a_2, ..., a_k$ pontokból álló T fa, akkor válasszunk egy olyan minimális költségű élt, amelynek egyik végpontja T-beli, a másik végpontja T-n kívüli, és ezt az élt vegyük hozzá T-hez. Az eljárást addig folytatjuk, míg egy feszítőfát nem kapunk.

Igazolható, hogy az így kapott feszítőfa minimális költségű.

4. Egy más algoritmus: Legyen G egy összefüggő gráf. Rendezzük az éleket a költségek csökkenő sorrendjében: $E(G) = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$, ahol $c(e_1) \geq c(e_2) \geq ... \geq c(e_k)$.

Legyen $B = E(G)$, B lesz a kiválasztott élek halmaza.

Minden $i = 1,2,...,k$ esetén az e_i élt vagy töröljük a B halmazból, vagy sem a következőképpen:

- Ha a B élhalmaz tartalmaz olyan kört, amelynek egyik éle e_i, akkor az e_i élt töröljük: $B := B \setminus \{e_i\}$.
- Ha a B élhalmaz nem tartalmaz olyan kört, amelynek egyik éle e_i, akkor B nem változik.

Igazolható, hogy ennek az algoritmusnak az outputja egy minimális költségű feszítőfa.

I.9.5. Multigráfok, gráfok bejárása

Ebben a szakaszban olyan (irányítás nélküli) gráfokat is vizsgálunk, amelyeknek többszörös éleik és hurokéleik is lehetnek. Ezeket **multigráfok**nak is nevezzük. Definíciójuk a következő:

I.9.5.1. Definíció. *Legyenek V és E tetszőleges nemüres halmazok, $\varphi : E \to \{\{x\}, \{x,y\} : x, y \in \in V, x \neq y\}$ pedig egy tetszőleges függvény. A $G = (V, E, \varphi)$ rendszert (irányítás nélküli)* **gráf***nak, vagy* **multigráf***nak nevezzük, ahol V elemei a gráf pontjai, E elemei a gráf élei. Ha egy $e \in E$ élre $\varphi(e) = \{x, y\}$, ahol $x \neq y$, akkor x és y az e él* **végpontjai**. *Ha $\varphi(e) = \{x\}$, akkor az e él* **hurokél**.

I.9.5.2. Feladat. *Legyen például $V = \{1,2,3,4,5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ és $\varphi(e_1) = \{1,2\}$, $\varphi(e_2) = \{1,3\}$, $\varphi(e_3) = \{1,3\}$, $\varphi(e_4) = \{3\}$, $\varphi(e_5) = \{4,5\}$, $\varphi(e_6) = \{4,5\}$, $\varphi(e_7) = \{4\}$, $\varphi(e_8) = \{3,5\}$.*

Rajzoljuk meg ezt a gráfot.

A séta, út és kör fogalmát hasonlóképpen definiáljuk, mint az egyszerű gráfok esetén.

I.9.5.3. Definíció. *Legyen G egy (multi)gráf. Egy olyan sétát, amely G minden élét tartalmazza (pontosan egyszer)* **Euler-sétá***nak vagy* **Euler-vonal***nak nevezzük. Ez* **zárt Euler-séta***, ha végpontjai azonosak, ellenkező esetben* **nyitott Euler-séta**.

A G gráf **Hamilton-kör***e egy olyan kör, amely G minden pontján áthalad.*

A königsbergi-hidak problémája így is megfogalmazható: Van-e a ref8abra ábrán levő gráfban zárt Euler-séta?

I.9.5.4. Tétel. *(Euler) Legyen G egy összefüggő gráf.*

i) Ha G-ben kettőnél több páratlan fokú pont van, akkor G-ben nincs Euler-séta.

ii) Ha G-ben pontosan kettő páratlan fokú pont van, akkor G-ben létezik Euler-séta. Minden Euler-séta nyitott és végpontjai a páratlan fokú pontok.

iii) Ha G-ben nincs páratlan fokú pont, akkor G-ben létezik Euler-séta. Ekkor minden Euler-séta zárt.

Bizonyítás. iii) Tegyük fel, hogy G-ben minden pont foka páros. Algoritmust adunk a gráf bejárására, amely egy zárt Euler-sétához vezet.

Induljunk el egy tetszőleges v_1 pontból egy tetszőleges élen és haladjunk ameddig csak lehet még be nem járt éleken. Számozzuk meg a bejárás sorrendjében a bejárt éleket. A feltétel miatt csak v_1-ben akadhatunk el. Ha nem jártuk be az összes élt, akkor van olyan be nem járt él, amely egy már érintett v_2 pontra illeszkedik. Induljunk el v_2-ből be nem járt éleken haladva. Csak v_2-ben akadhatunk el. Számozzuk újra a bejárt éleket úgy, hogy megtartjuk az előző számozást, amíg v_2-be nem jutunk, majd a másodszor bejárt éleken folytatjuk a számozást a v_2-ben való elakadásig, ezután pedig az először bejárt éleken folytatjuk a számozást v_2-től kezdődően. Ezt az eljárást ismételve végül egy zárt Euler-sétát kapunk. ■

I.9.5.5. Feladat. *Különböző gráfokra vizsgáljuk meg az előző Tétel alkalmazhatóságát. Alkalmazzuk az előbbi algoritmust.*

I.9.5.6. Feladat. *Nem szerepel az előbbi Tételben az az eset, amikor a G gráfnak pontosan egy páratlan fokú pontja van. Vajon miért?*

Ezt a Tételt gyakran így adjuk meg:

I.9.5.7. Következmény. *Egy összefüggő gráfban akkor és csak akkor van zárt Euler-séta, ha a gráf minden pontjának a foka páros.*

A Hamilton-körök problémája hasonlít az Euler-sétákéra. Kérdés: Hogyan dönthető el, hogy egy gráfnak van-e Hamilton-köre?

Erre vonatkozóan nem ismerünk szükséges és elégséges feltételt. Egy elégséges feltételt ad a következő

I.9.5.8. Tétel. *(Dirac Gábor) Ha egy n pontú ($n \geq 3$) egyszerű gráfban minden pont foka $\geq n/2$, akkor a gráfnak van Hamilton-köre.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy n pontú G egyszerű gráfban minden pont foka $\geq n/2$ és G-ben nincs Hamilton-kör. Adjunk hozzá a gráfhoz újabb éleket egészen addig, amíg továbbra is fennáll az, hogy a kapott gráfokban nincs Hamilton-kör. Az összes lehetséges élt biztosan nem tartalmazhatja egy így kapott gráf, mert az a teljes gráfot jelentené, amelyben van Hamilton-kör, ehhez elég sorravenni a pontokat (tetszőleges sorrendben).

Biztosan eljutunk tehát egy olyan G^* gráfhoz, amelyben még nincs Hamilton-kör, de bármely újabb él hozzávétele esetén már van Hamilton-kör. Egy ilyen G^* gráfot nevezzünk telített gráfnak, vizsgáljuk ezt a továbbiakban. Újabb élek hozzávételével a pontok foka nem csökken, így a G^* gráfra is igaz, hogy minden pont foka $\geq n/2$.

Ha xy nem éle G^*-nak, akkor így xy hozzávétele esetén Hamilton-kört kapunk, jelölje ezt

$$[x = v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v_n = y].$$

Készítsünk rajzot! Ha G^*-ban x szomszédos v_j-vel (azaz G^*-ban xv_j egy él), akkor y nem szomszédos v_{j-1}-gyel, mert ellenkező esetben $v_{j-1}y$ egy él és $[x{=}v_1, v_2, ..., v_{j-1}, y{=}v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, ..., v_j]$ Hamilton-kör G^*-ban, ami ellentmondás.

Tegyük fel, hogy x foka $d(x) = k$ és x szomszédos a $v_{j_1}, v_{j_2}, ..., v_{j_k}$ pontokkal. Következik, hogy y foka: $d(y) \leq n-1-k$, mert y nem szomszédos a $v_{j_1-1}, v_{j_2-1}, ..., v_{j_k-1}$ pontokkal. Innen $d(x)+$ $+d(y) \leq n-1$.

Másrészt, a feltételből $d(x) \geq n/2$, $d(y) \geq n/2$, ahonnan $d(x)+d(y) \geq n$, ami ellentmondás. ■

Megjegyzés. Ebből következik, hogy ha egy társaságban mindenki ismeri legalább a társaság tagjainak a felét, akkor a társaság tagjai leültethetők egy kör alakú asztal köré úgy, hogy mindenkinek ismerőse legyen mind a két szomszédja.

Második rész

Feladatgyűjtemény

II.1. fejezet

Permutációk, variációk, kombinációk

II.1.1. Kidolgozott példák

1.1. Anna, Bea, Csilla és Dóra együtt mennek moziba. Hányféleképpen helyezkedhetnek el négy egymás mellett lévő széken? Írjuk le a lehetséges eseteket!

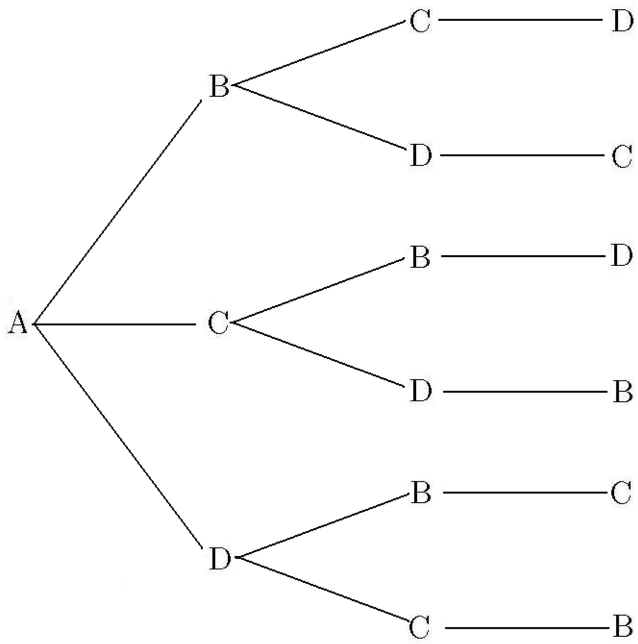
Megoldás:

A	B	C	D	B	A	C	D	C	A	B	D	D	A	B	C
A	B	D	C	B	A	D	C	C	A	D	B	D	A	C	B
A	C	B	D	B	C	A	D	C	B	A	D	D	B	A	C
A	C	D	B	B	C	D	A	C	B	D	A	D	B	C	A
A	D	B	C	B	D	A	C	C	D	A	B	D	C	A	B
A	D	C	B	B	D	C	A	C	D	B	A	D	C	B	A

Ezzel az összes lehetséges sorrendet előállítottuk, ami a konstrukcióból is nyilvánvaló, de igazolhatjuk azzal is, ha belátjuk, hogy összesen 24 elrendezés van.

4 elem ismétlésnélküli permutációiról van van szó. Ezek száma $P_4 = 4! = 24$.

Szokás a permutációkat fa-gráfon is ábrázolni:



A B-vel, C-vel, illetve D-vel, kezdődő permutációk hasonló részgráfokba rendezhetők.

1.2. Készítsünk az 1; 2; 5; 6; 9 számjegyekből ötjegyű számokat úgy, hogy minden számjegyet egyszer használhatunk.

a) Hány ötjegyű szám képezhető így?

b) Hány „15"-tel kezdődő szám képezhető így?

c) Hány olyan szám képezhető így, melyben az 1-es és az 5-ös számjegy egymás mellett van, méghozzá ilyen sorrendben?

d) Hány páros (ötjegyű) szám képezhető a fenti módon?

e) Hány páratlan (ötjegyű) szám képezhető a fenti módon?

f) Hány néggyel osztható szám képezhető a fenti módon?

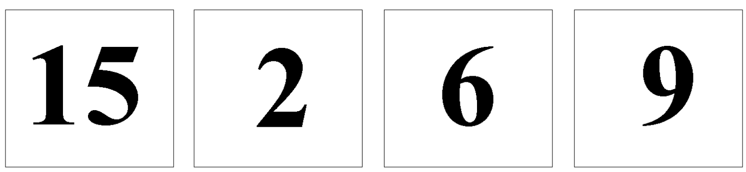
g) Hány hárommal osztható szám képezhető a fenti módon?

Megoldás:

a) A felsorolt számjegyek minden sorbarendezése egy-egy ötjegyű számot ad. Ezek száma $P_5 = 5!$.

b) „15"-tel kezdődő számokat úgy tudonk képezni, ha az első két jegyet „fixáljuk", majd a maradék három helyre a megmarad három számjegyet elhelyezzük. Ez $P_3 = 3!$-féleképpen tehető meg.

c) A „15" párt egy „számjegynek" tekintjük. (Mintha számkártyákat készítettünk volna az ábra szerint.)



Az így kapot 4 kártyát $P_4 = 4!$-féleképpen rendezhetjük sorba.

d) Ha páros számot szeretnénk képezni, akkor az utolsó jegy páros kell, hogy legyen. Így az utolsó helyre kétféle számjegy írható (2-es vagy 6-os), a többi helyre a maradék 4 jegyet $P_4 = 4!$-féleképpen rakhatjuk be. A szorzási szabályt felhasználva az összesen $2 \cdot 4!$ különböző ötjegyű páros szám képezhető a megadott jegyekből.

e) **1. Megoldás**

összes ötjegyű szám:	$5!$
a párosak:	$2 \cdot 4!$
páratlanok:	$5! - 2 \cdot 4!$

2. Megoldás

Ha páratlan számot szeretnénk készíteni, akkor az utolsó helyre 3 számjegy közül választhatunk (1; 5; 9). A maradék 4 helyiértékre 4 számjegyünk maradt, ezeket $P_4 = 4!$-féleképpen rendezhetjük el. A szorzási szabály alapján összesen $3 \cdot 4!$ páratlan szám képezhető.

f) Pontosan akkor kapunk 4-gyel osztható számot, ha az utolsó két jegyből készített szám osztható 4-gyel. A megadott jegyekből a következő 6 számpár alkalmas az utolsó két helyiérték kitöltésére:

12	52	92
16	56	96

g) Egy szám akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal. A permutációként kapott ötjegyű számok mindegyikénél a jegyek összege:

$$1+2+5+6+9=23,$$

azaz nincs olyan a megadott jegyekből készíthető ötjegyű szám, amely osztható lenne 3-mal.

1.3. Hány hatjegyű öttel osztható szám képezhető a 0; 1; 2; 3; 4; 5 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer fordulhat elő?

1. Megoldás:

Akkor beszélünk valódi hatjegyű számról, ha az nem kezdődik 0-val. Ha 5-tel osztható számot szeretnénk előállítani a megadott számjegyekből, akkor a számnak 5-re, vagy 0-ra kell végződnie.

Számoljuk ez alapján külön az eseteket:

Ha 0-ra végződik, akkor a maradék 5 helyre a fennmaradó 5 számjegyet $P_5 = 5!$-féleképpen rendezhetjük el. (Hiszen itt nem kell arra figyelnünk, hogy valódi hatjegyű számot készítsünk.)

Ha a szám 5-re végződik, akkor vigyáznunk kell arra, hogy a szám ne kezdődjön 0-val. Ezt úgy tudjuk biztosítani, ha az első helyre csak 4 számjegy (1; 2; 3; 4) közül választunk. A maradék 4 helyre a fennmaradó 4 számjegyet $P_4 = 4!$-féleképpen rendezhetjük el. A szorzási szabály alapján tehát összesen $4 \cdot 4!$ olyan valódi hatjegyű szám van, amely 5-re végződik.

A két diszjunkt esethez tartozó lehetőségeket az összeadási szabály alapján számolhatjuk össze. Tehát összesen

$$5! + 4 \cdot 4! = 9 \cdot 4!$$

5-tel osztható valódi hatjegyű szám készíthető a megadott feltételek mellett.

2. Megoldás:

1. lépés: Számoljuk össze az összes 5-tel osztható számot amit a fenti jegyek felhasználásával készíthetünk. (Természetesen minden számjegyet pontosan egyszer használunk.) Ezek között a számok között tehát lesznek „nem-valódi hatjegyű” számok.

Az utolsó helyiértékre ekkor két számjegy közül választhatunk $(0; 5)$. A többi helyre a fennmaradó 5 számjegyet $P_5 = 5!$-féleképpen írhatjuk be. Így összesen $2 \cdot 5!$ különböző számot készítettünk. Ne felejtsük, hogy ezek között még vannak olyanok, amelyek nem tesznek eleget a feladat feltételeinek.

2. lépés: Számoljuk össze a „rossz” eseteket. Ezek olyan számok, amelyek 0-val kezdődnek és 5-re végződnek. A középső 4 helyre a maradék 4 számjegyet $P_4 = 4!$-féle sorrendben írhatjuk be.

3. lépés: A feltételeknek megfelelő előállítások számát az *1. lépés*ben számolt esetek és a *2. lépés*ben előállított esetek különbségeként kapjuk:

$$2 \cdot 5! - 4! = 10 \cdot 4! - 4! = 9 \cdot 4!$$

1.4. Az 1; 1; 1; 2; 2; 3; 3 számjegyekből

a) hány hétjegyű számot lehet készíteni?

b) hány „13”-mal kezdődő szám képezhető?

Megoldás:

a) Különböztessük meg egymástól – mondjuk színezéssel – az azonos számjegyeket!

1 1 1 2 2 3 3

Ekkor 7 különböző elem összes sorbarendezéseit kell vizsgálnunk, amely P_7=7!-féle sorbarendezést jelent. Ha most újra eltekintünk a színezéstől, akkor azt vehetjük észre, hogy vannak olyan számok, amelyeket többször számoltunk. Tekintsük például azokat a számokat, amelyekben a 2-esek és a hármasok helye – a színezésekre is tekintettel – megegyezik. Ezekből pontosan annyit számoltunk, ahányféleképpen a 3 különböző színű egyes a fennmaradó három helyre elhelyezhető. (3!) Ezek a felírások valójában egyetlen, a feltételeknek megfelelő hétjegyű számhoz tartoznak, így minden olyan számot, amely csak az egyesek színezésében térnek el 3!-szor számoltunk. Úgy is meg lehet fogalmazni a fentieket, hogy ha az egyesek színezésétől eltekintünk, de a 2-esekétől és a 3-asokétól nem, akkor $\frac{7!}{3!}$ különböző hétjegyű számot képezhetünk. A gondolatmenetet megismételve tekintsünk el a 2-esek majd a 3-asok színezésétől. Így összesen

$$P_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$$

különböző szám képezhető a feladat eredeti feltételeinek megfelelően.

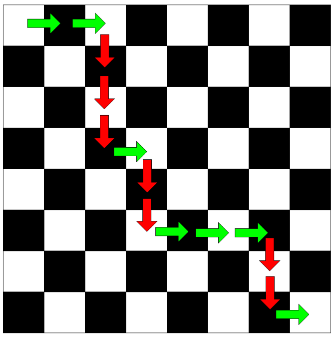
b) Először biztosítsuk azt, hogy a szám „13”-mal kezdődjön! Ezt úgy tehetjük meg, ha az első helyre az egyik egyest, a második helyre pedig az egyik hármast rögzítjük. Ezután a feladat csupán annyi, hogy meghatározzuk, hogy a fennmaradó öt helyre hányféleképpen rendezhetjük el a maradék számjegyeinket, azaz két 1-est, két 2-est és egy 3-ast. Ez az előző feladat gondolatmenetét követve

$$P_5^{2,2,1} = \frac{5!}{2! \cdot 2!}$$

különböző elrendezést jelent.

1.5. Egy 8×8-as sakktábla bal felső mezőjéből indulva hány különböző úton juthatunk el a jobb alsó sarokba, ha minden lépésben egy mezőt jobbra, vagy egy mezőt lefelé lépünk.

1. Megoldás:



Amíg a bal felső sarokból eljutunk a jobb alsó sarokba, addig 7 alkalommal kell jobbra lépnünk egy mezőt és hét alkalommal lefelé egyet. A feladatnak megfelelő utak egyértelműen jellemezhetők azzal, hogy hányadik lépésben lépünk lefelé illetve mikor jobbra. Jelöljük a jobbra-lépéseket $\rightarrow$ jellel és a lefele lépéseket $\downarrow$ jellel. Ezzel a feladatnak megfelelő utakhoz bijektív módon hozzárendelhetünk egy-egy 7 $\rightarrow$-ból és 7 $\downarrow$-ból álló jelsorozatot. Ezek száma pedig

$$P_{14}^{7,7} = \frac{14!}{7! \cdot 7!}$$

2. Megoldás:

A problémát tekinthetjük ismétlés nélküli kombinációnak is. A bal felső sarokból indulva 14 lépésen keresztül juthatunk a jobb alsó sarokba. Az előbb tárgyaltak alapján a 14 lépés között pontosan hét jobbra és pontosan hét lefele típusú lépés szerepel. Egy útvonalat egyértelműen meghatározhatunk, ha kijelöljük azon hét lépés sorszámát, melyek során jobbra mozdultunk el. (Ez nyilvánvalóan meghatározza azon lépések sorszámát is, amelyekben lefele léptünk.) Így a lépések sorszámai közül (1-14-ig) választunk a következő feltételek mellett:

- 14, páronként különböző elem közül választunk,
- 7 elemet választunk,
- visszatevés nélkül választunk,
- a kiválasztás sorrendjére nem vagyunk tekintettel.

Azaz valóban ismétlés nélküli kombinációról van szó, így a különböző kiválasztások (és így a különböző útvonalak) száma:

$$C_{14}^{7} = \binom{14}{7} = \frac{14!}{7! \cdot 7!}.$$

1.6. Számozzunk meg 6 piros és 5 kék korongot!

a) Hányféleképpen rakhatjuk sorba a 11 korongot úgy, hogy azonos színűek ne kerüljenek egymás mellé?

b) Hányféleképpen tehetjük ezt meg akkor, ha a korongok számozásától eltekintünk?

Megoldás:

a) A feladatnak megfelelő sorbarendezések mindegyike piros koronggal kezdődik. Az elrendezésekben felváltva követik egymást a piros és kék korongok és így természetesen az utolsó korong is piros.

Számozott korongok esetén más és más elrendezésnek számít, ha a fenti sorban az azonos színű korongokat más és más sorrendben írjuk. A piros korongokat egymás között cserélgetve 6! különböző sorrendben írhatjuk, míg a kék korongok felcseréléseivel 5! különböző elrendezést hozhatunk létre. Ezeket a változtatásokat egymástól függetlenül megtehetjük, így a szorzási szabály alapján

$$6! \cdot 5!$$

elrendezés felel meg a feladatnak.

b) Amennyiben a korongok számozásától eltekintünk, akkor egyetlen elrendezés – a fenti ábrán látható – felel meg a feltételeknek.

1.7. 6 házaspár (6 férfi és 6 nő) érkezik egy társaságba. Hányféleképpen ülhetnek le

a) egy 12 személyes hosszú padra?

b) egy 12 személyes hosszú padra, ha azonos neműek nem ülhetnek egymás mellé?

c) egy 12 személyes hosszú padra, ha A úr a felesége mellé szeretne ülni?

d) egy 12 személyes hosszú padra, ha mindenki a párja mellé szeretne ülni?

e) egy 12 személyes hosszú padra, ha csak az számít férfiról vagy nőről van-e szó? (Hányféleképpen rakható sorba 6 fehér és 6 fekete golyó?)

f) egy 12 személyes hosszú padra, ha azonos neműek nem ülhetnek egymás mellé és csak az számít férfiról vagy nőről van-e szó?

g) egy kerek asztal körül, ahol 12 egyforma szék van?

h) egy kerek asztal körül, ahol 12 egyforma szék van, ha azonos neműek nem ülhetnek egymás mellé?

i) egy kerek asztal körül, ahol 12 egyforma szék van, ha A úr a felesége mellé szeretne ülni?

j) egy kerek asztal körül, ahol 12 egyforma szék van, ha mindenki a párja mellé szeretne ülni?

k) egy kerek asztal körül, ahol 12 egyforma szék van, ha azonos neműek nem ülhetnek egymás mellé és csak az számít férfiról vagy nőről van-e szó?

A kerekasztal körüli ültetéseket akkor tekintjük különbözőnek, ha van olyan személy akinek a két ültetés során megváltozik a bal vagy a jobb oldal szomszédja. Röviden azt mondhatjuk, hogy két ültetés ekvivalens, ha létezik olyan forgatás, amely az egyiket a másikba viszi. Szokás néha úgy értelmezni a problémát, hogy akkor is ekvivalens a két ültetés, ha tengelyes tükrözéssel vihetők egymásba. (A feladat során nem erre gondoltunk, de akinek van kedve utánagondolhat, mennyiben változik a probléma ilyen körülmények között.)

Megoldás:

a) A kérdés gyakorlatilag az, hányféleképpen lehet sorbarendezni 12 különböző elemet. Ez pedig a korábbiakhoz hasonlóan $P_{12} = 12!$-féleképpen tehető meg.

b) A probléma a 6a feladathoz hasonlóan tárgyalható. Lényeges különbség azonban, hogy itt ugyanannyi férfi és nő található a csoportban. Az előző feladatban páratlan sok elemet kellett úgy sorbarendezni, hogy az azonos típusúak ne kerüljenek egymásmellé. Ott szükségszerűen adódott, hogy a sort abba a tipusba tartozó elemmel kell kezdenünk, amely tipusból eredetileg több elem volt. Itt a két osztályba (férfiak illetve nők) ugyanannyi elem van, így ha mondjuk nővel kezdjük az ületetést, akkor a pad másik szélére biztosan férfi kerül. Ez azt is jelenti, hogy az ültetéseket két csoportba oszthatjuk, aszerint, hogy nővel, vagy férfivel kezdődnek.

Ha az első ember nemét rögzítettük (legyen mondjuk férfi), akkor, a 6a feladathoz hasonlóan a saját osztályon belüli cserék

$$6! \cdot 6!$$

különböző ültetést generálnak. Ne felejtsük el azonban, hogy ugyanennyi ültetést tudunk előállítani akkor is, ha a sort nővel kezdjük. Így az összes ültetések száma:

$$2 \cdot 6! \cdot 6!$$

c) Jelöljük A úr feleségét a-val. Azt, hogy ők egymásmellé kerüljenek a legkönnyebben úgy biztosíthatjuk, ha őket egyetlen elemnek tekintjük. Így 11 elem összes elrendezéseit kell meghatároznunk. Ez $P_{11} = 11!$ különböző ültetést jelent. Minden egyes esethez, amelyet az előbb összeszámoltunk két valódi ültetés tartozik aszerint, hogy A úr felesége a férje jobb, vagy baloldalán ül-e. (Aa vagy aA eset.) Így az összes lehetőségek száma:

$$2 \cdot 11!$$

d) Az előző gondolatmenethez hasonlóan 6 darab „dupla" elemet készítünk („Aa", „Bb", „Cc",...) Ekkor 6 elem ismétlésnélküli permutációival találjuk szemben magunkat. Ezekből 6! van. De most is figyelmen kívül hagytuk azt, hogy az egyes párokon belül milyen sorrendben ülnek a tagok. Ez minden pár esetén egy 2-es faktort jelent. Így az összes lehetőségek száma, a szorzási szabály alapján

$$2^6 \cdot 6!$$

e) Induljunk ki az összes lehetséges ültetésekből. Ezek számát a feladat a) részében már meghatároztuk (12!). Ha most csak a résztvevők nem az érdekes, az identitásuktól eltekintünk, akkor az eredeti összeszámlálás során különböző eseteknek számolt ültetések valójában megkülönböztethetetlenek. Könnyen látható, hogy itt csak egy esetnek számít minden olyan a) feladatbeli ültetés, amelyek azonos nemüek cseréjével egymásba vihető. Az ilyen összetartozó elrendezések száma $6! \cdot 6!$, azaz az itt különbözőnek tekintett ültetések száma:

$$\frac{12!}{6! \cdot 6!}$$

f) A feladat a 6b feladthoz hasonlóan oldható meg. Itt is figyelnünk kell arra, hogy a páros elemszám miatt az ültetés kezdődhet akár nővel, akár férfivel. Így két különböző ültetés felel meg a feltételeknek.

g) A problémának két megközelítését szokás alkalmazni.

1. mo

Számozzuk meg a székeket, ezzel megkülönböztetjük egymástól a helyeket, így 12 elem sorbarendezéseit kell vizsgálnunk. Ezután vegyük figyelembe a forgási szimmetriát. Ha a helyeket újra egyformának tekintjük akkor azok az esetek, amelyek valamely 2π szögnél kisebb forgatással, (az irány a feladat szempontjából érdektelen) egymásba vihetők nem jelentenek különböző ültetést. Ezáltal osztályozhatjuk az ültetéseket. Kerüljenek egy osztályba azok az esetek, amelyek a fenti feltételnek megfelelő forgatással származtathatók egymásból. Könnyen látható, hogy minden osztályba pontosan 12 ültetés tartozik. Így az osztályok száma, ami megegyezik a kerekasztal körüli különböző ültetések számával:

$$\frac{12!}{12} = 11!$$

2. mo

Az első embert ültessük le az asztalhoz (A urat). A forgási szimmetria miatt gyakorlatilag mindegy, hogy melyik székre ül. Ezután az asztal minden széke különbözőnek tekinthető, hiszen más és más pozicióban vannak A úrhoz képest. Így 11 különböző helyre kell 11 különböző elemet elhelyeznünk. Ez pedig az ismert formula alapján 11!-féleképpen tehető meg.

h) Ültessük le most is az első személyt, A urat az asztalhoz. Az előzőekhez hasonlóan most 11 különböző helyünk van, melyre 6 nőt és 5 férfit kell leültetnünk úgy, hogy azonos neműek ne kerüljenek egymásmellé (azaz felváltva). Ez nyilvánvalóan csak úgy tehető meg, ha a sort hölggyel kezdjük és fejezzük is be. A feladat innentől teljesen azonos a 6a feladattal. (A férfiaknak felelnek meg a kék korongok, a nőknek a pirosak.) Így az összes lehetséges ültetések száma

$$5! \cdot 6!$$

i) **1. mo**

„Kössük össze” A urat a feleségével, azaz készítsünk egy speciális Aa elemet. Majd az így keletkező 11 elemünket (10 hagyományos elem és az A családot jelképező dupla elem) rendezzük el egy „11-székes” kerekasztal körül. Ez az előbbiek alapján 10!-féleképpen tehető meg. Ne felejtsük el azonban most sem, hogy a dupla elemünkön belül 2-féle ülési sorrend lehetséges. Így az összes elrendezések száma:

$$2 \cdot 10!$$

2. mo

Először ültessük A urat az asztalhoz, mivel a helyek egyenértékűek, gyakorlatilag mindegy melyik székre ül. Ezzel azonban a maradék 11 hely mindegyike különbözőnek tekintehető A úr székéhez viszonyított helyzetétől függően.

A úr felesége (a) a férjéével szomszédos két szék bármelyikére ülhet. (2 lehetőség)

A maradék 10 székre a többiek 10!-féleképpen ülhetnek le. (a mindkét pozíciójához ilymódon a többieknek 10! lehetséges elhelyezkedése tartozik.)

Az összes ültetések száma tehát $2 \cdot 10!$

j) Most 6 dupla elemet kell készítenünk. Ezek a kerekasztal körül 5!-féleképpen helyezkedhetnek el. Minden páron belül kétféleképpen ülhetnek a tagok. Így a szorzási szabály alapján az összes elrendezések száma:

$$2^6 \cdot 5!$$

k) A h) feladat megoldása során már végiggondoltuk ezt a problémát és arrajutottunk, hogy egyetlen elrendezés felel meg a feltételeknek.

1.8. Adott n páronként különböző elem. Két egymástól és az eddigiektől különböző elemet hozzájuk véve a permutációk száma 156-szorosra nő. Mekkora n értéke?

Megoldás:

A feladatban megfogalmazott állítás az alábbi alakban írható:

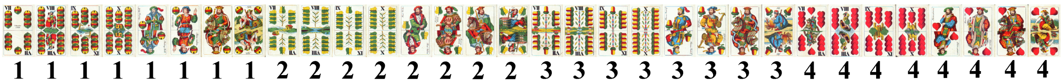
$$\begin{aligned}
156 \cdot P_n &= P_{n+2} \\
156 \cdot n! &= (n+2)! = (n+2)\cdot(n+1)\cdot n! \\
156 &= (n+2)\cdot(n+1) \\
0 &= n^2+3n-154 = (n+14)\cdot(n-11)
\end{aligned}$$

Mivel az $n=-14$ megoldás értelmetlen, ezért az egyetlen megoldás $n=11$.

1.9. Hányféleképpen oszthatunk szét egy pakli magyar kártyát (32 lap) 4 játékosnak úgy, hogy mindegyikük 8-8 lapot kapjon?

1. Megoldás:

Rakjuk ki a kártyákat egymás mellé és írjuk alá, hogy melyik játékosnak adtuk (1; 2; 3; 4).



Így minden, a feladat feltételeinek megfelelő kiosztáshoz egy olyan 32 hosszúságú számsorozat rendelhető, amely pontosan 8 1-est, 8 2-est, 8 3-mast és 8 4-est tartalmaz. Tehát pontosan annyi kiosztás létezik, amennyi ismétléses permutációja van a jellemzett szám-harminckettesnek:

$$P_{32}^{8,8,8,8} = \frac{32!}{8!\cdot 8!\cdot 8!\cdot 8!}$$

A feladatra még visszatérünk.

1.10. Az úszás döntőbe 8-an jutottak be. Hányféle lehet a dobogós helyek elosztása, ha feltételezzük, hogy nem volt holtverseny?

Megoldás:

Jelöljük a 8 döntőbe jutott versenyzőt az ABC betűivel: A; B; C; D; E; F; G; H. Ekkor az első helyezett 8 személy közül kerülhet ki, a második helyezettre már csak 7 versenyző közül választhatunk (aki első lett itt már nem jön számításba), a harmadik helyre már csak 6 lehetőség van, hiszen az első két helyezett itt már nem futhat be.

Így $V_8^3 = 8\cdot 7\cdot 6$ féle sorrend lehet a dobogón.

Természetesen most is ábrázolhatnánk a lehetőségeket fa-gráfon.

1.11. Az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számjegyekből, hány különböző

a) háromjegyű szám képezhető,

b) háromjegyű páros szám képezhető,

c) szám képezhető,

ha minden számjegy legfeljebb egyszer használható fel?

Megoldás:

a) Az egyesek helyére 6 számjegy közül választhatunk. A tízeseket már csak 5 közül, míg a százasokhoz már csak 4 jegy marad. Így a szorzási szabály alapján

$$V_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4$$

háromjegyű szám készíthető.

b) Ha páros számokat szeretnénk generálni, akkor az utolsó jegyet a három páros számjegy közül $(2;4;6)$ kell választani. A másik két helyiértéket az a) feladathoz hasonlóan választhatjuk. Így az összes előállítható páros szám:

$$3 \cdot 5 \cdot 4.$$

c) A probléma legegyszerűbben diszjunkt esetekre való szétválasztással tárgyalható. Azaz összeszámoljuk, hogy hány pontosan egyjegyű, pontosan kétjegyű és így tovább, végül hány pontosan hatjegyű szám képezhető a megadott jegyekből.

egyjegyű számok: 6 db

kétjegyű számok: Az előző feladatokhoz hasonlóan: $6 \cdot 5$ db

háromjegyű számok: $6 \cdot 5 \cdot 4$ db

négyjegyű számok: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ db

ötjegyű számok: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ db

hatjegyű számok: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ db

Az összeadási szabályt alkalmazhatjuk, így összesen:

$$6 + 30 + 120 + 360 + 720 + 720 = 1956$$

szám képezhető.

1.12. Az 0; 1; 2; 3; 4; 5 számjegyekből, hány különböző

a) háromjegyű szám képezhető,

b) háromjegyű páros szám képezhető,

c) szám képezhető,

ha minden számjegy legfeljebb egyszer használható fel?

Megoldás:

A feladat az előző problémától annyiban különbözik, hogy a felhasználható számjegyek között most szerepel a 0 is. Ez a látszólag apró eltérés a megoldás menetét komolyan befolyásolja, hiszen ügyelnünk kell arra, hogy az előállított szám nem kezdődhet 0-val.

a) A permutációknál megismert kétféle megközelítés alkalmazható itt is.

1. mo

A százasok helyén 5 számjegy közül választhatunk (mivel a 0-t nem írhatjuk ide). A tízesek helyén ismét 5 lehetőségünk van, hiszen a százasok között választott jegyet nem írhatjuk, de helyette használható a 0. Az utolsó helyiértékre a megmaradt 4 számjegy közül lehet választani. Így a szorzási szabály alapján

$$5^2 \cdot 4$$

„valódi” háromjegyű szám állítható elő

2. mo Vegyük az összes harmadosztályú ismétlésnélküli permutáció számát, majd vonjuk ki azok számát, amelyek 0-val kezdődnek.

Az összes előállítható legfeljebb háromjegyű szám (bent vannak a 0-val kezdődők is):

$$V_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4$$

A 0-val kezdődő háromjegyű számok úgy állíthatók elő, hogy a szások helyén rögzítem a 0 jegyet, majd a fennmaradó 5 számjegyből kétjegyű számokat készítek:

$$V_5^2 = 5 \cdot 4$$

Így a „valódi” háromjegyű számok száma:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 5 \cdot 5 \cdot 4.$$

b) Ha páros számokat szeretnénk generálni, akkor az utolsó jegyet a három páros számjegy közül $(0; 2; 4)$ kell választani. Érdemes az eseteket különválasztani aszerint, hogy az utolsó helyre 0-t írtunk-e. (Ha 0 áll az utolsó helyiértéken, akkor nem kell azzal foglalkozni, hogy „valódi” háromjegyű számot állítsunk elő, hiszen ez automatikusan teljesül.)

0-ra végződik:

Az egyesek helyén a 0-t rögzítjük a tízesek helyére ekkor 5, míg a százasok helyére 4 jegy közül választhatunk. Így $5 \cdot 4$ ilyen szám állítható elő.

nem -ra végződik:

Az egyesek helyén a 2 jegy közül választhatunk $(2; 4)$ a százasok helyére 4 (nem választható a már elhasznált jegy és a 0 sem), míg a tízeseket 4 jegy közül lehet választani. Így $2 \cdot 4 \cdot 4$ ilyen szám állítható elő.

Az összeadási szabály alapján:

$$5 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 4 = 4 \cdot 13 = 52$$

a feltételeknek megfelelő szám állítható elő.

c) **1. mo**

A probléma az előző feladat c) részéhez hasonlóan tárgyalható, csak itt figyelnünk kell arra, hogy a számok ne kezdődjenek 0-val (kivéve az egyjegyű számokat).

egyjegyű számok: 6 db

kétjegyű számok: Az előző feladatokhoz hasonlóan: $5 \cdot 5$ db

háromjegyű számok: $5 \cdot 5 \cdot 4$ db

négyjegyű számok: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ db

ötjegyű számok: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ db

hatjegyű számok: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ db

Az összeadási szabályt alkalmazhatjuk, így összesen:

$$6 + 25 + 100 + 300 + 600 + 600 = 1631$$

szám képezhető.

2. mo Az előző feladatban előállított 1956 szám $\frac{1}{6}$-a kezdődik 1-essel, $\frac{1}{6}$-a 2-essel, és így tovább. Ha a 6-os jegyet 0-ra cseréljük, ahogy az a feladat kiírásában szerepel, akkor azt állíthatjuk, hogy éppen az esetek $\frac{1}{6}$-a kezdődik 0-val. Ezek a „hibás" számok és a 0. Így a feladat feltételeinek megfelelően előállítható számok száma:

$$\frac{5}{6}\cdot 1956+1=1631.$$

1.13. Az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számjegyekből, hány különböző

a) háromjegyű szám képezhető,

b) háromjegyű páros szám képezhető,

c) legfeljebb háromjegyű szám képezhető,

ha a számjegyek többször is felhasználhatók?

Megoldás:

A feladat megoldása a 11. feladatéhoz meglehetősen hasonló. Figyelnünk kell arra, hogy itt az egyes számjegyek többször is felhasználhatók. (Ha a klasszikus esetek közé szeretnénk sorolni a problémát, itt ismétléses variációt kell alkalmazni.)

a) Az összes helyiértékre a rendelkezésre álló 6 számjegy bármelyike beírható. Így a szorzási szabály alapján
$$\overline{V}_6^3=6^3$$
háromjegyű szám készíthető.

b) Ha páros számokat szeretnénk generálni, akkor az utolsó jegyet a három páros számjegy közül $(2;4;6)$ kell választani. A másik két helyiértéket az a) feladathoz hasonlóan választhatjuk. Így az összes előállítható páros szám:
$$3\cdot 6^2.$$

c) A probléma legegyszerűbben diszjunkt esetekre való szétválasztással tárgyalható. Azaz összeszámoljuk, hogy hány pontosan egyjegyű, pontosan kétjegyű és végül hány pontosan hatjegyű szám képezhető a megadott jegyekből.

egyjegyű számok: 6 db

kétjegyű számok: Az előző feladatokhoz hasonlóan: 6^2 db

háromjegyű számok: Az előző feladatokhoz hasonlóan: 6^3 db

Az összeadási szabályt alkalmazhatjuk, így összesen:
$$6+6^2+6^3=258$$
szám képezhető.

Megjegyzés: Általánosan, pontosan k-jegyű számot 6^k darabot tudunk generálni. Így a legfeljebb n-jegyű számok száma az összeadási szabályt alkalmazva:
$$\sum_{k=1}^{n}6^k=\frac{6\cdot(6^n-1)}{5}.$$

1.14. Az 0; 1; 2; 3; 4; 5 számjegyekből, hány különböző

a) háromjegyű szám képezhető,

b) háromjegyű páros szám képezhető,

c) legfeljebb háromjegyű szám képezhető,

ha a számjegyek többször is felhasználhatók?

Megoldás:

a) Az első helyre a 0 kivételével bármelyik számjegy írható, így 5 lehetőség közül választhatunk. A többi helyiértéket a 6 számjegy bármelyikével kitölthetjük, így az összes lehetőségek száma:
$$5 \cdot 6^2$$

b) Az első helyre a 0 kivételével bármelyik számjegy írható (5 lehetőség), míg az utolsó jegyet csak a páros számjegyek közül választhatom (3 lehetőség). A tízesek helyére bármely számjegy beírható (6 lehetőség). Így, a szorzási szabály alapján összesen
$$5 \cdot 3 \cdot 6 = 90$$
szám állítható elő.

c) **1. mo**
A korábbi feladatokhoz hasonlóan.
Pontosan egyjegyű szám 6 darab állítható elő.
Pontosan kétjegyű szám $5 \cdot 6$ darab,
pontosan háromjegyű szám $5 \cdot 6^2$ darab.
Így legfeljebb háromjegyű számot a fenti diszjunkt esetek egyesítésével kaphatunk. Az összeadási szabály szerint
$$6 + 30 + 180 = 216$$
különböző szám állítható elő.
2. mo
A „valódi” kétjegyű számok felfoghatók olyan háromjegyű számokként, melyeknek az első jegye 0. És hasonlóan az egyjegyű számok felfoghatók olyan háromjegyű számokként, melyeknek az első két helyiértéken (százasok, tízesek) 0 áll. Így az összes legfeljebb háromjegyű szám úgy generálható, hogy nem zárjuk ki a 0-val kezdődő számokat. Így
$$\overline{V}_6^3 = 6^3.$$
különböző számot tudunk előállítani. Természetesen szerepel a 0 is, amit most 000 alakban készítettünk el.

Megjegyzés: A fentiekkel teljesen analóg problémára vezet, ha megpróbálunk válaszolni arra a kérdésre, hogy egy adott számrendszerben (ha külön nem hangsúlyozzuk, akkor a 10-es számrendszerben vizsgálódunk) hány, bizonyos feltételnek megfelelő k- jegyű szám van.

1.15. Hányféleképpen olvasható ki az alábbi ábrából a $MATBSC$ „szó”, ha a bal felső sarokban található M betűből indulunk és minden lépésben jobbra, vagy lefelé lépünk egy mezőt:

$$\begin{array}{cccccc} M & A & T & B & S & C \\ A & T & B & S & C & \\ T & B & S & C & & \\ B & S & C & & & \\ S & C & & & & \\ C & & & & & \end{array}$$

Megoldás:

$$\begin{array}{cccccc}
M & A & T & B & S & C \\
A & T & B & S & C & \\
T & B & S & C & & \\
B & S & C & & & \\
S & C & & & & \\
C & & & & &
\end{array}$$

A szó kiolvasásához 5 lépés szükséges. Minden lépés során két lehetőség közül választhatunk (vagy jobbra lépünk, vagy lefelé). Minden a feladat feltételeinek megfelelő kiolvasási-úthoz bijektív módon hozzárendelhetünk egy 5 karakterből álló jelsorozatot, amely $\rightarrow$ és $\downarrow$ elemekből épül fel. Ilyen jelsorozatot $\overline{V}_2^5 = 2^5$-féleképpen tudunk készíteni.

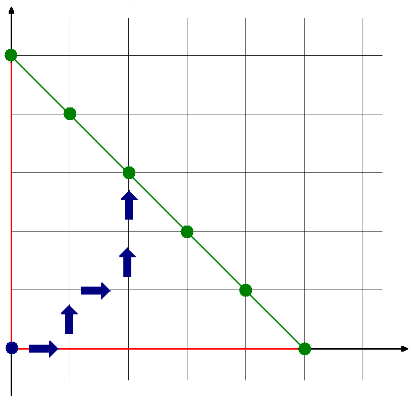
1.16. Az origóból indulva hányféleképpen juthatunk el az $e\colon\ y = -x + 5$ egyenes egész-koordinátájú pontjaiba, ha az alábbi szabályok alapján haladunk:

i) Minden lépés során pozíciónk x és y koordinátái közül pontosan az egyiket változtatjuk meg, méghozzá eggyel növeljük.

ii) Nem lépjük át az e egyenest (és a tengelyeket sem, de ez az első feltételből nyilvánvaló).

Megoldás:

A feladat az előző probléma analogonja.



Minden helyes út pontosan 5 lépésből áll. Minden lépés során két lehetőség közül választhatunk (vagy jobbra lépünk, vagy felfelé). Minden a feladat feltételeinek megfelelő úthoz bijektív módon hozzárendelhetünk egy 5 karakterből álló jelsorozatot, amely $\rightarrow$ és $\uparrow$ elemekből épül fel. Ilyen jelsorozatot $\overline{V}_2^5 = 2^5$-féleképpen tudunk készíteni.

1.17. n elem 3-adosztályú ismétléses és ismétlésnélküli variációinak aránya $9:5$. Mekkora n értéke?

Megoldás:

Írjuk fel a feladat feltételeit:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{V}_n^3}{V_n^3} &= \frac{9}{5} \\
\frac{n^3}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)} &= \frac{9}{5} \\
5n^3 &= 9n\cdot(n-1)\cdot(n-2) \quad n\neq 0 \\
5n^2 &= 9n^2-27n+18 \\
0 &= 4n^2-27n+18 \\
0 &= (4n-3)\cdot(n-6) \\
n_1 &= \frac{3}{4}\notin\mathbb{N} \quad \text{értelmetlen} \\
n_2 &= 6
\end{aligned}$$

1.18. Hány hagyományos TOTÓ szelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen egy telitalálatunk?

Megoldás:

A telitalálatot úgy tudjuk garantálni, ha az összes lehetséges kitöltést játékba küldjük. Így a feladat kérdése tulajdonképpen az, hányféleképpen tölthető ki a hagyományos totó-szelvény. Az egyszerűség kedvéért tekintsük úgy, hogy a totó-szelvényen 14 mérkőzés kimenetelét kell eltalálnunk, azaz 14 helyre kell a rendelkezésünkre álló három jel (1; 2; x) valamelyikét beírni. Ez pedig 3^{14}-féleképpen tehető meg. Így a biztos telitalálathoz ennyi szelvény megvásárlása és kitöltés szükséges.

Megjegyzés:

- Természetesen a fenti módon nem csak a telitalálatot tudjuk biztosítani. Emellett 28 szelvényen lesz 13 találatunk, 364-en 12 találatunk és így tovább. A probléma részletes meggondolására a jövő órán, a kombinációk tárgyalása során visszatérünk.
- Még mielőtt bárki azt hinné, hogy a meggazdagodás gyors receptjét kaptuk meg, gondoljunk bele, hogy a szelvények árának befizetésén túl – ami önmagában elég lenne ahhoz, hogy ne érje meg így játszani – ki is kellene töltenünk 3^{14} darab szelvényt. Ha egy szelvény kitöltésére 14 másodpercet számolunk, akkor a kitöltéshez szükséges idő:

$$1116026{,}1 \text{ perc} = 18600{,}435 \text{ óra} = 775{,}018125 \text{ nap},$$

ami több mint 2 év.

1.19. Hány olyan pozitív egész szám van, amely nem osztható 1-nél nagyobb négyzetszámmal, sem 10-nél nagyobb prímszámmal?

Megoldás:

A feladat feltételeinek megfelelő számok prímtényezős felbontása a következő alakú:

$$n = 2^{k_1}\cdot 3^{k_2}\cdot 5^{k_3}\cdot 7^{k_4} \quad k_i\in\{0,\ 1\} \quad i=1,\ldots,4.$$

Ekkor a számok előállítása egyenértékű a fenti 4 kitevő kiválasztásával. Azaz 4 helyre kell a $0;1$ szimbólumok valamelyikét beírni. Megintcsak egy ismétléses variációval van dolgunk. Az összesen tehát

$$\overline{V}_2^4 = 2^4$$

szám állítható elő a feltételeknek megfelelően.

1.20. Egy pakli magyar kártyából hányféleképpen adhatunk egy játékosnak 8 lapot?

Megoldás:

32 lap közül szeretnénk 8-at kiválasztani úgy, hogy a sorrendre nem vagyunk tekintettel.

1. lépés

Először válasszunk 8 lapot és tekintsünk különbözőnek két kiválasztást akkor is, ha csak a kiválasztott lapok sorrendjében különböznek. Ez a múlt órán tárgyalt ismétlésnélküli variáció témakör egy típus-feladatára vezet. Így az ismert formula alapján az ilyen kiválasztások száma:

$$V_{32}^{8}=32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25=\frac{32!}{24!}=\frac{32!}{(32-8)!}$$

2. lépés Ekkor azonban egyes leosztásokat többször is összeszámoltunk, hiszen a játékos szempontjából teljesen érdektelen, hogy a kezében lévő lapokat milyen sorrendben kapta. Egy-egy a feladat kiírása alpján azonosnak tekintet leosztást pontosan annyiszor számoltunk meg, ahányféleképpen a játékos kezében lévő 8 különböző lapot sorba lehet rakni. Ezen sorbarendezések szám $P_8=8!$. Könnyen látható, hogy minden ténylegesen különböző leosztást pontosan ennyiszer számoltunk meg, ahelyett, hogy csak egyszer vettük volna figyelembe. Így ha a kiosztás sorrendjétől el szeretnénk tekinteni, akkor ezzel az értékkel kell elosztani az első lépésben kapott eredményünket:

$$C_{32}^{8}=\frac{V_{32}^{8}}{P_8}=\frac{32!}{(32-8)!\cdot 8!}=\binom{32}{8}$$

1.21. Hányféleképpen oszthatunk szét egy pakli magyar kártyát (32 lap) 4 játékosnak úgy, hogy mindegyikük 8-8 lapot kapjon?

Megoldás:

Ezt a problémát már tárgyaltuk az ismétléses permutációk témakörben (9. feladat). Az akkor kapott eredményünk:

$$P_{32}^{8,8,8,8}=\frac{32!}{8!\cdot 8!\cdot 8!\cdot 8!}.$$

Most az előző feladat ötlete alapján induljunk el. Először válasszuk ki azt a 8 lapot, amit az 1-es játékos kap. Ez az előbb tárgyalt gondolatmenet miatt $\binom{32}{8}$-féleképpen lehetséges. Majd a megmaradt $32-8=24$ lap közül válasszuk ki azt a 8-at, amit a 2-es játékos kap, majd a 3-as játékosnak válasszunk 8-at a maradék 16 lap közül, végül a 4-es játékosnak választunk 8-at a maradék 8-ból (vagyis az összes megmaradt lapot nekiadjuk). Ezeket a lehetőségeket a szorzási szabály alapján kapcsoljuk össze, így az összes lehetséges kiosztás száma:

$$\binom{32}{8}\cdot\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}\cdot\binom{8}{8}=\frac{32!}{24!\cdot 8!}\cdot\frac{24!}{16!\cdot 8!}\cdot\frac{16!}{8!\cdot 8!}\cdot 1=\frac{32!}{8!\cdot 8!\cdot 8!\cdot 8!}.$$

1.22. Egy kalapban különböző számkártyák vannak, 1-től 15-ig számozva. A kalapból visszatevés nélkül húzunk 5-öt. Hány esetben lesznek a kihúzott elemek növekvő sorrendben?

Megoldás: Összesen $V_{15}^{5}=15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11$-féle lehet a húzás eredménye. Ebben persze benne vannak azok is amelyeknél nem növekvő sorrendben vannak az elemek. Osztályozzuk a kiválasztásokat a kiválasztott elemek szerint, azaz kerüljenek egy osztályba azok az esetek, amelyekben ugyanazon elemeket választottuk, csak más-más sorrendben. Könnyen látható, hogy osztályonként pontosan egy kiválasztás tesz eleget a feladat feltételeinek. Másrészt a fenti osztályok mindegyike megfeleltethető az 1; 2; ...; 15 elemek egy-egy ötödosztályú, ismétlésnélküli kombinációjának. Így az osztályok száma

$$C_{15}^{5} = \binom{15}{5}.$$

Megjegyzés: Az $1; 2; \ldots; n$ elem ismétlésnélküli kombinációnak felírása során az elemeket általában növekvő sorrendben szokás írni.

1.23. Egy dobozban 500 csavar van, melyek közül 10 darab selejtes. Hányféleképpen választhatunk ki 15 csavart úgy hogy 6 selejtes legyen köztük? És hogy legyen köztük 6 selejtes? (Az első kérdés úgy fogalmazható meg másként, hogy pontosan 6 selejtes, a második pedig, hogy legalább 6 selejtes legyen a kiválasztott csavarok közt.)

Megoldás:

a) Pontosan 6 selejtes lesz a kiválasztott 15 csavar között, ha a választást a következő módon végezzük. Először választunk 6-ot a 10 selejtes csavar között, majd $15-6=9$-et a 490 „jó” csavar közül. Az előbbit $\binom{10}{6}$, míg az utóbbit $\binom{490}{9}$-féleképpen lehet megtenni. A szorzási szabály alapján a feladat feltételeinek megfelelő kiválasztások száma tehát:

$$\binom{10}{6} \cdot \binom{490}{9}.$$

b) Legalább 6 selejtes csavart húzunk az alábbi diszjunkt esetek mindegyikében:

pontosan 6 selejtes: $\binom{10}{6} \cdot \binom{490}{9}$ pontosan 9 selejtes: $\binom{10}{9} \cdot \binom{490}{6}$

pontosan 7 selejtes: $\binom{10}{7} \cdot \binom{490}{8}$ pontosan 10 selejtes: $\binom{10}{10} \cdot \binom{490}{5}$

pontosan 8 selejtes: $\binom{10}{8} \cdot \binom{490}{7}$

Az összeadási szabály alapján ezen esetekhez tartozó lehetőségek összege adja a feladatnak megfelelő kiválasztások számát:

$$\binom{10}{6} \cdot \binom{490}{9} + \binom{10}{7} \cdot \binom{490}{8} + \binom{10}{8} \cdot \binom{490}{7} + \binom{10}{9} \cdot \binom{490}{6} + \binom{10}{10} \cdot \binom{490}{5}.$$

1.24. Egy csomag francia kártya 52 lapból áll, amelyek közül 13-13 azonos színű. (A lapok értékei $2, \ldots, 10$, J, Q, K, A).

a) Hányféleképpen választhatunk ki közülük 4, páronként különböző színű lapot?

b) Hányféleképpen választhatunk ki közülük 4 különböző színű lapot, ha még azt is megköveteljük, hogy ne legyen köztük két azonos értékű?

c) Hányféleképpen választhatunk ki a kártyacsomagból 4 lapot úgy, hogy legyen köztük legalább két ász?

Megoldás:

a) A feladat tulajdonképpen az, hogy mind a négy színből válasszunk egyet-egyet. Bontsuk a kártyacsomagot 4 kis paklira, méghozzá színenként. Ekkor minden kupacból egyet-egyet kell húznunk. Ez a korábbiak alapján

$$\binom{13}{1}^4 = 13^4\text{-féleképpen tehető meg.}$$

Megjegyzés: A feladat felfogható általánosított ismétléses variációként is. Azért került mégis ebbe a témakörbe, mert a kombinációk jóval általánosabb tárgyalást tesznek lehetővé.

b) Az előző feladat gondolatmenetét követve megint szinenként választunk egyet-egyet. Így az első lap választására most is $\binom{13}{1}$ lehetőségünk van. A második lap választásakor az első lappal azonos értékű lapot ki kell hagynunk, így már csak 12 lap közül választunk, amire $\binom{12}{1}$ lehetőségünk van. És így tovább... Összesen tehát

$$\binom{13}{1}\cdot\binom{12}{1}\cdot\binom{11}{1}\cdot\binom{10}{1} = 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10.$$

c) Most is bontsuk kis kupacokra a kártyánkat. Az egyikbe kerüljön a 4 ász, a másikba pedig a többi lap. A húzást úgy végezzük, hogy először választunk az ászok közül, majd a többi lap közül. A feltételnek (legalább két ász legyen a kiválasztottak között) az alábbi diszjunkt esetek felelnek meg.

pontosan 2 ász: $\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{2}$

pontosan 3 ász: $\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{1}$

pontosan 4 ász: $\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{0}$

Így az összeadási szabály alapján:

$$\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{2}+4\cdot 48+1$$

lehetőség van a kiválasztásra.

1.25. Hányféle lyukasztás állítható be a buszjegy-lyukasztón, ha a szerkezet legalább 2, de legfeljebb 4 számot lyukaszt ki a 9 közül?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Megoldás:

Bontsuk a lyukak száma alapján diszjunkt esetekre a problémát. Két lyukat $\binom{9}{2}$, három lyukat $\binom{9}{3}$, míg 4 lyukat $\binom{9}{4}$-féleképpen lehet lyukasztani. Így a lehetőségek száma az összeadási szabály alapján

$$\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}=246.$$

1.26. A fenti elrendezésű buszjegyekből szeretnénk összegyűjteni egy készletet, mellyel az előző feltételekkel beállított lyukasztóknál biztosra mehetünk, azaz mindig találunk egy olyan jegyet, amely vagy jó, vagy azt állíthatjuk róla, hogy fordítva helyeztük a készülékbe. Hány jegyre van szükségünk?

Megoldás:

Az előző feladat alapján 246 jegy biztosan elég lenne. Nézzük, mennyit tudunk a „trükkünkkel” spórolni. A lyukasztások között vannak szimmetrikusak, ezeket csak egyszer tudjuk használni, míg vannak aszimmetrikusak, melyek két lyukasztó-beállítás esetén is jók. Az ötlet az lehet, hogy az aszimmetrikus lyukasztások közül elegendő csak minden másodikat megtartani. A szimmetrikus eseteket valamivel könnyebb összeszámolni. Kezdjük ezzel a feladat megoldását.

2 lyuk esetén:

Vagy mindkét lyuk a középső oszlopban van ($\binom{3}{2}=3$ lehetőség), vagy az egyik lyuk a jobboldali oszlopban van, míg a másik a baloldali oszlopban. Könnyen látható, hogy ahhoz, hogy a szimmetriai feltételnek megfeleljen a lyukasztás, a második lyuk helye már nem választható tetszőlegesen, hiszen ugyanabban a sorban kell elhelyezkednie, amelyben az első lyuk is van. Ilyen lyukasztásból $\binom{3}{1}=3$ darab van.

Szimmetrikus lyukasztások 2 lyuk esetén: $3+3=6$.

3 lyuk esetén:

Vagy mindhárom lyuk a középső oszlopban van ($\binom{3}{3}=1$ lehetőség), vagy az egyik lyuk a jobboldali oszlopban, a másik a középsőben, míg a harmadik a baloldali oszlopban. A szimmetriai feltétel miatt az utolsó lyuk helye már nem választható tetszőlegesen, hiszen ugyanabban a sorban kell elhelyezkednie, amelyben az első lyuk is van. Ilyen lyukasztásból $\binom{3}{1}\cdot\binom{3}{1}=9$ darab van.

Szimmetrikus lyukasztások 3 lyuk esetén: $1+9=10$.

4 lyuk esetén:

Vagy 2 lyuk van a középső oszlopban (és ekkor egy-egy a jobb illetve a baloldali oszlopban), vagy egy sincs és ekkor két-két lyuk van a szélső oszlopokban. Az előbbi típusból a korábbi indoklás miatt $\binom{3}{1}\cdot\binom{3}{2}=9$, az utóbbiból pedig $\binom{3}{2}=3$ darab jegy található.

Szimmetrikus lyukasztások 3 lyuk esetén: $9+3=12$.

Összes szimmetrikus elhelyezkedések száma: 28. Ezek azok a lyukasztások, amelyekhez egy-egy jegyre mindenképpen szükség van.

Az aszimmetrikus lyukasztások száma pedig $246-28=218$. Ezekhez feleennyi (109) jegy is elég.

Így összesen 137 jegyre van szükségünk.

1.27. 18 egyforma 10 forintost osztunk szét 4 gyerek között.

a) Hányféle módon tehetjük ezt meg?

b) Hány eset van akkor, ha kikötjük, hogy minden gyerek kapjon legalább egyet?

Megoldás:

a) **1. mo:**
Minden pénzérme alá írjuk oda, hogy melyik gyerek kapta (1, 2, 3, 4 jelek valamelyikét). Mivel az érmék darabszáma érdekes csak a feladat szempontjából, az előbbi jelsorozatot rendezzük növekvő sorrendbe:

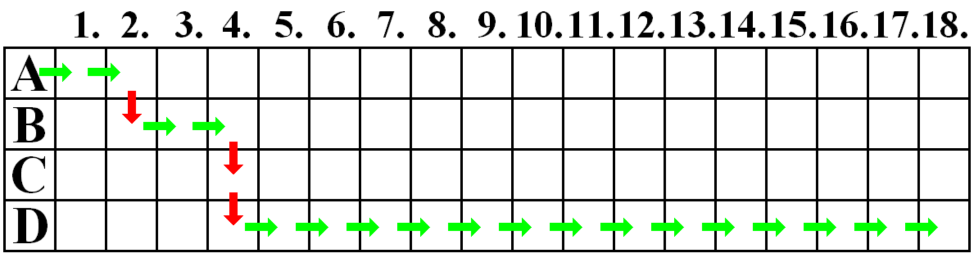
Sorszámozzuk be az érméket 1-től 18-ig, majd adjuk össze az érme sorszámát és az érme alatti jelet. Könnyen látható, hogy ekkor
-Minden érme alatt más-más szám áll
-Az értékekre $2 \leq k \leq 18+4=22$
Azaz 21 elem ismétlésnélküli 18-adosztályú kombinációját kaptuk $\binom{21}{18}$

2. mo:
A 10 forintosokat válasszuk el egymástól vonalakkal. Az első vonal előtti érméket az 1-es gyerek kapja stb. az utolsó vonal utániakat a 4-edik gyerek. Ekkor 18 érme és a 3 választóvonal minden különböző elrendezéséhez az érmék egy kiosztása rendelhető (és viszont), így a keresett érték $\overline{C}_4^{18} = P_{21}^{3,18} = \frac{21!}{18!\cdot 3!}$

(Az ábrán látható elrendezés annak az esetnek felel meg, amikor az első és a második gyerek 20-20 forintot kap, a harmadik gyerek nem kap semmit, a negyedik pedig megkapja a maradék 140 forintot.)

3. mo:
Feleltessük meg egy táblázat sorait a gyerekeknek és az oszlopait a 10 forintosoknak. A k-adik gyerek sorában lépjünk annyit jobbra, ahány tízforintost kapott, majd lépjünk egyet lefelé. Kérdés, hogy hányféleképpen juthatunk el az első sor „nulladik" helyéről a negyedik sor 18-dik mezőjébe.

A feladattal már találkoztunk az korábban (5. feladat). Itt 18 jobbralépés és 3 lefele lépés elrendezéseut vizsgáljuk. Így a lehetőségek száma: $P_{21}^{3,18} = \frac{21!}{18!\cdot 3!}$.



b) A feladat megoldása nem különbözik lényegében az előző részétől. Mindenekelőtt érdemes biztosítani az új feltétel teljesülését. Ezt a legkönnyebben úgy tehetjük meg, ha minden gyereknek az elosztás előtt adunk egy-egy 10 forintost. Ezután a megmaradt érméket (14 darab) osztjuk szét az a) részben tárgyalt módon. Így

$$\overline{C}_4^{14} = \frac{17!}{14! \cdot 3!}$$

helyes kiosztás van.

1.28. Hányféleképpen lehet 2011-es számot

a) hét nemnegatív egész szám

b) hét pozitív egész szám

összegére bontani, ha két fölbontást akkor is különbözőnek tekintünk, ha csak a tagok sorrendjében térnek el egymástól?

Megoldás:

Gyakorlatilag az előző feladat átfogalmazásáról van szó.

a) $\overline{C}_7^{2011}$

b) $\overline{C}_7^{2011}$

1.29. Hányféleképpen helyezhetünk el 40 különböző díszhalat 2 egyforma nagy és 4 egyforma kicsi akváriumban úgy, hogy a nagy akváriumokban 10-10 a kicsikben pedig 5-5 hal legyen.

Megoldás:

Ha az akváriumokat páronként különbözőnek tekinteném (mondjuk beszámozva őket), akkor az elrendezések száma $\binom{40}{10} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5}$ lenne, de ekkor különbözőnek számolnánk azokat az eseteket, amelyek az egyforma akváriumok cseréjével egymásba vihetők. Így valójában

$$\frac{\binom{40}{10} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5}}{2! \cdot 4!}$$

különböző elrendezés van.

1.30. 8 golyó közül 4 piros és 1-1 kék, zöld, fehér illetve fekete. Hányféleképpen állíthatunk össze ezek közül egy 4 golyóból álló sorozatot, ha az azonos színű golyók egymástól megkülönböztethetetlenek?

Megoldás:

Bontsuk szét az eseteket aszerint, hogy hány piros golyót választottunk ki.

4 piros:

Ekkor másik golyóra nincs szükségünk, így a golyók kiválasztására egyetlen lehetőség adódik és mivel a golyók megkülönböztethetetlenek, a sorbarendezések sem adnak új lehetőséget: 1 lehetőség.

3 piros:

Ekkor a negyedik golyó a másik 4 „színes” golyó bármelyike lehet, így a színösszeállítás kiválasztására 4 lehetőségünk van. Minden színösszeállítás során $P_4^{1,3}$=4 sorbarendezés lehetséges. Így összesen a szorzási szabály alapján $4 \cdot 4$ újabb lehetőséghez jutottunk.

2 piros:

Ekkor a harmadik golyó a másik 4 „színes” golyó bármelyike lehet, míg a negyedik golyó választására 3 lehetőségünk van, így $4 \cdot 3 = 12$-féle színösszeállítás lehet. Minden színösszeállítás során $P_4^{1,1,2} = \frac{4!}{2!} = 12$ sorbarendezés lehetséges. Így összesen a szorzási szabály alapján $12^2 = 144$ újabb lehetőséghez jutottunk.

II.1.2. További gyakorló feladatok

1.31. Egy futó versenyen nyolc futó került a döntőbe. A döntőben hány különböző befutási sorrend lehetséges, ha feltételezzük, hogy nem volt holtverseny?

eredmény

1.32. Hány olyan ötjegyű szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, amelyben az 1-e és a 3-as jegy egymás mellett helyezkedik el és minden számjegyet pontosan egyszer használhatunk fel? És ha a 2-es számjegyet 0-ra cseréljük?

eredmények

1.33. Hány ötjegyű páros szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

eredmény

1.34. Hányféleképpen ülhet le 9 ember egy kilencszemélyes hosszú padra?

eredmény

1.35. Hányféleképpen ülhet le 4 nő és 5 férfi egy kilencszemélyes hosszú padra, úgy hogy azonos neműek ne kerüljenek egymás mellé?

eredmény

1.36. Hányféleképpen ülhet le 4 nő és 5 férfi egy kilencszemélyes hosszú padra, úgy hogy azonos neműek ne kerüljenek egymás mellé, ha csak az számít, férfiről vagy nőről van-e szó?

eredmény

1.37. Hányféleképpen ülhet le 9 ember egy kerekasztal körül, ahol kilenc szék van?

eredmény

1.38. Hányféleképpen ülhet le 9 ember egy kerekasztal körül, ahol kilenc szék van, úgy hogy közülük két kitüntetett (A és B) egymás mellé kerüljön?

eredmény

1.39. Hányféleképpen ülhet le 4 nő és 5 férfi egy kerekasztal körül, ahol kilenc szék van úgy hogy azonos neműek ne kerüljenek egymás mellé?

eredmény

1.40. Hányféle képpen olvasható ki a következő ábrából KOMBINATORIKA szó, ha a táblázat bal felső sarkából indulunk és minden lépésben csak jobbra vagy lefelé haladhatunk:

$$\begin{array}{ccccccc}
K & O & M & B & I & N & A \\
O & M & B & I & N & A & T \\
M & B & I & N & A & T & O \\
B & I & N & A & T & O & R \\
I & N & A & T & O & R & I \\
N & A & T & O & R & I & K \\
A & T & O & R & I & K & A
\end{array}$$

eredmény

1.41. Hányféleképpen lehet eljutni az origóból a (4, 7, 3) pontba, úgy, hogy csak egységnyi hosszú jobbra, fel és előre lépések lehetségesek?

eredmény

1.42. Adott n különböző elem. Ha az elemekhez hozzáveszünk két, az utolsóval megegyező elemet, akkor az elemek összes különböző sorbarendezéseinek száma 22-szerese lesz, mint az eredeti n elem sorbarendezéseinek a száma.

megoldás

1.43. Hány permutációja van az ASZTALLAP, és a KUTYAFUTTATÓ szavaknak?

eredmény

1.44. A 0, 1, 1, 1, 2, 2, 5 számjegyek permutálásával hány

a) páros,

b) páratlan,

c) néggyel osztható,

d) öttel osztható,

e) 12-vel osztható

szám képezhető, ha a számok nem kezdődhetnek 0-val?

megoldások

1.45. Hányféleképpen oszthatunk szét 25 különböző tárgyat 5 személy között egyenlő arányban?

eredmény

1.46. Tizenkét tanuló között hányféleképpen lehet kiosztani öt különböző tárgyat, ha egy tanuló

a) legfeljebb egy tárgyat kaphat?

b) több tárgyat is kaphat?

megoldás

1.47. Az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 számjegyekkel hány páros, ötjegyű számot képezhetünk, ha bármely két szomszédos jegy különböző paritású és

a) minden jegyet legfeljebb egyszer használunk?

b) Ugyanaz a jegy többször is felhasználható?

eredmény

1.48. Tizes-számrendszerbeli hatjegyű számokat képezünk.

a) Hány ilyen szám van?

b) Hány páros illetve hány páratlan szám van?

c) Hány 4-gyel osztható szám van?

d) Hány 5-tel osztható szám van?

e) Hány 3-mal osztható szám van?

eredmények, megoldások

1.49. Kettes-számrendszerbeli hatjegyű számokat képezünk.

a) Hány ilyen szám van?

b) Hány páros illetve hány páratlan szám van?

c) Hány 4-gyel osztható szám van?

d) Hány 8-cal osztható szám van?

eredmények, magyarázatok

1.50. Tizenhatos-számrendszerbeli hatjegyű számokat képezünk.
(A számjegyek: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; A; B; C; D; E; F)

a) Hány ilyen szám van?

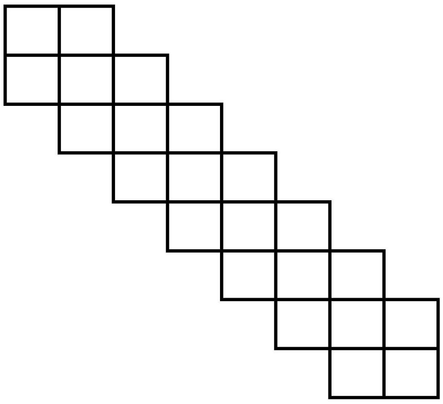
b) Hány páros illetve hány páratlan szám van?

c) Hány 4-gyel osztható szám van?

d) Hány 32-vel osztható szám van?

eredmények, magyarázatok

1.51. Tekintsük az alábbi ábrán látható hiányos mátrixokot. (Tridiagonális mátrix „értékes” elemeket tartalmazó mezői. Ha úgy tetszik, akkor egy széttörött sakktábla.) Hányféleképpen juthatunk el a bal felső mezőből a jobb alsó mezőbe, úgy hogy minden lépésnél egy mezőt jobbra, vagy egy mezőt lefelé lépünk és a kijelölt területet nem hagyhatjuk el?



Általánosítsuk a problémát és 8×8-as mátrix helyett vizsgáljunk $n \times n$-es mátrixot!

megoldás

1.52. Az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 elemek hány negyedosztályú ismétlésnélküli kombinációja tartalmazza az 1; 2 elemeket?

eredmények

1.53. Hány olyan ötjegyű szám van, melynek jegyei

a) növekvő sorrendben

b) nem csökkenő sorrendben

következnek egymás után?

eredmények

1.54. Az ötös, vagy a hatos lottón lehet kevesebb szelvénnyel biztosan telitalálatot elérni. (Az ötös lottó esetén 90 szám közül kell ötöt eltalálni, a hatoson 45-ből 6-ot.)

megoldás

1.55. Hányféle lehet a lottó-húzás eredménye, ha tudjuk, hogy csupa egymásutáni számot húztak ki. (A lottóhúzás során 90 szám közül húznak ki 5-öt úgy, hogy a kihúzott elemek sorrendje érdektelen.)

megoldás

1.56. Hányféle lehet a lottó-húzás eredménye, ha tudjuk, hogy kihúztak két pár egymásutáni számot, de nem húztak három egymás utánit?

megoldás

1.57. Egy évfolyam 50 lány és 30 fiú hallgatója öttagú küldöttséget választ, éspedig 3 lányt és 2 fiút. Hányféleképpen tehetik ezt meg? Hányféleképpen választhatnak küldöttséget akkor, ha Ancsa és Berci éppen haragban vannak, ezért nem akarnak együtt bekerülni.

megoldás

1.58. Egy postahivatalban 10-féle képeslapot árulnak. Hányféleképpen vásárolhatunk

a) 8 különböző képeslapot?

b) 8 képeslapot?

c) 12 képeslapot?

eredmények

1.59. Hány szótárt kell kiadnunk, hogy közvetlenül tudjunk fordítani 10 különböző nyelv közül bármelyikről bármelyik másikra?

eredmény

II.2. fejezet

A binomiális és a polinomiális tétel

II.2.1. Kidolgozott példák

2.1. Mennyi lesz az x^2y^3 együtthatója $(2x+3y)^5$-ben?

Megoldás:

A binomiális tétel alapján az a^2b^3-ös tag együtthatója az $(a+b)^5$ kifejtésében $\binom{5}{2}$. Ne feledkezzünk el azonban arról, hogy a feladatban $a = 2x$, így $a^2 = 2^2x^2$ és hasonlóan $b = 3y$, így $b^3 = 3^3y^3$, így a kérdéses együttható

$$\binom{5}{2} \cdot 2^2 \cdot 3^3$$

2.2. Igazoljuk, hogy

$$\binom{n}{k-1} + 2 \cdot \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}.$$

Megoldás:

1. Megoldás:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + 2 \cdot \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} + 2 \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} = \\
&= \frac{(k+1) \cdot k \cdot n!}{(k+1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{2 \cdot (k+1) \cdot (n-k+1) \cdot n!}{(k+1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{(n-k+1) \cdot (n-k) \cdot n!}{(k+1)! \cdot (n-k+1)!} = \\
&= \frac{n! \cdot ((k^2+k) + (2nk - 2k^2 + 2k + 2n - 2k + 2) + (n^2 - 2nk + n + k^2 - k))}{(k+1)! \cdot (n-k+1)!} = \\
&= \frac{n! \cdot (n^2+3n+2)}{(k+1)! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(k+1)! \cdot (n-k+1)!} = \frac{(n+2)!}{(k+1)! \cdot ((n+2)-(k+1))!} = \\
&= \binom{n+2}{k+1}
\end{aligned}$$

2. Megoldás:

Kombinatorikai megközelítéssel: Egy zsákban n darab páronként különböző piros és 2 különböző fehér golyó van. Hányféleképpen lehetséges közüllük $k+1$ darabot kihúzni úgy, hogy a kiválasztás sorrendjére nem vagyunk tekintettel.

A lehetőségeket kétféleképpen számoljuk össze. Először úgy tekintjük, hogy $n+2$ páronként különböző elem közül kell $k+1$-et választanunk a sorrendre való tekintet nélkül, amely ismert összeszámlálási probléma. A lehetőségek száma $\binom{n+2}{k+1}$.

Másodszor a kiválasztásokat csoportosítsuk a kiválasztott fehér golyók száma alapján:

- csak piros golyókat választunk, ekkor a lehetőségek száma: $\binom{2}{0}\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{k}$
- $k-1$ piros és 1 fehér golyót választunk, ekkor a lehetőségek száma: $\binom{2}{1}\cdot\binom{n}{k-1}=2\binom{n}{k-1}$
- mind a két fehér golyót kiválasztottuk, ekkor a lehetőségek száma: $\binom{2}{2}\cdot\binom{n}{k-2}=\binom{n}{k-2}$

A fenti diszjunkt esetek uniója adja az összes kiválasztásokat, így az összes lehetőségek száma a fenti alesetekhez tartozó lehetőségek számának összege. Így éppen a bizonyítandó állítást kaptuk:

$$\binom{n}{k-1}+2\cdot\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+2}{k+1}.$$

2.3. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$$

A feladatra az elméleti rész tárgyalása során már adtunk három megoldást, lásd I.2.1.6 és I.6.6, most lássunk egy újabb megközelítési módot:

Kombinatorikai megközelítés:

Egy n tagú társaságból válasszunk egy bizottságot és a bizottságnak egy elnököt. A feladat kétféleképpen oldható meg.

1.) Először válasszunk egy k tagú bizottságot és a bizottság tagjai közül válasszunk egy elnököt. Ez

$$\binom{n}{k}\cdot\binom{k}{1}=\binom{n}{k}\cdot k.$$

Ezeket összegezzük, amíg a k az összes lehetséges értéken végigfut, amelyeket a bizottság létszáma felvehet.

2.) Először az elnököt választjuk ki, majd a maradék $n-1$ személy esetén mindenkinél eldönthejük, hogy tagja legyen-e a bizottságnak. Így a lehetőségek száma:

$$\binom{n}{1}\cdot 2^{n-1}=n\cdot 2^{n-1}.$$

2.4. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$$

Megoldás:

A binomiális tétel $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k\cdot b^{n-k}$ alakjába $a=-1$ és $b=1$ értékeket helyettesítve az állítás azonnal adódik.

2.5. Mutassuk meg, hogy minden nem üres halmaznak pontosan annyi páros elemű részhalmaza van, mint ahány páratlanelemű!

1. Megoldás:

A feladat állítása gyakorlatilag megegyezik a 4 feladatban bizonyított állítással.

2. Megoldás:

Tekintsük a halmaz egy rögzített x elemét. Minden A_i részhalmaz esetén, melyre $x \notin A_i$ egyértelműen létezik a $B_i = A_i \cup \{x\}$ halmaz. Könnyen látható, hogy az A_i és B_i halmazok kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethetők egymásnak. A halmaz minden részhalmaza besorolható az A_i vagy B_i halmazok közé. Rögzitett i index esetén A_i és B_i elemszáma különböző paritású. A megfeleltetés bijektív voltából következik az állítás.

2.6. Adjuk meg $(2x+3y-z)^3$ kifejtésében az yz^2-es tag együtthatóját!

A polinomiális tétel alapján az bc^2-es tag együtthatója az $(a+b+c)^3$ kifejtésében $\frac{3!}{0!\cdot 1!\cdot 2!}$. Ne feledkezzünk el azonban arról, hogy a feladatban $b=3y$ és $c=-z$, így $c^2=z^2$, azaz a kérdéses együttható

$$\frac{3!}{0!\cdot 1!\cdot 2!}\cdot 3\cdot 1 = 9.$$

Megoldás:

A polinomiális tétel alapján:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= \frac{3!}{0!\cdot 0!\cdot 3!}\left(a^3\cdot b^0\cdot c^0 + a^0\cdot b^3\cdot c^0 + a^0\cdot b^0\cdot c^3\right) + \\ &+\frac{3!}{0!\cdot 1!\cdot 2!}\left(a^2\cdot b^1\cdot c^0 + a^2\cdot b^0\cdot c^1 + a^0\cdot b^2\cdot c^1 + a^0\cdot b^1\cdot c^2 + a^1\cdot b^0\cdot c^2 + a^1\cdot b^2\cdot c^0\right) + \\ &+\frac{3!}{1!\cdot 1!\cdot 1!}a^1\cdot b^1\cdot c^1\end{aligned}$$

2.7. Igazoljuk, hogy

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

Megoldás:

r hölgy és s úr közül válasszunk n-tagú küldöttséget. Hányféleképpen állítható össze a küldöttség?

Először számoljuk össze a lehetőségeket úgy, hogy nem vagyunk tekintettel arra, hogy a küldöttségbe hány hölgy került. Ekkor gyakorlatilag arról van szó, hogy $r+s$ személy közül kell (a sorrendre való tekintet nélkül) kiválasztani n-et. Ez $\binom{r+s}{n}$-féleképpen lehetséges.

Osztályozzuk most a küldöttségeket az alapján, hogy hány hölgyet választottunk be:

$$\begin{array}{ll} 0 \text{ hölgy:} & \binom{r}{0}\cdot\binom{s}{n} \\ 1 \text{ hölgy:} & \binom{r}{1}\cdot\binom{s}{n-1} \\ \vdots & \\ n \text{ hölgy:} & \binom{r}{n}\cdot\binom{s}{0} \end{array}$$

A felsorolt esetek egymást páronként kizárják így a lehetőségek száma a fentiek összege:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k}.$$

Megjegyzések: A probléma tárgyalása során vagy ügyelnünk kellene r, s, n viszonyára (a fenti táblázat $n \le \min\{r, s\}$ esetet mutatja, vagy a binomiális együtthatók fogalmát általánosítanunk kell. Legyen $a < b$, ekkor $\binom{a}{b} := 0$. Ezzel a kiegészítéssel az eset szétválasztás megspórolható.

Ez nem más, mint a Vandermonde-azonosság, lásd elméleti rész, I.2.3.4.

2.8. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot k \cdot \binom{n}{k} = 0.$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot k\cdot\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot k\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k)!} = \\ &= n\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot((n-1)-(k-1))!} = n\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k-1} = \\ &= n\cdot\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j+2}\binom{n-1}{j} = n\cdot\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j}\binom{n-1}{j}}_{=0} = 0.\end{aligned}$$

II.2.2. További gyakorló feladatok

2.9. Igazoljuk, hogy

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} \cdots = 2^{n-1}.$$

útmutatás

2.10. Igazoljuk, hogy ha $0 \le r \le n$, akkor

$$\binom{n}{0}\binom{n}{r} + \binom{n}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{r-2} + \ldots + \binom{n}{r}\binom{n}{0} = \binom{2n}{r}.$$

útmutatás

2.11. Igazoljuk, hogy minden $n \ge 2$-re

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

Adjunk kombinatorikus bizonyítást is.

útmutatás

2.12. Igazoljuk, hogy minden $n \geq 2$-re

$$\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}+3\binom{n}{4}+\ldots+(n-1)\binom{n}{n}=(n-2)\cdot 2^{n-1}+1.$$

útmutatás

2.13. Számítsuk ki az $\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}(-1)^{i-k}$ összeget, ahol $1 \leq k \leq n$.

útmutatás

2.14. Legyen

$$a_n=\frac{1}{\binom{n}{0}}+\frac{1}{\binom{n}{1}}+\cdots+\frac{1}{\binom{n}{n}}, \quad n \geq 0.$$

Igazoljuk, hogy $a_{n+1}=\frac{n+2}{2(n+1)}a_n+1$, $n \geq 0$, és $a_n \to 2$ mikor $n \to \infty$.

megoldás

2.15. Számítsuk ki a $\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}(-1)^{i-k}$ összeget, ahol $1 \leq k \leq n$.

megoldás

2.16. Igazoljuk, hogy az $\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \binom{n+k-1}{k}$ ismétléses kombinációkra vonatkozóan:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle, \quad (n,k \geq 1).$$

megoldás

II.3. fejezet

Szitaképletek

II.3.1. Kidolgozott példák

3.1. Egy osztályban angolul, franciául, németül rendre 16, 6, 7 tanuló tanul. Négyen angolul is és németül is, hárman németül és franciául, ketten franciául és angolul is tanulnak. Egy tanul mindhárom nyelvet tanulja. Hányan vannak az osztályban, ha mindenki tanul legalább egy nyelvet? Hányan tanulnak csak angolul?

Megoldás:

Ha az angolul, franciául illetve németül tanulók számát összegezzük, akkor azokat akik két nyelvet is tanulnak kétszer, azokat, akik mindhárom nyelvórára járnak pedig háromszor számoltuk bele a létszámba. Ilyen esetekben alkalmazzuk a logikai szitaformulát:

$$|A\cup F\cup N|=|A|+|F|+|N|-(|A\cap F|+|A\cap N|+|F\cap N|)+|A\cap F\cap N|=16+6+7-(2+4+3)+1=21.$$

3.2. Az egymilliónál kisebb nemnegatív egész számok közül hány tartalmazza a 3, 4, 7, 9 jegyek mindegyikét?

Megoldás:

Az 1000000 darab egymilliónál kisebb nemnegatív egész szám közül először vonjuk ki azokat, amelyek a felsorolt számjegyek közül legalább az egyiket nem tartalmazzák:

$$1000000-4\cdot 9^6,$$

de ekkor azokat a számokat többször hagytuk el, amelyek a fentiek közül legalább kettőt nem tartalmaznak, ezeket adjuk vissza:

$$1000000-4\cdot 9^6+\binom{4}{2}\cdot 8^6.$$

Most viszont a kelleténél többször számoltuk be azokat a számokat, amelyek a jegyek közül legfeljebb egyet tartalmaznak, ezeket meg csak le kell számítani:

$$1000000-4\cdot 9^6+\binom{4}{2}\cdot 8^6-\binom{4}{3}\cdot 7^6,$$

végül azokat a számokat, amelyek egyik vizsgált jegyet sem tartalmazzák újra vissza kell adnunk, hiszen az előbb többször vontuk le őket:

$$1000000-4\cdot 9^6+\binom{4}{2}\cdot 8^6-\binom{4}{3}\cdot 7^6$$

3.3. 1-től 150-ig hány összetett és hány prím szám van?

Megoldás:

1-től 150-ig az összetett számok az alábbi prímek valamelyikével oszthatók: 2, 3, 5, 7, 11, mivel a következő prím (13) már nagyobb mint $\sqrt{150}$. Jelölje S_k a kával oszthatók számát. Ekkor a felsorolt prímek közül legalább eggyel oszthatók:

$$\begin{aligned}
S_2 &= \left[\frac{150}{2}\right] = 75 \\
S_3 &= \left[\frac{150}{3}\right] = 50 \\
S_5 &= \left[\frac{150}{5}\right] = 30 \\
S_7 &= \left[\frac{150}{2}\right] = 21 \\
S_{11} &= \left[\frac{150}{11}\right] = 13
\end{aligned}$$

a felsorolt prímek közül legalább kettővel oszthatók:

$$\begin{aligned}
S_{2,3} = S_6 &= \left[\frac{150}{6}\right] = 25 & S_{3,7} = S_{21} &= \left[\frac{150}{21}\right] = 7 \\
S_{2,5} = S_{10} &= \left[\frac{150}{10}\right] = 15 & S_{3,11} = S_{33} &= \left[\frac{150}{33}\right] = 4 \\
S_{2,7} = S_{14} &= \left[\frac{150}{14}\right] = 10 & S_{5,7} = S_{35} &= \left[\frac{150}{35}\right] = 4 \\
S_{2,11} = S_{22} &= \left[\frac{150}{22}\right] = 6 & S_{5,11} = S_{55} &= \left[\frac{150}{55}\right] = 2 \\
S_{3,5} = S_{15} &= \left[\frac{150}{15}\right] = 10 & S_{7,11} = S_{77} &= \left[\frac{150}{77}\right] = 1
\end{aligned}$$

a felsorolt prímek közül legalább hárommal oszthatók:

$$\begin{aligned}
S_{2,3,5} = S_{30} &= \left[\frac{150}{30}\right] = 5 & S_{2,7,11} = S_{154} &= \left[\frac{150}{154}\right] = 0 \\
S_{2,3,7} = S_{42} &= \left[\frac{150}{42}\right] = 3 & S_{3,5,7} = S_{105} &= \left[\frac{150}{105}\right] = 1 \\
S_{2,3,11} = S_{66} &= \left[\frac{150}{66}\right] = 2 & S_{3,5,11} = S_{165} &= \left[\frac{150}{165}\right] = 0 \\
S_{2,5,7} = S_{70} &= \left[\frac{150}{70}\right] = 2 & S_{3,7,11} = S_{231} &= \left[\frac{150}{231}\right] = 0 \\
S_{2,5,11} = S_{110} &= \left[\frac{150}{110}\right] = 1 & S_{5,7,11} = S_{385} &= \left[\frac{150}{385}\right] = 0
\end{aligned}$$

a felsorolt prímek közül legalább néggyel oszthatók:

$$S_{2,3,5,7} = S_{210} \quad = \quad \left[\frac{150}{210}\right] = 0$$

Az utolsó eredményből látszik, hogy nincs olyan 150-nél kisebb szám amely legalább négy vizsgált prímmel osztható lenne. Ekkor a logikai szita-formula alapján a prímek száma:

$$\pi(150){=}150{-}(75{+}50{+}30{+}21{+}13){+}(25{+}15{+}10{+}6{+}10{+}7{+}4{+}4{+}2{+}1){-}(5{+}3{+}2{+}2{+}1{+}1){+}5{-}1{=}35.$$

Az utolsó két művelet kisebb magyarázatra szorul. A legalább egy prím osztóval rendelkező összetett számok helyett valójában a vizsgált prímjeink többszöröseit számoltuk meg. Ezek között természetesen szerepelnek maguk a prímek is, akiket így tévesen vontunk le.

A fennmaradó számok tehát olyanok, amelyeknek nincs valódi prím osztójuk. Ezek egy kivétellel mind prímek is. A kivétel az 1. Tehát összegezve 1-től 150-ig 35 darab prím szám, 114 darab összetet szám és az 1 található.

3.4. Hányféleképpen ültethetünk le egy sorba három angolt három franciát és három törököt úgy, hogy három azonos nemzetiségű ne üljön egymás mellé?

Megoldás:

$$9! - \binom{3}{1}\cdot 7!\cdot 3! + \binom{3}{2}\cdot 5!\cdot 3!\cdot 3! - \binom{3}{3}\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!$$

3.5. Aladár levelet írt 10 barátjának. Pont mikor borítékba akarta rakni a leveleket elaludt a villany. A leveleket ekkor véletlenszerűen rakta be a borítékokba. Hányféle olyan elrendezés van, hogy senki ne a neki szóló levelet kapja meg?

Megoldás:

$$10! - \tbinom{10}{1}\cdot 9! + \tbinom{10}{2}\cdot 8! - \tbinom{10}{3}\cdot 7! + \tbinom{10}{4}\cdot 6! - \tbinom{10}{5}\cdot 5! + \tbinom{10}{6}\cdot 4! - \tbinom{10}{7}\cdot 3! + \tbinom{10}{8}\cdot 2! - \tbinom{10}{9}\cdot 1! + \tbinom{10}{10}\cdot 0!$$

3.6. Adott egy X alaphalmaz és annak $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ részhalmazai. Hány elem tartozik az A_i-k közül pontosan 2-be?

Megoldás:

$$\sum|A_i\cap A_j| - \binom{3}{2}\cdot\sum|A_i\cap A_j\cap A_k| + \binom{4}{2}\cdot\sum|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_\ell| - \cdots + (-1)^n\cdot\binom{n}{2}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

3.7. Hányféleképen ülhet le 8 házaspár egy kerekasztal köré úgy, hogy minden nő két férfi közé ül, de egyik nő sem ül a férje jobboldalára?

Megoldás:

Az összes ültetések száma: $7!\cdot 8!$

Ha legalább egy hölgy a férje jobbján ül: $\binom{8}{1}\cdot 7!\cdot 7!$

És így tovább… Ekkor a helyes ültetések száma a szitaformula alapján az alábbi módon számolható:

$$7!\cdot 8! - \binom{8}{1}\cdot 7!\cdot 7! + \binom{8}{2}\cdot 7!\cdot 6! - \binom{8}{3}\cdot 7!\cdot 5! + \cdots + (-1)^8\cdot\binom{8}{8}\cdot 7!\cdot 0!$$

3.8. Hány olyan pozitív egész szám van, amely osztója a 10^{40} és 20^{30} számok valamelyikének?

Megoldás:

Számoljuk össze 10^{40} és 20^{30} osztóit, majd vonjuk ki a közös osztókat, mert ezeket duplán számoltuk!

$10^{40} = 2^{40} \cdot 5^{40}$ osztói $2^p \cdot 5^q$ alakúak, ahol $0 \le p, q \le 40$ egészek.

Így mind p, mind tőle függetlenül q választására 40 lehetőségünk van, vagyis 10^{40}-nek $40^2 = 1600$ osztója van.

Hasonlóan $20^{30} = 2^{60} \cdot 5^{30}$ osztói $2^p \cdot 5^q$ alakúak, ahol $0 \le p \le 60$ és $0 \le q \le 30$ egészek.

Így 20^{30}-nak $60 \cdot 30 = 1800$ osztója van.

A közös osztók mindegyike osztója a legnagyobb közös osztónak $d=(10^{40},20^{30})=(2^{40}\cdot 5^{40},2^{60}\cdot 5^{30})= 2^{40} \cdot 5^{30}$.

$d = 2^{40} \cdot 5^{30}$ osztóinak számát az előzőekhez hasonlóan számolhatjuk: $40 \cdot 30 = 1200$.

Így összesen

$$1600 + 1800 - 1200 = 2200$$

olyan szám van, amely a fenti számok valamelyikének (esetleg mindkettőnek) osztója.

3.9. Hányféleképpen tudunk eltenni 20 különböző papírlapot egy piros, egy kék, egy zöld és egy sárga irattartóba úgy, hogy mindegyik irattartóba kerüljön legalább egy papír és a dosszién belül a sorrend közönbös?

Megoldás:

Logikai szitaformulát alkalmazva:

Az összes elrendezések száma: 20^4, hiszen minden papírlap esetén 4 irattartó közül választhatunk.

Az olyan elrendezések száma, ahol (legalább) egy irattartó üresen marad: $\binom{4}{1} \cdot 20^3$.

Az olyan elrendezések száma, ahol (legalább) két irattartó üresen marad: $\binom{4}{2} \cdot 20^2$.

Az olyan elrendezések száma, ahol három irattartó üresen marad: $\binom{4}{3} \cdot 20$.

Így az összes helyes elrendezések száma:

$$20^4 - \binom{4}{1} \cdot 20^3 + \binom{4}{2} \cdot 20^2 - \binom{4}{3} \cdot 20.$$

3.10. Egy zsákban 10 pár cipő van. Hányféleképpen vehetünk ki belőle 6 darabot úgy, hogy ne legyen köztük egy pár sem?

1. Megoldás:

Logikai-szitaformulával:

$$\binom{20}{6} - \binom{10}{1} \cdot \binom{18}{4} + \binom{10}{2} \cdot \binom{16}{2} - \binom{10}{3} \cdot \binom{14}{0} = 13440.$$

2. Megoldás:

Direkt számolással:

A 6 cipőt úgy választjuk, hogy először eldöntjük, hogy melyik 6 párból választunk ($\binom{10}{6}$ lehetőség), majd minden kiválasztot pár esetén eldöntjük, hogy a jobb- vagy a ballábas cípőre van-e szükségünk. (2^6 lehetőség). Így a szorzási szabály alapján összesen

$$\binom{10}{6} \cdot 2^6$$

kiválasztás lehetséges.

II.3.2. További gyakorló feladatok

3.11. Adott egy X alaphalmaz és annak $A_1, A_2, \ldots, A_n$ részhalmazai. Hány elem tartozik az A_i-k közül pontosan 3-ba?

eredmény

3.12. Hányféleképpen ültethetünk le egy kerekasztal körül három angolt három franciát és három törököt úgy, hogy három azonos nemzetiségű ne üljön egymás mellé?

megoldás

3.13. Hány olyan részhalmaza van az $\{1,2\ldots,10\}$ halmaznak, amely tartalmaz legalább egy páratlan számot?

eredmény

3.14. Hány olyan részhalmaza van az $\{1,2\ldots,10\}$ halmaznak, amely tartalmaz legalább három páratlan számot?

eredmény

3.15. Hányféleképpen választható ki az augusztus hónap 5 napja úgy, hogy ne legyenek köztük egymásutáni napok?

megoldás

3.16. Az $1,2,\ldots n$ számoknak hány olyan permutációja van, hogy $1,2,\ldots,k$ nem állnak egymás után

i) ebben a sorrendben,

ii) valamilyen sorrendben.

megoldás

II.4. fejezet

Összeszámlálási feladatok

II.4.1. Kidolgozott példák

4.1. Hányféleképpen juthatunk el az $n\times n$-es sakktáblán a bal alsó sarokból a jobb felső sarokba, ha minden lépéssel közeledünk az $||\cdot||_1$-es vektornorma értelmében?
($||\underline{x}||_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$)

Megoldás:

A megfogalmazás annyit takar, hogy minden lépésben egyet jobbra, vagy egyet fel lépünk. Ezzel a problémakörrel már foglalkoztunk korábban. Az alábbi két megközelítéssel elemi összeszámlálási problémára vezethetjük a feladatot.

1. Megoldás: $n-1$ darab jobbra illetve $n-1$ darab fel jelet kell az összes lehetséges módon sorbarendezni. (Az azonos irányokhoz tartozó jelek páronként megkülönböztethetetlenek) Így egy-egy útvonalhoz egy-egy ismétléses permutációt rendeltünk, méghozzá bijektív módon. Ezek száma:

$$\overline{P}_{2n-2}^{n-1,n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\cdot(n-1)!}.$$

2. Megoldás: $2n-2$ lépésben jutunk el a bal alsó sarokból a jobb felsőbe. Ezen lépések közül válasszuk ki azt az $n-1$ darabot (a sorrendre való tekintet nélkül), amelyekben jobbra lépünk. Így egy-egy útvonalhoz egy-egy ismétlésnélküli kombinációt rendeltünk, méghozzá bijektív módon. Ezek száma:

$$C_{2n-2}^{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\cdot(n-1)!}.$$

4.2. 16 csapatot 4 darab 4-es csoportba osztottunk, a csoportokon belül egy-fordulós körmérkőzések döntik el a sorrendet. Minden csoport első helyezettje bejut a 4-es döntőbe, ahol a 4 csapat megint körmérkőzést játszik egymással. Hányféle lehet a 4-es döntő mezőnye, ha a csoportok beosztását rögzítettnek tekintjük?

Gondoljuk meg a problémát két ötös és két hármas csoport esetén is!

Megoldás:

A feladat által vázolt problémát az ismétléses permutáció általánosításának tekinthetjük. A lehetőségek száma $4\cdot4\cdot4\cdot4$. Az első csoportból ugyanis 4-féle csapatot választhatunk. Bármelyik csapat jutott is tovább, a második csoportból való kiválasztással a sort 4-féleképpen folytathatjuk, így az első két csapat 4^2-féleképpen választható ki. És így tovább…Ezzel a szorzási szabály formulájához jutunk.

Ha két ötös és két hármas csoport során kell a továbbjutókat kiválasztani, akkor ez a fenti gondolatmenetet követve $5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3$-féleképpen tehető meg.

4.3. A könyvespolcon 12 könyv áll. Hányféleképpen lehet közülük kiválasztani ötöt úgy, hogy ezek között ne legyen két egymás meletti?

Megoldás:

Minden kiválasztásnak megfeleltethetünk egy 5 egyesből és 7 nullából álló 12 bites sorozatot. Azok a jó sorozatok, ahol nem áll egymásmellett 2 egyes jegy. Írjuk le a nullákat úgy, hogy köztük, elöttük illetve mögöttük egy-egy helyet hagyunk az egyeseknek.

$$\sqcup\, 0 \,\sqcup\, 0 \,\sqcup\, 0 \,\sqcup\, 0 \,\sqcup\, 0 \,\sqcup\, 0 \,\sqcup\, 0 \,\sqcup$$

Így az 5 darab egyesünket 8 helyre rakhatjuk. A 8 hely közül kell tehet 5-öt kiválasztani ezt

$$\binom{8}{5}\text{-féleképpen}$$

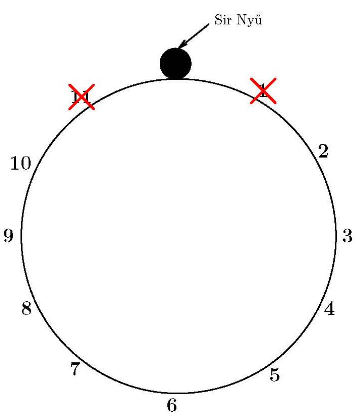
tehetjük meg. Lásd még elméleti rész, I.4.1.9 Feladat.

4.4. Arthur király kerek asztala körül 12 lovag ül. Minden lovag haragban van a szomszédaival (és csak velük). A királynak egy öttagú csapatot kell lovagjaiból összeállítania úgy, hogy a kiválasztott lovagok mindegyike békében legyen a másik néggyel. Hányféleképpen teheti ezt meg a király?

Megoldás:

Asszerint, hogy egy kitüntetett lovag, nevezzük mondjuk Sir Nyű-nek, tagja-e a csapatnak, két diszjunkt osztályra bonthatjuk a lehetőségeket.

a) Ha Sir Nyű a csapat tagja, akkor szomszédai, 1-es és 11-es lovag biztosan nem kerülhetnek kiválasztásra. Az ábrán Sir Nyű-t ponttal jelöltük. A maradék kilenc lovag közül (2-10) úgy kell négyet választani, hogy ne legyen köztük két egymás melletti. Azzal, hogy kiválasztottuk Sir Nyűt, a kerek asztalból adódó problémákat elkerültük. Jelöljük a kiválasztott lovagokat „1”-essel, a nem kiválasztottakat „0”-val. Ekkor a feladat úgy írható át, hogy készítsünk 5 darab „0”-ból és 4 darab „1”-ből álló kilencjegyű bitsorozatokat úgy, hogy két „1” ne legyen egymás mellett.



Rakjuk le a „0”-kat úgy, hogy köztük illetve előttük és mögöttük egy-egy helyet kihagyunk.

$$\sqcup\, 0 \,\sqcup\, 0 \,\sqcup\, 0 \,\sqcup\, 0 \,\sqcup\, 0 \,\sqcup$$

Ekkor a négy egyest a fent jelölt hat hely bármelyikére eloszthatjuk. Lehetőségek: $\binom{6}{4}$.

b) Ha Sir Nyű nincs a csapatban, akkor a többi 11 lovag közül kell ötöt kiválasztani úgy, hogy ne legyenek köztük szomszédosak. Az előző meggondolás alapján 5 darab egyesből és 6 darab nullából álló sorozatot kell készítenünk. Ezt $\binom{7}{5}$ féle képpen tehetjük meg.

Mivel a felsorolt két lehetőség egymást kizáró eseteket tartalmaz, ezért az összes lehetőségek száma az összeadási szabály alapján:

$$\binom{6}{4}+\binom{7}{5}.$$

4.5. Hány mérkőzést játszanak egy n csapatos körmérkőzéses bajnokságban? Legalább hány fordulóban oldható ez meg?

Megoldás:

a) Annyi mérkőzésre van szükség, ahányféleképpen kiválaszthatunk az n csapat közül 2-t, azaz

$$\binom{n}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}.$$

b) Ha n páros, akkor egy fordulóban legfeljebb $\frac{n}{2}$ mérkőzést lehet lejátszani. Így legalább $n-1$ fordulóra van szükség.

Ha n páratlan, akkor minden fordulóban legfeljebb $\frac{n-1}{2}$ mérkőzés lehet. Így legalább n fordulóra van szükség.

A gráfelmélet témakörben be fogjuk lát, hogy meg lehet oldani ennyi fordulóban.

4.6. Hány mérkőzést játszanak egy kieséses ping-pong versenyen ahol n játékos indult?

Megoldás:

Minden mérkőzésen pontosan 1 játékos esik ki. Mire győztest hirdetnek $n-1$ játékos kiesése szükséges, így $n-1$ mérkőzésre van szükség.

4.7. Egy n hosszúságú botot n darab egységnyi hosszúságú darabra szeretnénk széttörni. Mi a lehetséges végrehajtások száma, ha minden lépésben eltörünk egy 1-nél hosszabb darabot?

Megoldás:

$n-1$ helyen lehet eltörni a pálcát. Minden végrehajtásnak megfeleltethetünk egyet-egyet az $1,\ 2,\ \dots,\ n-1$ számok permutációiból. Ilyen permutációból

$$P_{n-1}=(n-1)!$$

darab van.

4.8. Mennyi azoknak a hatjegyű számoknak az összege, melyeket az 1; 1; 3; 5; 5; 5 számjegyek ismétléses permutációiként kapunk?

Megoldás:

Az ismétléses permutációk száma $P_6^{3,2,1}=\frac{6!}{3!\cdot 2!}=60$.

Írjuk ezt a 60 darab hatjegyű számot egymás alá, mintha az összeadást írásban szeretnénk elvégezni:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 1 & 5 & 3 & 5 & 5 \\
1 & 1 & 5 & 5 & 3 & 5 \\
\vdots & & & & & \\
+\ 5 & 5 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ \hline
\end{array}$$

Vegyük észre, hogy minden helyiértéken ugyanazon számok összege szerepel (csak más sorrendben vannak felírva). Ha az ismétléses permutációk vizsgálatánal már bevált színezéses trükköt alkalmazzuk, akkor könnyen látható, hogy egy-egy helyiértéken minden jel (a színekre való tekintettel) ugyanannyiszor szerepel. Így minden helyiértéken a jegyek $\frac{1}{6}$-a 3-as, $\frac{2}{6}$-a 1-es és $\frac{3}{6}$-a 5-ös. Így az azonos helyiértéken szereplő számjegyek összege:

$$S = 10\cdot 3 + 20\cdot 1 + 30\cdot 5 = 200.$$

Az egyesek helyén lévő jegyek összegének valódi értéke S, a tízesek helyén lévőké $10S$ és így tovább. Így a hatjegyű számok összege:

$$S\cdot(1+10+100+1000+10000+100000) = 111111\cdot S$$

4.9. Igazoljuk, hogy $p(1)+p(2)+\ldots+p(n)<p(2n)$ minden $n\geq 1$ számra, ahol $p(n)$ a partíciófüggvény.

Megoldás: Legyen $k = a_1+a_2+\ldots+a_r$ egy tetszőleges partíciója a k számnak $(1\leq k\leq n)$, ahol $k\geq a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_r\geq 1$.

Akkor

$$2n = (2n-k)+a_1+a_2+\ldots+a_r,$$

ahol $2n-k\geq n\geq k\geq a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_r\geq 1$ és következik, hogy ez egy partíciója $2n$-nek.

Így egy olyan megfeleltetést kapunk, amely a k számok $(1\leq k\leq n)$ partícióihoz a $2n$ szám partícióit rendeli hozzá. A k számok $(1\leq k\leq n)$ különböző partícióinak a $2n$ szám különböző partíciói felelnek meg. Valóban, ha $k_1\neq k_2$, akkor $2n-k_1\neq 2n-k_2$, így a $2n$ szám azon partíciói, amelyeket k_1 és k_2 partícióhoz rendelünk biztosan különbözők. Ha pedig k rögzített és k két különböző partícióját tekintjük, akkor $2n$ megfelelő partícióiban az első tagok egyenlők, de azt követően legalább egy tag különböző.

Tehát ez egy injektív megfeleltetés. Ugyanakkor nem szürjektív, mert pl. a $2n = 2n$ egytagú partíció nem származtatható ilyen módon. Ezzel igazoltuk az adott egyenlőtlenséget, amely szigorú minden $n\geq 1$-re. Vizsgáljuk részletesen az $n = 3$ és $n = 4$ eseteket!

II.4.2. További gyakorló feladatok

4.10. Egy világbajnoki selejtezőben Európából 5 csapat indult, Ázsiából 10 résztvevő van, Észak-Amerikából, Dél-Amerikából és Afrikából egyaránt 7-en neveztek. A világbajnoki döntő 5 csapatos mezőnye úgy áll össze, hogy minden kontinensről pontosan egy csapat jut be. A kontinenseken lejátszott selejtezők után hányféle lehet a döntő összeállítása?

eredmény

4.11. Melyik dominó készletben van több elem:

a) amelynek elemein 0-tól 8-ig vannak pontok és tartalmaz „dupla” dominókat, vagy
b) amelynek elemein 0-tól 9-ig vannak pontok, de nem tartalmaz „dupla” dominókat?

eredmény

4.12. Öt házaspárból, hat hajadonból és hét agglegényből hányféleképpen tudunk 10 embert kiválasztani úgy, hogy házaspár ne legyen közöttük, de legyen köztük két asszony két nős férfi három agglegény és három hajadon?

eredmény

4.13. Az EB-selejtezőn 7 csoportban 50 csapat szerepel (egy 8 csapatos és hat 7 csapatos csoport van). A csoportokban oda-visszavágós rendszerben körmérkőzéseket játszanak. (Mindenki játszik mindenkivel egyszer idegenben és egyszer otthon.) Hány mérkőzést játszanak összesen? Hányféle lehet a döntő 16-os mezőnye, ha minden csoportból az első két helyezett jut tovább (a két házigazda nem vesz részt a selejtezőn automatikusan tagjai a döntőnek).

eredmény

4.14. $2n$ különböző magasságú ember hányféleképpen tud két n-hosszúságú sorbaállni úgy, hogy az első sorban mindenki alacsonyabb legyen, a hátsó sorban a megfelelő helyen állónál?

megoldás

4.15. Mennyi azoknak a tízjegyű számoknak az összege, melyek a $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 9$ számjegyek ismétlésnélküli permutációiként kaphatók. (Figyelem 0-val nem kezdődhet szám!)

megoldás

4.16. Mennyi azoknak a hatjegyű számoknak az összege, melyek a $0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2$ számjegyek permutálásával képezhetők?

eredmény

4.17. Jelölje $p_k(n)$ az n szám k részre való partícióinak a számát. Mennyi $p_1(n)$, $p_2(n)$ és $p_3(n)$ az n függvényében?

útmutatás

4.18. Igazoljuk, hogy minden $n \geq 1$ számra

$$n \cdot p(n) = \sum_{m=1}^{n} m \sum_{k=1}^{[n/m]} p(n-km),$$

$$n \cdot p(n) = \sum_{r=1}^{n} \sigma(r) p(n-r),$$

ahol $p(n)$ az n partícióinak a száma, $\sigma(r)$ pedig az r pozitív osztóinak az összege.

útmutatás

II.5. fejezet

Kombinatorika a geometriában

II.5.1. Kidolgozott példák

5.1. Adott a síkon 17 általános helyzetű pont (vagyis semelyik három nem esik egy egyenesbe). Hány egyenest határoznak meg ezek a pontok?

Megoldás:

Általános helyzetű pontok esetén pontosan annyi egyenes illeszthető a pontokra, ahányféleképpen a pontok közül kiválasztható 2, a sorrendre való tekintet nélkül, hiszen 2 pontra egy és csak egy egyenes illeszthető és mivel a pontok közül semelyik 3 nem esik egy egyenesbe, ezért az előbb generált egyenesek páronként különbözőek. Így a pontok által meghatározott egyenesek száma:

$$C_{17}^{2} = \binom{17}{2}.$$

Megjegyzés: Természetesen klasszikus összeszámlálási problémára való hivatkozás nélkül is megoldható a feladat. Egy egyenest egyértelműen meghatároz két pontja. Az első pont 17-féleképppen választható, a második – az elsőtől különböző – pont választására 16 lehetőség van. A szorzási szabály alapján az összes lehetőségek száma $17 \cdot 16$. De ezzel minden egyenest pontosan kétszer számoltunk, hiszen például az A és B pontok által meghatározott egyenes megegyezik a B és az A pontok által meghatározottal, amit mi különbözőnek számoltunk. Így a különböző egyenesek száma:

$$\frac{17 \cdot 16}{2} = \binom{17}{2}.$$

5.2. Adott 21 pont a síkon ezek közül 10 darab biztosan egy egyenesen van. Bármely két pontot egyenessel összekötve maximálisan hány különböző egyenest kaphatunk?

Megoldás:

Válasszunk 2 pontot ahányféleképpen lehet, ezek rendre meghatároznak egy-egy egyenest. (Természetesen lesz olyan egyenes, amit többször számoltunk, de ezeket le fogjuk vonni.) A 2 pont kiválasztására $\binom{21}{2}$ lehetőségünk van. Azt az egyenest, amelyre a 10 pontunk illeszkedik legalább annyiszor számítottuk bele az előző összesítésnél, ahányféleképpen ki tudunk választani kettőt a tíz pont közül ($\binom{10}{2}$), pedig elég lett volna egyszer számolni.

Így az egyenesek száma nem lehet több

$$K=\binom{21}{2}-\binom{10}{2}+1$$

darabnál. Könnyen látható, hogy megadhatók úgy a pontok, hogy a rájuk illeszkedő egyenesek száma pontosan ennyi legyen, Így a fenti K felső korlát felvétetik, azaz az illeszthető egyenesek számának ez a maximuma.

Megjegyzés: Jelöljük pirossal a garantáltan egy egyenesre illeszkedő 10 pontot és kékkel a többi pontot. Maximális számú egyenes illeszthető a pontrendszerünkre, ha bármely három pont, melyek közül legfeljebb kettő piros nem illeszkedik egy egyenesre.

5.3. Hány átlója van egy n oldalú konvex sokszögnek $(n \geq 4)$?

1. Megoldás: Minden csúcsból $n-3$ átló indul ki. (Nem indul átló saját magába illetve a 2 szomszédjába, de az összes többi csúcsba megy.) Ha minden csúcs esetén összeszámoljuk az onnan kiinduló átlók számát $(n\cdot(n-3))$, akkor minden átlót pontosan kétszer számoltunk. Így az átlók száma

$$\frac{n\cdot(n-3)}{2}$$

2. Megoldás: Minden átló pontosan két csúcshoz tartozik. Ha kiválasztjuk a két csúcsot, azzal az átló tehát adott lesz. Ez

$$C_n^2=\binom{n}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

lehetőséget jelentene. De így az oldalakat is beleszámoltuk, vagyis az átlók száma:

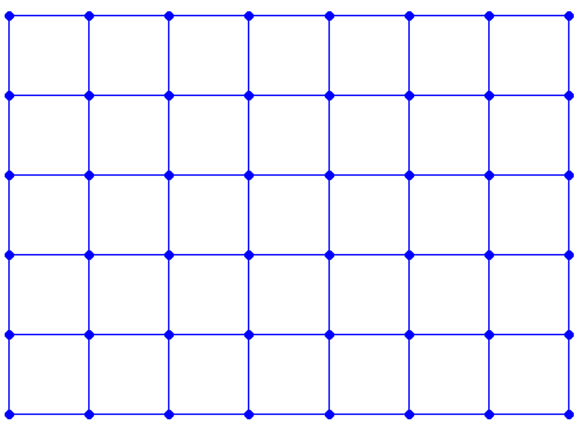
$$\binom{n}{2}-n=\frac{n\cdot(n-1)-2n}{2}=\frac{n\cdot(n-3)}{2}.$$

5.4. Hány pontban metszik egymást egy n oldalú konvex sokszög átlói, ha tudjuk, hogy bármely három átlónak nincs közös pontja?

Megoldás: Minden metszéspontnak megfeleltethető az őt megadó átlók végpontjai által alkotott pontnégyes. Könnyen látható, hogy minden csúcsnégyeshez pontosan egy metszéspont tartozik. A feladat meghatározni, hányféleképpenválaszthatunk n pont közül 4-et:

$$\binom{n}{4}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{24}.$$

5.5. Tekintsük az ábrán látható 5×7-es négyzethálót. Hány olyan téglalap rajzolható, melynek csúcsai rácspontok, élei pedig rácsvonalak?



Megoldás: Könnyen látható, hogy minden téglalapot meghatározhatunk az átlójának két végpontjával. A végpontok választására $\binom{48}{2}$ lehetőség van.

Az így kiválasztott pontpárok esetén a következőkre kell figyelni.

- A választott pontok ne essenek egy rácsegyenesre.

  Ezt legkönnyebben úgy tudjuk biztosítani, ha az összes eset közül elhagyjuk a feltételnek nem megfelelő pontokat:

  - Közös vízszintes egyenesre eső pontokat $\binom{6}{1}\cdot\binom{8}{2}$-féleképpen választhatunk.
  - Közös függőleges egyenesre eső pontokat $\binom{8}{1}\cdot\binom{6}{2}$-féleképpen választhatunk.

  Így nem egy rács-egyenesre eső pontpár választására $\binom{48}{2}-\binom{6}{1}\cdot\binom{8}{2}-\binom{8}{1}\cdot\binom{6}{2}$ lehetőségünk van.

- A fenti módszerrel minden téglalapot pontosan kétszer számoltunk, hiszen mindkét átlójának végpontjait kiválaszthattuk.

  Így az összes téglalapok száma:

$$\frac{\binom{48}{2}-\binom{6}{1}\cdot\binom{8}{2}-\binom{8}{1}\cdot\binom{6}{2}}{2}=420.$$

II.5.2. További gyakorló feladatok

5.6. Adott 10 általános helyzetű pont a síkon, vagyis olyan pontok, hogy semelyik három nincs egy egyenesen és semelyik négy nincs egy körön.

a) hány különböző egyenest határoznak meg a pontok?

b) hány különböző kört határoznak meg a pontok?

megoldás

5.7. Adott a síkon 10 pont úgy, hogy tudjuk, hogy közülük legalább 5 egy körön van. Legfeljebb hány különböző kört határoznak meg ezek a pontok?

eredmény

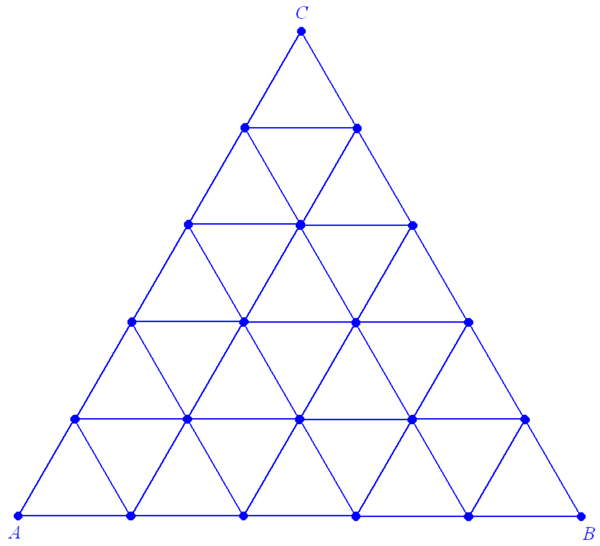
5.8. A síkon 9 párhuzamos egyenes n darab ugyancsak párhuzamos egyenest metsz, és ezek mindegyike merőleges az első 9-re. Az egyenesek összesen 756 darab téglalapot határoznak meg. Mennyi az n szám értéke?

megoldás

5.9. Tekintsük az alábbi háromszöghálót!

a) Hány, az ABC háromszöghöz hasonló háromszög rajzolható, amelynek csúcsai rácspontok? Azaz hány olyan háromszög rajzolható, melynek csúcsai rácspontok, élei pedig rácsvonalak?

b) Hány olyan háromszög rajzolható, melynek csúcsai rácspontok?



megoldás

II.6. fejezet

Fibonacci-számok

II.6.1. Kidolgozott példák

6.1. Definiáljuk az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozatot a következőképpen: $x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1}$ $(n\geq 1)$ és $x_0=c$, $x_1=d$, ahol a,b,c,d adott valós számok. Ezt másodrendű állandó együtthatós lineáris rekurziónak nevezzük.

Határozzuk meg a sorozat n-edik tagját!

Megoldás

Keressük a sorozat n-edik tagját r^n alakban. Behelyettesítve:

$$r^{n+1}=ar^n+br^{n-1}, \qquad r^{n-1}(r^2-ar-b)=0.$$

Ha r gyöke az $r^2-ar-b=0$ egyenletnek, akkor az előző egyenlőség teljesül minden $n\geq 1$-re.

1. Tegyük fel, hogy az $r^2-ar-b=0$ egyenletnek (ezt karakterisztikus egyenletnek nevezzük) két különböző valós gyöke van: r_1 és r_2. Ennek feltétele, hogy $a^2+4b>0$ legyen.

Akkor az előbbiek szerint $x_n'=r_1^n$ és $x_n''=r_2^n$ kielégítik az adott rekurziót minden $n\geq 1$-re, azaz

$$r_1^{n+1}=ar_1^n+br_1^{n-1}, \qquad r_2^{n+1}=ar_2^n+br_2^{n-1} \qquad (n\geq 1).$$

Következik, hogy ezek tetszőleges lineáris kombinációja, azaz $x_n=c_1r_1^n+c_2r_2^n$ is kielégíti a rekurziót minden $n\geq 1$-re. Valóban,

$$ax_n+bx_{n-1}=a(c_1r_1^n+c_2r_2^n)+b(c_1r_1^{n-1}+c_2r_2^{n-1})=c_1(ar_1^n+br_1^{n-1})+c_2(ar_2^n+br_2^{n-1})=$$
$$=c_1r_1^{n+1}+c_2r_2^{n+1}=x_{n+1}.$$

Az $x_0=c$ és $x_1=d$ kezdeti értékek illesztésével meghatározhatók a c_1 és c_2 számok:

$$x_0=c_1+c_2=c, \qquad x_1=c_1r_1+c_2r_2=d,$$

ahonnan

$$c_1=\frac{d-cr_2}{r_1-r_2}, \qquad c_2=\frac{cr_1-d}{r_1-r_2}, \qquad (1)$$

kihasználva, hogy $r_1\neq r_2$.

Fordítva, lássuk be, hogy minden megoldás, tehát minden, a feladat feltételeit kielégítő sorozat ilyen alakú:

$$x_n=c_1r_1^n+c_2r_2^n \qquad (n\geq 0), \qquad (2)$$

ahol r_1 és r_2 a karakterisztikus egyenlet gyökei, c_1 és c_2 pedig alkalmasan választott számok!

Legyen $(x_n)_{n\geq 0}$ egy tetszőleges megoldás és definiáljuk a a c_1 és c_2 számokat így:

$$c_1+c_2=c, \qquad c_1r_1+c_2r_2=d. \qquad (3)$$

Innen c_1-re és c_2-re éppen a fenti (1) értékeket kapjuk. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy (2) teljesül minden $n\geq 0$-ra!

Ha $n=0$, akkor $x_0=c_1+c_2=c$, $x_1=c_1r_1+c_2r_2=d$ a (3) egyenlőségek szerint. Most tegyük fel, hogy $(n-1)$-re és n-re

$$x_{n-1}=c_1r_1^{n-1}+c_2r_2^{n-1}, \qquad x_n=c_1r_1^n+c_2r_2^n.$$

Akkor $(n+1)$-re

$$x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1}=a(c_1r_1^n+c_2r_2^n)+b(c_1r_1^{n-1}+c_2r_2^{n-1})=$$

$$=c_1r_1^{n-1}(ar_1+b)+c_2r_2^{n-1}(ar_2+b)=c_1r_1^{n-1}r_1^2+c_2r_2^{n-1}r_2^2=c_1r_1^{n+1}+c_2r_2^{n+1}.$$

2. Tegyük fel, hogy az $r^2-ar-b=0$ egyenletnek két egyenlő valós gyöke van: $r_1=r_2=r$. Ennek feltétele, hogy $a^2+4b=0$ legyen. Igazoljuk, hogy ekkor

$$x_n=c_1r^n+c_2nr^n=(c_1+c_2n)r^n \qquad (n\geq 0),$$

ahol c_1 és c_2 a kezdeti értékek illesztésével határozhatók meg.

3. Mit mondhatunk abban az esetben, ha a karakterisztikus egyenletnek komplex gyökei vannak?

6.2. Alkalmazzuk az előző feladat megoldásában szereplő módszert a Fibonacci-sorozat és a Lucas-sorozat n-edik tagjának meghatározására (lásd elméleti rész, 14. fejezet vége)!

Megoldás

Ha az előző feladatban $a=b=1$, $c=0$, $d=1$ akkor visszakapjuk a Fibonacci-sorozatot. Itt a karakterisztikus egyenlet $r^2-r-1=0$. Ennek gyökei: $r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Következik, hogy $F_n=c_1r_1^n+c_2r_2^n$ és a kezdeti értékekre: $F_0=c_1+c_2=0$, $F_1=c_1r_1+c_2r_2=1$. Innen $c_1=1/\sqrt{5}$, $c_2=-1/\sqrt{5}$ és a Binet-képletet kapjuk:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad (n\geq 0).$$

Tekintsük az $(L_n)_{n\geq 0}$, $L_{n+1}=L_n+L_{n-1}$ $(n\geq 1)$, $L_0=2$, $L_1=1$ Lucas-sorozatot. Itt $a=b=1$, $c=2$, $d=1$. A karakterisztikus egyenlet most is $r^2-r-1=0$, ennek gyökei: $r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Kapjuk, hogy $L_n=c_1r_1^n+c_2r_2^n$ és itt a kezdeti értékekre: $L_0=c_1+c_2=2$, $L_1=c_1r_1+c_2r_2=1$. Innen $c_1=c_2=1$ és következik, hogy:

$$L_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (n\geq 0).$$

6.3. Tekintsük újra az

$$\begin{aligned} &x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} \quad n \geq 1 \\ &x_0 = c, \quad x_1 = d \end{aligned}$$

másodrendű állandóegyütthatós lineáris rekurziót, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és $a^2 + 4b > 0$.

a) Igazoljuk, hogy ha $k \in \mathbb{R}$ a

$$k^2 - ak - b = 0 \tag{*}$$

egyenlet gyöke, akkor

$$x_{n+1} - k \cdot x_n = (a-k)(x_n - k \cdot x_{n-1}).$$

b) Jelölje k_1 és k_2 a (*) egyenlet gyökeit, melyekre a feltétel alapján $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ és $k_1 \neq k_2$. Igazoljuk, hogy

$$x_{n+1} - k_1 \cdot x_n = k_2^n \cdot (d - k_1 \cdot c), \quad \text{és} \quad x_{n+1} - k_2 \cdot x_n = k_1^n \cdot (d - k_2 \cdot c).$$

c) Igazoljuk, hogy a fenti jelölésekkel

$$x_n = \frac{k_1^n \cdot (d - k_2 \cdot c) - k_2^n \cdot (d - k_1 \cdot c)}{k_1 - k_2} \quad n \geq 0.$$

Megoldás

a)

Bizonyítás. A (*) egyenlet átrendezéséből: $k \cdot (k-a) = k^2 - ak = b \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{b}{k-a}$.

$$x_{n+1} - k \cdot x_n = a \cdot x_n + b \cdot x_{n-1} - k \cdot x_n = (a-k) \cdot \left(x_n + \frac{b}{a-k} x_{n-1} \right) =$$

$$= (a-k) \cdot \left(x_n - \underbrace{\frac{-b}{a-k}}_{=k} x_{n-1} \right) = (a-k) \cdot (x_n - k \cdot x_{n-1}).$$

∎

b)

1. Megoldás

Bizonyítás. Az előző pontban bizonyítottak alapján:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - k_1 \cdot x_n &= (a-k_1)(x_n - k_1 \cdot x_{n-1}) = (a-k_1)^2 (x_{n-1} - k_1 \cdot x_{n-2}) = \cdots = \\ &= (a-k_1)^n (x_1 - k_1 \cdot x_0) = (a-k_1)^n (d - k_1 \cdot c). \end{aligned}$$

A Viete-formula alapján igaz: $k_1 + k_2 = a \quad \Leftrightarrow \quad k_2 = a - k_1$, amit az előző összefüggésbe visszaírva az állítás megkapható:

$$x_{n+1} - k_1 \cdot x_n = k_2^n \cdot (d - k_1 \cdot c).$$

∎

2. Megoldás

Bizonyítás. n-szerinti teljes indukcióval:

i) $n=0$ esetén az állítás igaz, hiszen

$$x_1-k_1\cdot x_0=d-k_1\cdot c=k_2^0\cdot(d-k_1\cdot c)=d-k_1\cdot c.$$

ii) Tegyük fel, hogy valamely $n\in\mathbb{N}$ esetén az állítás teljesül, azaz

$$x_n-k_1\cdot x_{n-1}=k_2^{n-1}\cdot(d-k_1\cdot c).$$

iii) Igazoljuk $n+1$-re:

$$\begin{aligned}
x_{n+1}-k_1\cdot x_n &= a\cdot x_n+b\cdot x_{n-1}-k_1\cdot x_n=(a-k_1)\cdot x_n+b\cdot x_{n-1}=\\
&= (a-k_1)\cdot\left(x_n+\underbrace{\frac{b}{a-k_1}}_{-k_1}\cdot x_{n-1}\right)=(a-k_1)\cdot(x_n-k_1\cdot x_{n-1})=\\
&= \underbrace{(a-k_1)}_{k_2}\cdot(k_2^{n-1}(d-k_1c))=k_2^n(d-k_1c).
\end{aligned}$$

A másik állítás igazolása hasonlóan végezhető. ∎

c)

1. Megoldás

Bizonyítás. Az előző pont két állításából kifejezve x_{n+1}-et:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= k_1x_n+k_2^n(d-k_1c)\\
x_{n+1} &= k_2x_n+k_1^n(d-k_2c)
\end{aligned}$$

majd a két egyenlőtlenséget kivonjuk egymásból:

$$0=(k_1-k_2)x_n+k_2^n(d-k_1c)-k_1^n(d-k_2c),$$

ahonnan x_n kifejezhető:

$$x_n=\frac{k_1^n(d-k_2c)-k_2^n(d-k_1c)}{k_1-k_2}.$$

∎

2. Megoldás

Bizonyítás. n-szerinti teljes indukcióval:

i) $n=0$ és $n=1$ esetén az állítás igaz, hiszen
$n=0:$

$$x_0=c=\frac{k_1^0(d-k_2c)-k_2^0(d-k_1c)}{k_1-k_2}=\frac{d-k_2c-d+k_1c}{k_1-k_2}=c.$$

$n=1:$

$$x_1=d=\frac{k_1(d-k_2c)-k_2(d-k_1c)}{k_1-k_2}=\frac{k_1d-k_1k_2c-k_2d+k_1k_2c}{k_1-k_2}=d.$$

ii) Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén az állítás teljesül, minden $\mathbb{N} \ni n_0 \leq n$, azaz

$$x_n = \frac{k_1^n(d-k_2c)-k_2^n(d-k_1c)}{k_1-k_2}$$

és

$$x_{n-1} = \frac{k_1^{n-1}(d-k_2c)-k_2^{n-1}(d-k_1c)}{k_1-k_2}.$$

iii) Igazoljuk $n+1$-re:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= ax_n+bx_{n-1} = a\frac{k_1^n(d-k_2c)-k_2^n(d-k_1c)}{k_1-k_2}+b\frac{k_1^{n-1}(d-k_2c)-k_2^{n-1}(d-k_1c)}{k_1-k_2} = \\
&= \frac{d-k_2c}{k_1-k_2}\cdot(ak_1^n+bk_1^{n-1})-\frac{d-k_1c}{k_1-k_2}\cdot(ak_2^n+bk_2^{n-1}) = \\
&= \frac{d-k_2c}{k_1-k_2}\cdot k_1^{n-1}\cdot\underbrace{(ak_1+b)}_{k_1^2}-\frac{d-k_1c}{k_1-k_2}\cdot k_2^{n-1}\cdot\underbrace{(ak_2+b)}_{k_2^2} = \\
&= \frac{k_1^{n+1}(d-k_2c)-k_2^{n+1}(d-k_1c)}{k_1-k_2}.
\end{aligned}$$

■

6.4. Írjuk fel a fenti összefüggés alapján a Fibonacci-számokra vonatkozó Binet-képletet!

Megoldás: $a=b=d=1,\ c=0$:

$$k^2-k-1=0 \quad\Rightarrow\quad k_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}$$

$$F_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1-\sqrt5}{2}\cdot 0\right)-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1+\sqrt5}{2}\cdot 0\right)}{\frac{1+\sqrt5}{2}-\frac{1-\sqrt5}{2}}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5}=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\left(\vartheta^n-\overline{\vartheta}^n\right),$$

ahol $\vartheta=\frac{1+\sqrt5}{2}$ és $\overline{\vartheta}=\frac{1-\sqrt5}{2}$.

6.5. Az

$$L_{n+1}=L_n+L_{n-1},\quad L_0=2,\ L_1=1$$

rekurzió által meghatározott sorozat elemeit *Lucas-számok*nak nevezzük. Írjunk fel a Lucas-számok kiszámítására explicit formulát!

Megoldás: $a=b=d=1,\ c=2$:

$$k^2-k-1=0 \quad\Rightarrow\quad k_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}$$

$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1-\sqrt5}{2}\cdot 2\right)-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1+\sqrt5}{2}\cdot 2\right)}{\frac{1+\sqrt5}{2}-\frac{1-\sqrt5}{2}} = \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\cdot\sqrt5-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\cdot(-\sqrt5)}{\sqrt5}=\vartheta^n+\overline{\vartheta}^n.
\end{aligned}$$

6.6. Igazoljuk, hogy a Fibonacci-számokra (F_n) és a Lucas-számokra (L_n) igazak a következők:

a) $F_n \cdot L_n = F_{2n}, \quad n \geq 0$

b) $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}, \quad n \geq 1$

c) $L_{n+1} + L_{n-1} = 5 \cdot F_n, \quad n \geq 1.$

Megoldás:

a) $F_n \cdot L_n = F_{2n}$

Bizonyítás.

$$F_n \cdot L_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\vartheta^n - \overline{\vartheta}^n\right) \cdot \left(\vartheta^n + \overline{\vartheta}^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\vartheta^{2n} - \overline{\vartheta}^{2n}\right) = F_{2n}$$

■

b) $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$

Bizonyítás. n-szerinti teljes indukcióval:

i) $n = 1$ esetén az állítás igaz, hiszen
$n = 1:$

$$L_1 = 1 = F_1 + F_0 = 1 + \cdot 0 = 1$$

ii) Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az állítás teljesül, minden $\mathbb{N}^* \ni n' \leq n$, azaz

$$L_{n'} = F_{n'} + F_{n'-1}$$

iii) Igazoljuk $n+1$-re:

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1} = F_{n+1} + F_{n-1} + F_n + F_{n-2} = \underbrace{F_{n+1} + F_n}_{F_{n+2}} + (\underbrace{F_{n-1} + F_{n-2}}_{F_n}) = F_{(n+1)+1} + F_{(n+1)-1}.$$

■

c) $L_{n+1} + L_{n-1} = 5 \cdot F_n$

1. Megoldás

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} L_{n+1} + L_{n-1} &\overset{b)}{=} (F_{n+2} + F_n) + (F_n + F_{n-2}) \overset{\text{def}}{=} (F_{n+1} + F_n + F_n) + (F_n + F_n - 2) = \\ &= (F_n + F_{n-1} + F_n + F_n) + (F_n + F_n - 2) = 4F_n + \underbrace{F_{n-1} + F_{n-2}}_{F_n} = 5F_n. \end{aligned}$$

■

2. Megoldás

Bizonyítás. n-szerinti teljes indukcióval:

i) $n = 1$ esetén az állítás igaz, hiszen

$$L_2 + L_0 = 2 + 3 = 5 \cdot F_1 = 5 \cdot 1 = 5.$$

ii) Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az állítás teljesül, minden $\mathbb{N}^* \ni n' \leq n$, azaz

$$L_{n'+1} + L_{n'-1} = 5 \cdot F_{n'}$$

iii) Igazoljuk $n+1$-re:

$$\begin{aligned} 5F_{n+1} &= 5\cdot(F_n + F_{n-1}) = 5F_n + 5F_{n-1} = L_{n+1} + L_{n-1} + L_n + L_{n-2} = \\ &= \underbrace{L_{n+1} + L_n}_{L_{n+2}} + \underbrace{L_{n-1} + L_{n-2}}_{L_n} = L_{(n+1)+1} + L_{(n+1)-1}. \end{aligned}$$

■

6.7. a) Van 10 forintunk. Minden nap pontosan egyet vásárolunk az alábbi termékekből

perec	1Ft
cukorka	2Ft
fagylalt	2Ft.

Határozzuk meg, hányféleképpen költhetjük el a pénzünket!

b) Az előző feladat helyett vizsgáljuk a problémát általánosan. Jelölje M_n azt, ahányféleképpen elkölthetünk n forintot. Írjuk fel az M_n kiszámítására szolgáló formulát!

Megoldás: A b) feladatot fogjuk megoldani, melynek speciális eseteként válaszolhatunk az a)-ban feltett kérdésre.

Jelölje M_k azt ahányféleképpen elköltetünk k forintot. Vizsgáljuk a lehetőségeinket az első napon:

- perecet veszünk, a maradék pénzt M_{n-1}-féleképpen lehet elkölteni,
- cukrot veszünk, a maradék pénzt M_{n-2}-féleképpen lehet elkölteni,
- fagylaltot veszünk, a maradék pénzt M_{n-2}-féleképpen tudjuk elkölteni.

A fentiekből kiderül, hogy

$$M_n = M_{n-1} + 2M_{n-2},$$

azaz a keresett érték egy másodrendű rekurzióval adott sorozat n-edik eleme. Ehhez két kezdőelemre van szükség:

$$M_0 = M_1 = 1.$$

Ahonnan a sorozat elemei számolhatók:

$$M_2 = 3,\ M_3 = 5,\ M_4 = 11,\ M_5 = 21,\ M_6 = 43,\ M_7 = 85,\ M_8 = 171,\ M_9 = 341,\ M_{10} = 683.$$

Írjuk fel az explicit formulát:
$a = 1,\ b = 2,\ M_0 = c = 1,\ M_1 = d = 1$

$$k^2 - ak - b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 - k - 2 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{array}{rcr} k_1 &=& 2 \\ k_2 &=& -1 \end{array}$$

Így az n-edik elem közvetlenül számolható:

$$M_n = \frac{k_1^n(d - k_2c) - k_2^n(d - k_1c)}{k_1 - k_2} = \frac{2^n(1+1) - (-1)^n(1-2)}{2-(-1)} = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} - (-1)^{n+1}\right)$$

Így

$$M_{10} = \frac{1}{3}\left(2^{11} - (-1)^{11}\right) = \frac{1}{3}(2048+1) = \frac{2049}{3} = 683.$$

II.6.2. További gyakorló feladatok

6.8. Adjuk meg az $a_{n+1} = 5 \cdot a_n - 2 \cdot a_{n-1}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ rekurzív sorozat explicit alakját!

útmutatás

6.9. Adjuk meg az $a_{n+1} = 2 \cdot a_n - a_{n-1}$, $a_0 = -2$, $a_1 = 3$ rekurzív sorozat explicit alakját!

útmutatás

6.10. Adjuk meg az $a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 3 \cdot a_{n-1}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ rekurzív sorozat explicit alakját!

útmutatás

6.11. Hányféleképpen lehet felmenni n lépcsőfokon, ha egyszerre egy vagy két fokot léphetünk?

megoldás

6.12. Hányféleképpen lehet 2×1-es dominókkal lefedni egy 2×15-ös táblázatot? (A dominók nem lóghatnak ki a tábláról és nem fedhetik egymást.)

útmutatás

6.13. Piros és kék golyókból 10 golyó hosszúságú láncot készítünk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha nem szeretnénk, hogy kék golyók kerüljenek egymás mellé?

útmutatás

6.14. Ismét láncot fűzünk. Most piros, kék és sárga gyöngyökből. Hányféleképpen készíthetünk n hosszú láncot, ha most sem szeretnénk, hogy kék golyók kerüljenek egymás mellé?

útmutatás

6.15. Igazoljuk a Fibonacci-számokra vonatkozó alábbi állításokat:

a) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1 \; n \geq 1$,

b) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} \; n \geq 1$,

c) $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1 \; n \geq 1$,

d) $F_1 - F_2 + F_3 - \cdots + (-1)^{n+1} \cdot F_n = (-1)^{n+1} \cdot F_{n-1} + 1 \; n \geq 1$,

e) $F_{n+m} = F_{n-1} \cdot F_m + F_n \cdot F_{m+1} \; n, m \geq 1$,

f) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} - 1 \; n \geq 1$

g) $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ ($n \geq 1$, Cassini-képlet),

h) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \vartheta$.

megoldások, útmutatások

6.16. Igazoljuk, hogy az F_n Fibonacci-számokra:

a) $n \mid m$ akkor és csak akkor teljesül, ha $F_n \mid F_m$ $(n, m \geq 1)$,

b) $(F_n, F_m) = F_{(n,m)}$ $(n, m \geq 1)$, ahol (u, v) az u és v számok legnagyobb közös osztója.

megoldás

6.17. Igaz-e, hogy az F_n Fibonacci-számokra ha F_n prím, akkor n is prím?

megoldás

II.7. fejezet

Catalan-számok

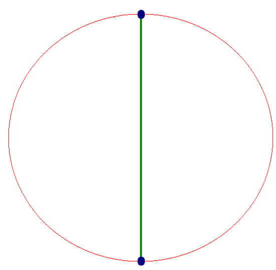
II.7.1. Kidolgozott példák

7.1. Egy kör alakú asztal körül $2n$ személy ül. Hányféleképpen alkothatnak ezek párokat úgy, hogy az egy párban levők kezet foghassanak anélkül, hogy egy másik pár keze alatt vagy felett át kellene nyúlniuk. (Az asztal felett átnyúlhatnak és különbözőnek tekintjük az elforgatásból származó elrendezéseket.)

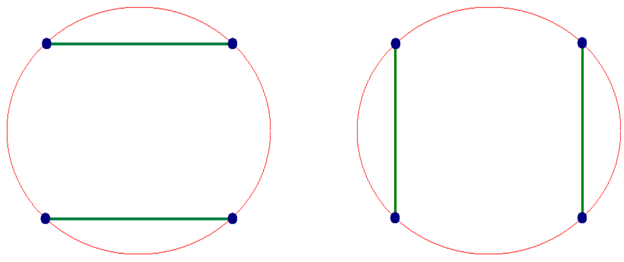
Megoldás: Jelölje x_n a lehetőségek számát.

Vizsgáljunk meg és rajzoljunk le néhány esetet:

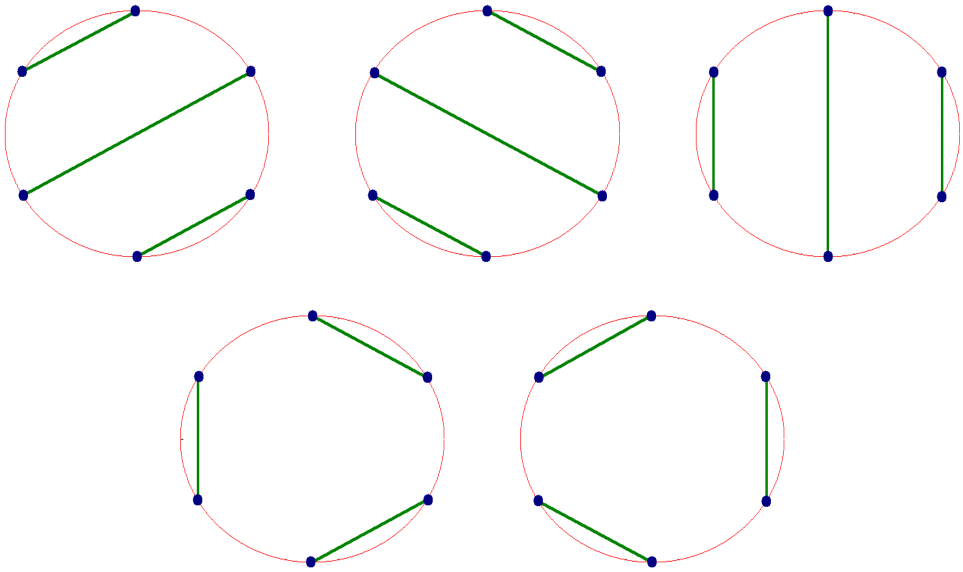
$n = 1$ esetén 1 lehetőség van ($x_1 = C_1$):



$n = 2$ esetén a következő két párosítás lehetséges ($x_2 = C_2$):



Ha $n = 3$, akkor 5 lehetőség van ($x_3 = C_3$):

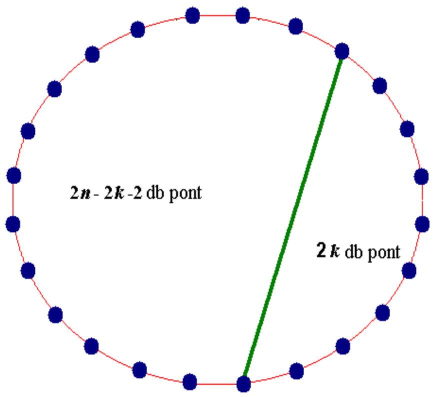


$n=4$ esetén 14 megfelelő párosítás van ($x_4=C_4$). Rajzoljuk fel ezeket!

Általános esetben egy megfelelő párt összekötve a $2n$-szög megmaradt csúcsait két osztályra bonthatjuk, aszerint, hogy a berajzolt húr melyik oldalán helyezkednek el a körben. Csak azok a párosítások lesznek megfelelőek, melyeknél nem párosítunk különböző osztályba tartozó pontokat. Így a Catalan számokéhoz hasonló rekurzió írható fel:

$$x_n=\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot x_{n-k-1}.$$

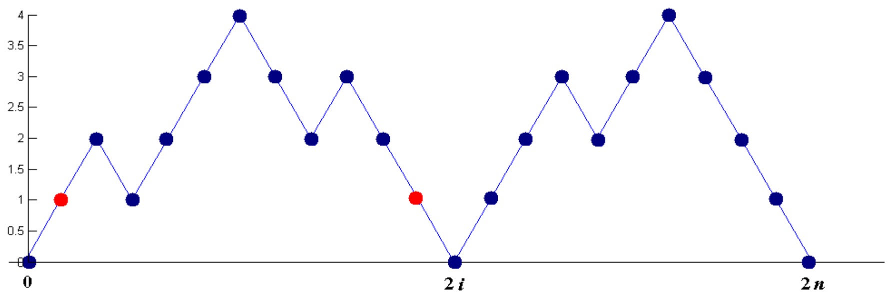
Mivel a kezdő elemek is megegyeznek, ezért $x_n=C_n$.



7.2. Hányféleképpen juthatunk el a koordinátarendszerben a (0,0) pontból a (2n,0) pontba úgy, hogy lépéseink az $f=(1,1)$ illetve az $\ell=(1,-1)$ vektorok lehetnek és ne menjünk az x-tengely alá.

1. Megoldás:

Az ilyen utakat Dyck utaknak nevezzük. Legyen az $(2i,0)$ az első pont, ahol az út visszatér az x-tengelyre. Nyilvánvaló, hogy a (0,0) pontból csak f lépéssel indulhattunk, míg a $(2i,0)$ pontba egy ℓ lépéssel érkezhettünk meg. Ebből az is látható, hogy az (1,1) és $(2i-1,1)$ pontok közti út is egy Dyck-út, méghozzá éppen $2(i-1)$ hosszú. A $(2i,0)$ és $(2n,0)$ pontok között pedig egy $2(n-i)$ hosszú Dyck-út megy:



Jelöljük y_n-nel a $2n$ hosszú Dyck-utak számát. A fentiek alapján a következő rekurzió írható fel:

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \cdot y_{n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot y_{n-1-i}.$$

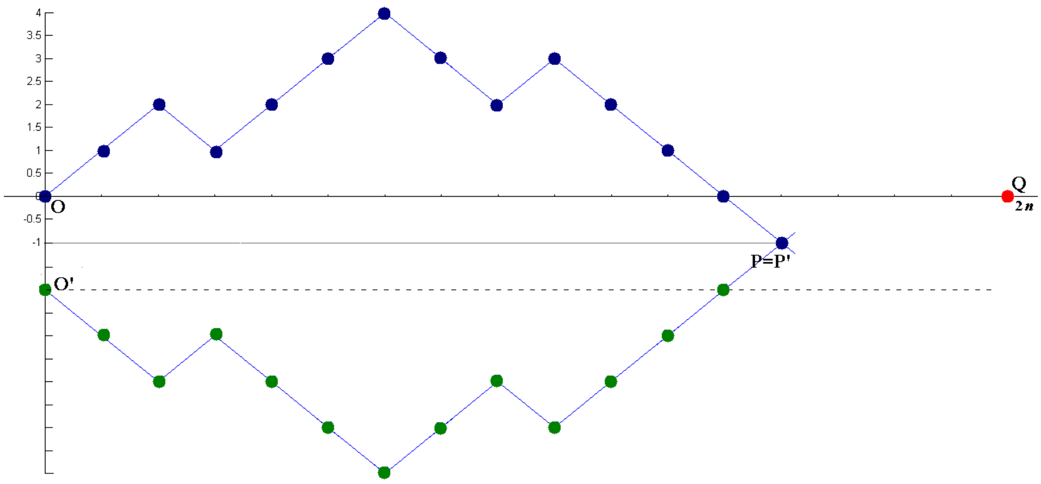
Mivel 0, illetve 2 hosszúságú Dyck-út egyaránt 1 darab van és a fenti rekurzió megegyezik a Catalan-számokra felírható rekurzióval, ezért:

$$y_n = C_n.$$

2. Megoldás: A megoldás során a fent bevezetett y_n kiszámítására direkt formulát fogunk levezetetni, amely az előző megoldás alapján alkalmas a Catalan-számok közvetlen kiszámítására is.

A (0,0) pontból a ($2n$,0) pontba $2n$ lépéssel tudunk eljutni, melyek közül n darab f- és n darab ℓ-típusú. Így az összesen $\binom{2n}{n}$ féle út rajzolható.

Számoljuk össze a rossz utakat! Ezek azok, amelyek átlépik az x-tengelyt, azaz van közös pontjuk az $y = -1$ egyenessel. Az első ilyen metszéspont legyen P. Az OP utat tükrözzük az $y = -1$ egyenesre.



Vegyük az $O'PQ$ utat. Könnyen látható, hogy az $O'Q$ utak kölcsönösen megfeleltethetők az OQ rossz utaknak. Az O' pont koordinátái $(0, -2)$, így az $O'Q$ út során $2n$ lépést teszünk, melyek közül $n+1$ darab f- és $n-1$ darab ℓ-típusú. Így $\binom{2n}{n+1}$ rossz út van.

A jó utak száma – és így az n-edik Catalan-szám – az alábbi módon számolható:

$$y_n = C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\cdot\binom{2n}{n}.$$

Ez utóbbi formulát előadáson közvetlenül igazolták.

7.3. Igazoljuk, hogy a Catalan-számokra

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \quad (n \geq 0).$$

Megoldás:

Az előző feladat két megoldása alapján nyilvánvaló.

7.4. Igazoljuk, hogy a Catalán számokra fennáll az

$$(n+2)C_{n+1} = (4n+2)C_n \quad (n \geq 0)$$

rekurzió.

Megoldás:

Fel fogjuk használni, az előző feladatban kapott direkt képletet, mely szerint:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\cdot\binom{2n}{n}.$$

Így a bizonyítandó állítás baloldala:

$$(n+2)\cdot C_{n+1} = (n+2)\cdot\frac{1}{(n+1)+1}\cdot\binom{2(n+1)}{n+1} = (n+2)\cdot\frac{1}{(n+1)+1}\cdot\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+1)!}$$

Míg a jobboldal az alábbi alakban írható:

$$\begin{aligned}(4n+2)\cdot C_n &= (4n+2)\cdot\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = 2\cdot(2n+1)\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = \\ &= 2\cdot\frac{(2n+1)!}{(n+1)!\cdot n!}\cdot\frac{n+1}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+1)!}.\end{aligned}$$

Ahonnan az állítás következik.

7.5. Egy mozipénztárnál $2n$ gyerek áll sorba 10Ft-os jegyekért. Közülük n-nél 10Ft-os van, a többieknek pedig 20-asa van. A kasszában a nyitáskor nem volt váltópénz. Hány olyan sorrendje van a gyerekeknek, amikor a sor nem akad el, azaz a pénztáros mindig tud visszaadni, ha kell?

Megoldás:

Ez a feladat is visszavezethető a Dyck-utak problémájára. Jelöljük f lépéssel, ha valaki 10Ft-osssal fizet és ℓ-lépéssel, ha 20-assal. Ekkor a pontok y-koordinátái megmutatják, az aktuálisan a kasszában lévő 10 forintosok számát. Ez azt is jelenti, hogy az út nem mehet az x-tengely alá és amikor mindenki megvette a jegyét a pénztárban csak 20 forintosok maradnak, azaz valóban Dyck-útról van szó.

7.6. 15 fiú és 12 lány hányféleképpen mehet be egy táncterembe, ha sosem lehet bent több lány mint fiú?

Megoldás:

Ismét az előző problémakörre visszavezethető feladatról van szó. Jelöljük f lépéssel, ha fiú lép a terembe és ℓ-lépéssel, ha lány. Ekkor a pontok y-koordinátái megmutatja, hogy aktuálisan mennyivel van több fiú a teremben, mint lány. Ez azt is jelenti, hogy úgy szeretnénk a (0,0) pontból a $(15+12,\ 15-12)=(27,\ 3)$ pontba eljutni, hogy közben az út nem mehet az x-tengely alá.

Az összes utak száma: $\binom{27}{12}$.

Rossz utak száma (A tükrözéses módszer alapján) éppen annyi, ahány út megy a $(0,\ -2)$ pontból a $(27,\ 3)$ pontba. Ezek száma: $\binom{27}{11}$.

Így a feladatnak megfelelő utak száma: $\binom{27}{12}-\binom{27}{11}$.

7.7. Általánosítsuk a feladatot n lány és $n+m$ fiú esetére!

Megoldás:

Most a $(0,\ 0)$ pont és a $(2n+m, m)$ pont között kell olyan utakat felrajzolni, melyek nem lépik át az x-tengelyt. Ezek száma a fentiek alapján:

$$\binom{2n+m}{n+m}-\binom{2n+m}{n+m+1}$$

7.8. n hangya mászik egy szűk járatban, melyből középen egy zsákutca ágazik ki. A járat és a mellékág olyan szűkek, hogy két hangya már nem fér el egymás mellett, azaz nem előzhetik meg egymást. (Aki bemegy a mellékágba, azt akárhányan meg tudják előzni, de a mellékágban is egyszerre legfeljebb egy hangya tartózkodhat.) Hányféle sorrendben jöhetnek ki a hangyák?

Megoldás:

Jelöljük X_n-nel azt, hogy n darab hangya hányféle sorrendben jöhet ki a járatból. Vizsgáljunk meg néhány konkrét esetet:

Ha $n=0$, akkor nyilvánvalóan csak egyetlen sorrend lehetséges, mint ahogy $n=1$ esetén is. Azaz $X_0=X_1=1$.

Ha $n=2$, akkor két lehetőség van $(X_2=2)$:

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

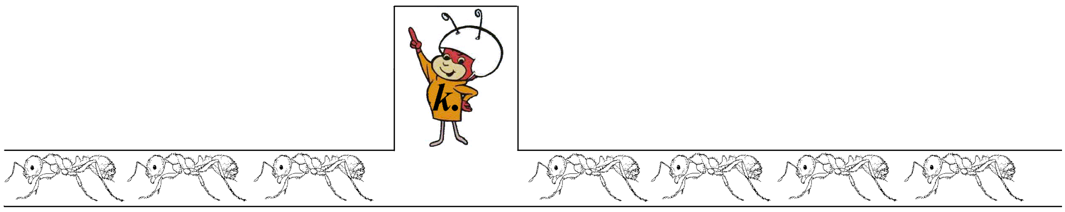
$n=3$ esetén 4 lehetőség $(X_3=4)$:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$n = 4$: 8 lehetőség ($X_4 = 8$):

1	2	3	4
1	2	4	3
1	3	2	4
1	3	4	2
2	1	3	4
2	1	4	3
2	3	1	4
2	3	4	1

A fentiek alapján megfigyelhető, hogy ha a k-adik hangya az első aki betér a zsákutcába, akkor az első $k-1$ hangya az eredeti sorrendben jön ki, majd a $k+1$-edik következik, azaz ilyenkor a sorrend első k helyén meghatározott hangyák állnak. A maradék $n-k$ darab hangya X_{n-k} sorrendben jöhet ki.



Így az összes lehetőségek számát megkapjuk, ha az előbbi eseteket összegezzük, míg a k befutja az összes lehetséges értéket. Noha az utolsó hangyának nincs értelme bemenni a zsákutcába, mégis érdemes az összegbe belevenni, mert ez azt az esetet fogja takarni, amikor a hangyák az eredeti sorrendben jöttek ki az alagútból. Így X_n kiszámítására az alábbi rekurzió adódik:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} X_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} X_k \qquad X_0 = 1.$$

A rekurzió egyszerűen feloldható:

$$X_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k = X_{n-1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} X_k}_{X_{n-1}} = 2 \cdot X_{n-1} = \cdots = 2^{n-1} \cdot X_1 = 2^{n-1} \qquad n \geq 1.$$

II.7.2. További gyakorló feladatok

7.9. Az origóból indulva, mindig jobbra vagy felfelé lépve egyet-egyet hányféleképpen juthatunk el a (7,11) pontba úgy, hogy sosem lépünk olyan helyre, ahol $y = x - 3$?

útmutatás

7.10. Hány olyan sorozat képezhető n darab $+1$ és n darab -1 felhasználásával, melyben minden részletösszeg ≥ 0?

útmutatás

7.11. Igazoljuk, hogy $2n+1$ elemű ±1 tagokból álló sorozatok száma, melyben a teljes összeg 1 és minden részletösszeg pozitív
$$\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}.$$
Miköze ezeknek a Catalan-számokhoz?

útmutatás

II.8. fejezet

Stirling-számok

II.8.1. Kidolgozott példák

8.1. Adjuk meg az $A = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5\}$ halmaz 3 részhalmazra való partícióit.

Megoldás:

A halmazt vagy két egyelemű és egy háromelemű halmaz uniójára, vagy egy egyelemű és két kételemű halmaz uniójára bontjuk. Az első fajta felbontásból

$$\frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{3}}{2} = 10,$$

míg a második típusból

$$\frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{2} = 15,$$

felbontás állítható elő:

$$\begin{array}{ccccc}
\{1\} & \cup & \{2\} & \cup & \{3,\ 4,\ 5\} \\
\{1\} & \cup & \{3\} & \cup & \{2,\ 4,\ 5\} \\
\{1\} & \cup & \{4\} & \cup & \{2,\ 3,\ 5\} \\
\{1\} & \cup & \{5\} & \cup & \{2,\ 3,\ 4\} \\
\{2\} & \cup & \{3\} & \cup & \{1,\ 4,\ 5\} \\
\{2\} & \cup & \{4\} & \cup & \{1,\ 3,\ 5\} \\
\{2\} & \cup & \{5\} & \cup & \{1,\ 3,\ 4\} \\
\{3\} & \cup & \{4\} & \cup & \{1,\ 2,\ 5\} \\
\{3\} & \cup & \{5\} & \cup & \{1,\ 2,\ 4\} \\
\{4\} & \cup & \{5\} & \cup & \{1,\ 2,\ 3\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\{1\} & \cup & \{2,\ 3\} & \cup & \{4\ 5\} \\
\{1\} & \cup & \{2,\ 4\} & \cup & \{3\ 5\} \\
\{1\} & \cup & \{2,\ 5\} & \cup & \{3\ 4\} \\
\{2\} & \cup & \{1,\ 3\} & \cup & \{4\ 5\} \\
\{2\} & \cup & \{1,\ 4\} & \cup & \{3\ 5\} \\
\{2\} & \cup & \{1,\ 5\} & \cup & \{3\ 4\} \\
\{3\} & \cup & \{2,\ 1\} & \cup & \{4\ 5\} \\
\{3\} & \cup & \{2,\ 4\} & \cup & \{1\ 5\} \\
\{3\} & \cup & \{2,\ 5\} & \cup & \{1\ 4\} \\
\{4\} & \cup & \{2,\ 3\} & \cup & \{1\ 5\} \\
\{4\} & \cup & \{2,\ 1\} & \cup & \{3\ 5\} \\
\{4\} & \cup & \{2,\ 5\} & \cup & \{3\ 1\} \\
\{5\} & \cup & \{2,\ 3\} & \cup & \{4\ 1\} \\
\{5\} & \cup & \{2,\ 4\} & \cup & \{3\ 1\} \\
\{5\} & \cup & \{2,\ 1\} & \cup & \{3\ 4\}
\end{array}$$

8.2. Készítsük el a másodfajú Stirling-számok táblázatát és olvassuk le, hogy az előző feladat során hány partíciót kellett előállítani: $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\}$.

Megoldás:

Egy n-elemű halmaz k részhalmazra való particionálásainak számát *másodfajú Stirling-szám*nak nevezzük és $S(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$-val jelöljük. Ezek kiszámítására az alábbi rekurzió írható fel:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

Bizonyítás. Tekintsük a $H_n = \{1,\ 2,\ \ldots, n\}$ halmaz k-részhalmazra való particionálásait. Két esetet lehet megkülönböztetni:

- Van olyan egyelemű részhalmaz, amely az n-edik elemet tartalmazza,
- nincs ilyen részhalmaz.

Az első esetben az egyik részhalmaz már rögzített, tehát a maradék $n-1$ elemet $k-1$ részhalmazra kell bontanunk, ami $S(n-1,k-1) = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$-féleképpen tehető meg.

A második esetben először osszuk az $H_{n-1} = \{1,\ 2,\ \ldots, n-1\}$ halmaz elemeit k osztályba. Erre $S(n-1,k) = \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ lehetőségünk van. A „félretett” n-edik elemet bármelyik osztályhoz hozzávéve az eredeti halmaz egy-egy a feltételeknek megfelelő osztályozását kapjuk. Így a H_{n-1} halmaz minden osztályozásához hozzárendelhető a H_n halmaz k különböző osztályozása.

■

Mivel $S(1,1) = 1$, a fenti rekurzió alapján $S(n,k)$ számolható. A számítás megkönnyítésére a következő táblázat használható:

n \ k	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	1			
3	1	3	1		
4	1	7	6	1	
5	1	15	25	10	1

A táblázat n-edik sorának k-adik eleme éppen $S(n,k)$. A fenti rekurzió a táblázatban a következőképpen valósítható meg:

A táblázat minden eleme úgy számolható, hogy a fölötte levő elemet megszorozzuk annak oszlopindexével, majd hozzáadjuk a tőle balra elhelyezkedő elemet.

8.3. Adjuk meg azokat a harmadfokú permutációkat, melyek k=1, illetve k=2 ciklust tartalmaznak!

Megoldás:

Ha egy darab ciklust tartalmaz a permutáció, akkor a ciklus hossza három, azaz három hosszúságú ciklikus permutációk számára vagyunk kiváncsiak. (Lásd kerek asztal körüli ültetések.) Ilyen permutációból $\frac{3!}{3} = 2$ darab van.

$$(123) \qquad (132)$$

Ha két darab ciklus van a permutációban, az csak úgy lehet, hogy az egyik ciklus hossza 1, a másiké pedig 2, azaz a permutációnak pontosan egy fixpontja van. Most ezt úgy tudjuk megtenni, ha kiválasztjuk a fixpontot. Ez már a 2 hosszú ciklust egyértelműen meghatározza. Tehát 3 ilyen permutáció írható fel.

$$(1)(23) \qquad (2)(13) \qquad (3)(12)$$

8.4. Készítsük el az elsőfajú Stirling-számok táblázatát.

Megoldás:

Azoknak az n-elemű permutációknak a számát, amelyek pontosan k ciklust tartalmaznak *elsőfajú Stirling-szám*nak nevezzük és $s(n,k)=\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right]$-val jelöljük. Ezek kiszámítására az alábbi rekurzió írható fel:

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] = (n-1)\cdot\left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right]$$

Bizonyítás. Tekintsük az $1,\ 2,\ \ldots, n$ elemek permutációit. Két esetet lehet megkülönböztetni:

- Az n-edik elem fixpont, azaz (n) egy egyelemű ciklus,
- az n-edik elem nem fixpont.

Az első esetben az egyik ciklus már rögzített, tehát a maradék $n-1$ elemet $k-1$ ciklusra kell bontanunk, ami $s(n-1,k-1)=\left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right]$-féleképpen tehető meg.

A második esetben tekintsünk az $1,\ 2,\ \ldots, n-1$ elemek egy k ciklust tartalmazó permutációját. Ilyen permutáció éppen $s(n-1,k)=\left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right]$ darab van. A „félretett” n-edik elemet bármelyik elem után a permutáció ciklusokra való felbontásában, ezt $n-1$ féleképpen tehetjük meg. Így egy olyan n-edfokú permutációhoz jutunk, melynek n nem fixpontja. Azaz minden pontosan k ciklust tartalmazó permutációhoz $n-1$ darab olyan n-edfokú permutáció tartozik, melyben n nem fixpont. ■

Mivel $s(1{,}1)=1$, a fenti rekurzió alapján $s(n,k)$ számolható. A számítás megkönnyítésére a következő táblázat használható:

		k				
		1	2	3	4	5
	1	1				
	2	1	1			
n	3	2	3	1		
	4	6	11	6	1	
	5	24	50	35	10	1

A táblázat n-edik sorának k-adik eleme éppen $s(n,k)$. A fenti rekurzió a táblázatban a következőképpen valósítható meg:

A táblázat minden eleme úgy számolható, hogy a fölötte levő elemet megszorozzuk annak sorindexével, majd hozzáadjuk a tőle balra elhelyezkedő elemet.

8.5. Adjuk meg azokat a negyedfokú permutációkat, melyek $k=2$, illetve $k=3$ ciklust tartalmaznak!

Megoldás:

Ha két darab ciklus van a permutációban, az úgy lehet, hogy az egyik ciklus hossza 1, a másiké pedig 3, vagy mindegyik 2 elemű. Számoljuk ki, hány ilyen permutáció van az első esetben a fixpont 4-féleképpen választható. A maradék három elemből mondjuk a harmadik feladat meggondolásai alapján 2-féleképpen készíthetünk 3 hosszúságú ciklust, így az $(a)(bcd)$ típusú permutációk száma $4 \cdot 2 = 8$. A második esethez tartozó permutációkat meghatározhatjuk azáltal, hogy kiválasztjuk az első ciklusban szereplő 2 elemet (a sorrendre való tekintet nélkül), ami $binom42{=}6$-féleképpen tehető meg. Ilyenkor viszont a két ciklus sorrendje fontos lenne (pl $(ab)(cd)$ és $(cd)(ab)$eseteket különbözőnek tekintenénk), azaz minden permutációt pontosan kétszer számoltunk. Így a pontosan két ciklust tartalmazó 4-edfokú permutációk száma $8+$ $+3=11$.

(1)(234) (1)(243) (2)(134) (2)(143) (3)(124) (3)(142) (4)(123) (4)(132)

illetve

(12)(34) (13)(24) (14)(23)

II.8.2. További gyakorló feladatok

8.6. Igazoljuk a másodfajú Stirling-számokra vonatkozó alábbi rekúrziót! Ha $1 \le k \le n$, akkor

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n-1}{j-1} \left\{ {n-j \atop k-1} \right\}.$$

megoldás

8.7. Igazoljuk a Bell-számokra vonatkozó alábbi rekúrziót!

Ha $n, m \ge 0$, akkor a $0^0 = 1$ konvenció használatával

$$B(n+m) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} j^{n-k} \left\{ {m \atop j} \right\} \binom{n}{k} B(k).$$

megoldás

8.8. Igazoljuk, hogy a másodfajú Stirling-számokra

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{\substack{a_1+\ldots+a_k=n \\ a_1,\ldots,a_k \ge 1}} \frac{n!}{k!\, a_1! \cdots a_k!}.$$

megoldás

8.9. Igazoljuk, hogy minden $n \ge k \ge 1$ esetén

$$\sum_{\substack{x_1+\ldots+x_k=n \\ x_1,\ldots,x_k \ge 1}} \frac{1}{x_1 \cdots x_k} = \frac{k!}{n!} \left[{n \atop k} \right],$$

ahol $\left[{n \atop k} \right]$ az elsőfajú Stirling-számok. megoldás

8.10. Igazoljuk, hogy a $B(n)$ Bell-számokra $B(n) < n!$ minden $n \ge 3$-ra. útmutatás

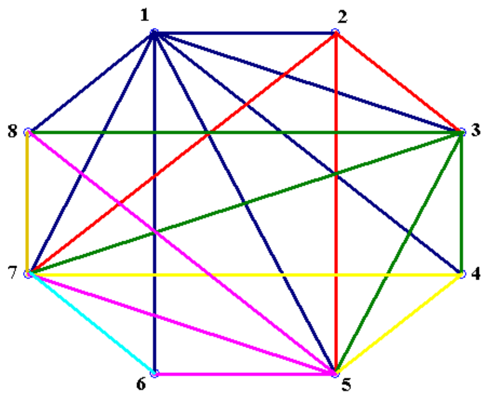
II.9. fejezet

Gráfelméleti fogalmak

II.9.1. Kidolgozott példák

9.1. Egy gráf csúcsai reprezentálják a természetes számokat 1-től 8-ig. Két csúcs közt fusson él, ha a nekik megfeleltetett természetes számok relatív prímek. Rajzoljuk meg a gráfot!

Megoldás:



9.2. Van-e olyan egyszerű gráf, amely csúcsainak fokszáma rendre

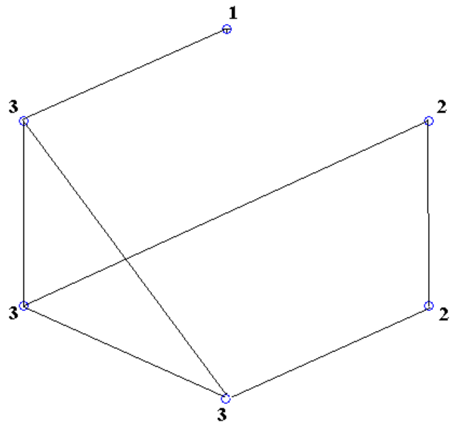
a) $1, 2, 2, 3, 3, 3$?

b) $1, 1, 2, 2, 3, 4, 4$?

c) $8, 8, 8, 5, 5, 5, 3, 2, 2$?

Megoldás:

a) Igen van, például a következő:



b) Mivel a fokszámok összege páros kellene, hogy legyen, ezért ilyen gráf nem létezik.

c) A gráfnak 9 csúcsa van. Ez azt jelenti, hogy a 8-adfokú csúcsok foka maximális, azaz minden másik csúccsal össze vannak kötve. A feladatban vázolt gráfnak 3 ilyen csúcsa lenne, ami azt jelenti, hogy a gráf csúcsai közül a legkisebb fokszámú is legalább 3 csúccsal össze van kötve, azaz nem lehet 2-odfokú csúcs.

9.3. Egy társaságban az ismeretségek kölcsönösek. Bizonyítsuk be, hogy van két ember, akinek ugyanannyi ismerőse van. Azaz véges egyszerű gráfban mindig van két pont, amelyek fokszáma megegyezik.

Megoldás:

Tegyük fel, hogy mindenkinek különböző számú ismerőse van, azaz a gráf minden pontjának különböző a fokszáma. Egy n csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább 0, de legfeljebb $n-1$,azaz

$$0 \leq deg(P) \leq n-1 \qquad \forall P \in G.$$

Ez pontosan n különböző értéket takarna, de az előző feladatban láttuk, hogy egy gráfban nem lehet egyszerre maximális fokszámú és nulladfokú csúcs is. Hiszen a maximális fokszámú csúcs minden másik ponttal össze van kötve, míg a nulladfokú egyikkel sincs, így ezek a feltételek egyszerre nem teljesíthetők.

Azaz a fokszámokra egyszerű gráf esetén $n-1$ különböző lehetséges értékünk van. A gráf n csúcsa közül tehát a skatulya-elv alapján biztosan lesz legalább két olyan, melyek foka azonos.

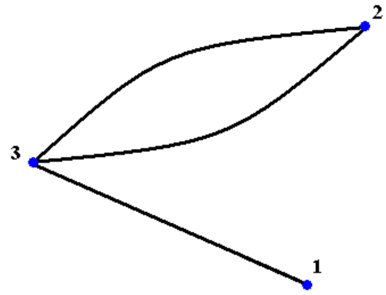
9.4. Mi a helyzet, ha az előző feladat feltételei mellett megengedünk többszörös éleket?

Megoldás:

Ha $n \geq 3$, akkor mindig konstruálható olyan összefüggő, hurokélt nem tartalmazó gráf, melynek minden pontjának különböző a fokszáma.

Az állítást úgy bizonyítjuk, hogy $n=3$-ra mutatunk egy ilyen gráfot, majd megmutatjuk, hogy ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén ismert egy a feltételeknek megfelelő elrendezés, akkor abból származtatható egy $n+1$ csúcsú, összefüggő, hurokélt nem tartalmazó gráf, melyben minden csúcs különböző fokszámú.

i) $n=3$ esetén a csúcsok mellé a fokszámukat írtuk:



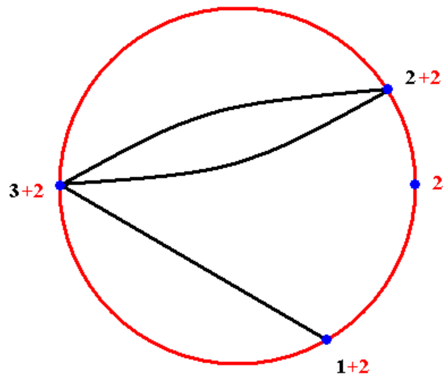
ii) Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik egy a feltételeknek megfelelő elrendezés. Az ilyen gráf csúcsainak fokszámai a feltételek alapján olyan halmazt alkotnak, melynek n darab különböző eleme van és közüllük a legkisebb is legalább 1.

iii) Igazoljuk $n+1$-re.
A gráfhoz vegyünk hozzá egy új csúcsot és ezzel együtt egy olyan kört, amely az új pontból indul és minden csúcsot pontosan egyszer érint, majd visszatér az újonan felvett pontba. (Hamilton kör, lásd később.) Ekkor a csúcsok fokaira a következő írható fel:

- az új pont fokszáma 2,
- ha valamely P pont fokszáma az n-edfokú gráfban $k = \deg P$ volt, akkor az $n+1$-edfokú gráfban $\deg P + 2$.

Könnyen látható, hogy a csúcsok fokszámai most is kielégítik a feltételeket, azaz $n+1$ darab különböző természetes számot kaptunk, melyek között nem szerepel a 0.

Az $n = 4$ eset származtatása:



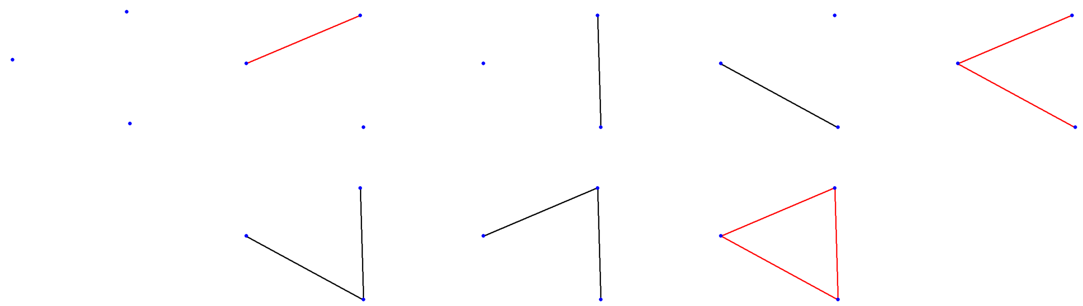
9.5. Egy társaságban 5 házaspár van jelen. Azok akik nem ismerik egymást bemutatkozásul kezet fognak egymással. „A” úr megkérdezi minden jelenlevőtől, hogy hány emberrel fogott kezet és csupa különböző számot kap válaszul. Hány emberrel fogott kezet „A” úr?

Megoldás:

Készítsünk egy gráfot. A csúcsok reprezentálják a társaság 10 tagját, míg két csúcs között akkor fusson él, ha a nekik megfeleltetett személyek kezetfogtak. Ekkor a kérdésre adott válaszok éppen a gráf megfelelő csúcsának fokszámai. A házastársával senki nem fog kezet, ezért a kilenc megkérdezett csak úgy mondhat csupa különböző számot, ha a válaszok rendre 0, 1, 2, ..., 8. Aki nyolcat mond, az a házastársán kívül mindenkivel kezett fogott, így nullát csak a házastársa mondhatott. Ezt a házaspárt a társaságból elhagyva, azaz a két csúcsot és a belőlük kiinduló éleket a gráfból „kitépve” egy az előzővel analóg problémához jutunk. Könnyű látni, hogy minden a gráfban maradó csúcs foka pontosan eggyel csökken. Az előzőhöz hasonlóan belátható, hogy az eredeti gráf hetedfokú és elsőfokú pontjai által reprezentált személyek egy házaspárt alkotnak. És így tovább… A következő összetartozó párokat kaptuk: (2, 6); (3, 5). Az eljárást addig fojtatjuk, amíg a gráfban már csak két pont marad. Ezek nyilvánvalóan egy házaspárt alkotnak és egyikük maga „A” úr. A két pont természetesen nincs összekötve, hiszen a nekik megfeleltetett személyek eredetileg is ismerték egymást. Az eljárás minden lépésében ezen pontok fokszáma pontosan eggyel csökkent. Az utolsó gráfhoz négy lépésben, négy pár elhagyásával jutottunk, így az eredeti gráfba mindkét pont negyedfokú volt. Azaz „A” úr 4 emberrel fogott kezet, éppúgy, mint a felesége.

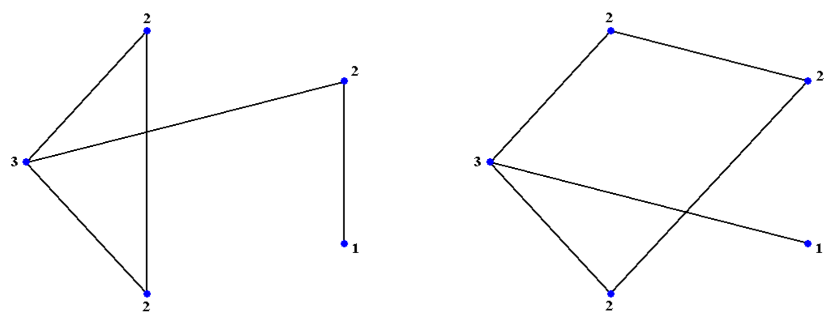
9.6. Adjuk meg, hány 3 pontú egyszerű gráf van! Rajzoljuk fel őket, számoljuk meg a nemizomorf eseteket!

Megoldás: Hárompontú gráf esetén maximálisan 3 él húzható be. (Ennyi éle van a háromcsúcsú teljes gráfnak). Minden él esetében két lehetőség közül választhatunk (vagy behúzzuk, vagy nem). Így az összes gráfok száma 2^3. Ezen gráfok természetesen csak akkor lesznek mind különbözőek, ha cimkézet gráfokról beszélünk. Cimkézetlen gráfok esetén ezek között vannak izomorfak.



Azaz a 8 gráf közül 4 darab páronként nem izomorf választható ki.

9.7. Mutassunk példát olyan $G = (V, E_G)$ és $H = (V, E_H)$ és gráfokra, melyekre $d_G(x) = d_H(x)$ $\forall x \in V$ esetén, de G és H nem izomorfak. **Megoldás:**



A két gráf nyilvánvalóan nem izomorf, hiszen az elsőfokú pont képe csak az elsőfokú pont lehetne, de míg az első gráfban az egyik másodfokú pont a szomszédja, addig a másik gráfban a harmadfokú ponthoz kapcsolódik.

9.8. Legyen G egy tetszőleges egyszerű gráf. Igazoljuk, hogy ekkor G vagy $\overline{G}$ összefüggő!

Megoldás: Az állítás igazolásához először a következő segédtételt igazoljuk:

Segédtétel: Egy G gráf akkor és csak akkor nem-összefüggő, ha pontjai két nem üres osztályba sorolhatók úgy, hogy a különböző osztályban lévő pontok között nem fut a gráfban él.

Bizonyítás. (A segédtételé:)

Ha G nem összefüggő, akkor több összefüggő komponensre bomlik. Az egyik osztályba tartozzanak az egyik komponens pontjai, míg a másik osztályba rakhatjuk az összes többi pontot. Könnyen látható, hogy ez az osztályozás megfelel a feltételeknek.

Ha G pontjai két osztályba sorolhatóak úgy, hogy a különböző osztályba tartozó pontok közt nem fut él, akkor a gráf nyilvánvalóan nem összefüggő. ■

Ha a G gráf összefüggő, akkor kész vagyunk. Ha G nem összefüggő, akkor pontjait két osztályba tudjuk sorolni úgy, hogy a különböző osztálybeli csúcsok között nem fut él G-ben. Legyen a két osztály A és B. A G gráf $\overline{G}$ komplementerében A minden pontja össze van kötve B minden pontjával. Azaz A bármely pontjából egy élen át el lehet jutni B bármely pontjába és viszont, így $\overline{G}$ bármely pontjából legfeljebb két élen haladva el lehet jutni a gráf bármely pontjába.

9.9. Igazoljuk, hogy ha egy n-pontú egyszerű gráfnak több mint $\binom{n-1}{2}$ éle van, akkor a gráf összefüggő!

Megoldás: Tekintsünk egy n-pontú nem összefüggő gráfot. A gráf legalább két komponenst tartalmaz. Belátjuk, hogy nem-összefüggő gráf esetén akkor maximális az élek száma, ha a gráf két komponensre bomlik.

Legyen $K>2$ a gráf komponenseinek száma. A gráfban a különböző komponensekhez tartozó pontok között biztosan nem fut él. Vonjunk össze két komponenst oly módon, hogy kiválasztunk mindkettőből egy egy pontot, majd a két pontot összekötő élt behúzzuk. Ezzel egy $K-1$ komponensből álló gráfhoz jutunk, amely legalább eggyel több élt tartalmaz, mint aza gráf, amelyből kiindultunk. A komponensek száma tetszőlegesen nem csökkenthető, hiszen nem-összefüggő gráf legalább két komponensre bomlik.

Vizsgáljuk most az olyan gráfokat, amelyek pontosan két komponensre bomlanak. Kiindulásként tekintsük azt az esetet, amikor a két komponens egy $n-1$ csúcsú és egy egycsúcsú részgráf. (Azaz egy $n-1$ pontú összefüggő gráfra és egy izolált pontra.) Ekkor a gráfnak maximálisan $\binom{n-1}{2}$ éle lehet, hiszen ezáltal az összefüggő gráf-rész összes lehetséges élét behúztuk.

Be fogjuk látni, hogy nem-összefüggő gráf esetén ennél több élt nem tudunk behúzni. Ha egy n-pontú gráf két komponensre, egy k-pontú teljes gráfra és egy $n-k$-pontú teljes gráfra bomlik ($k<n-k$), akkor ha a nagyobb csúcs-számú gráfrészből egy csúcsot „átrakunk” a másik gráfrészbe, azzal a lehetséges élek számát nem növeljük, hiszen ekkor az első gráfrészben az élek száma $n-k-1$-gyel csökken, míg a másik komponensben k-val növekszik. Így az élek száma a legkedvezőbb esetben is csak változatlanul marad.

Így két komponens esetén az élek maximális száma $\binom{n-1}{2}$.

9.10. Igazoljuk, hogy ha egy $2n$-pontú gráf minden pontjának foka legalább n, akkor a gráf összefüggő!

Megoldás: Tegyük fel, hogy a gráf nem összefüggő. Ekkor a gráf legalább két nem üres komponensre bomlik. Tekintsünk egy pontot, mondjuk A-t. Mivel A fokszáma legalább n, ezért a gráf csúcsai közül legalább n-nel egy komponensbe tartozik. Így a gráf egyik komponense legalább $n+1$ pontot tartalmaz. A másik komponensben legfeljebb $n-1$ pont tartozhat. Ezek egyike legyen B. Mivel B fokszáma legalább n, ezért legalább n további pontnak kellene a komponensben lennie, ami ellentmondás. Az ellentmondás csak abból a feltevésből származhat, hogy a gráf nem összefüggő.

9.11. Tekintsük n darab weboldalt, melyekre igaz, hogyha a oldalon hivatkozást találunk b oldalra, akkor b-n is van link a-ra. Mutassuk meg, hogy ha közülük bármely kettő között van linkekkel történő (közvetett) kapcsolat, akkor a weboldalak között van $(n-1)$ közvetlen link is.

Megoldás: A feladat gráfelméleti átfogalmazásához tekintsük a következő gráfot! A gráf csúcsai reprezentálják a weboldalakat. Két csúcs között fusson él, ha a nekik megfeleltetett weboldalak között van közvetlen kapcsolat. Ekkor a kérdés úgy hangzik, hogy igazoljuk, hogy ha a gráf összefüggő, akkor van legalább $n-1$ éle.

Az állítást n-szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

i) $n=1$ esetén az állítás triviálisan igaz.

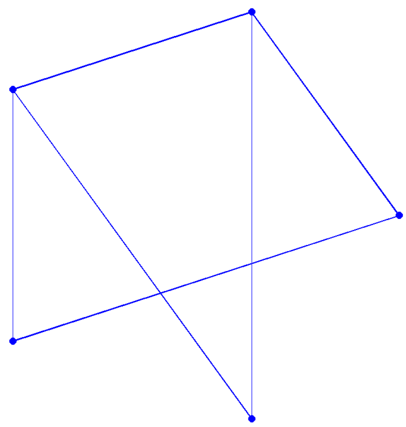
ii) Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az állítás igaz.

iii) Igazoljuk $n+1$ pontú gráfra.

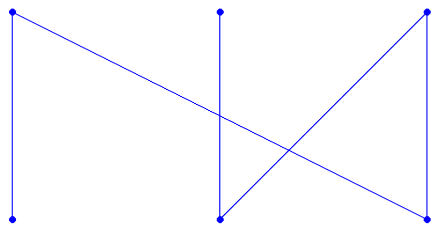
Indirekt tegyük fel, hogy a gráf összefüggő, de legfeljebb $n+1-2=n-1$ éle van. Ekkor a gráfnak biztosan van elsőfokú csúcsa, hiszen izolált pontja nem lehet, ha pedig minden csúcsa legalább 2-odfokú lenne, akkor az élek száma legalább $\frac{(n+1)\cdot 2}{2}=n+1$ lenne, ami ellentmondana a feltételnek. Hagyjuk el az elsőfokú csúcsot és a hozzátartozó élt a gráfból, így a gráf nyilvánvalóan összefüggő marad. Ekkor a gráf csúcsainak száma n lesz, az élek száma is eggyel csökken, így az indirekt feltétel alapján legfeljebb $n-2$ él marad. De az indukciós feltétel alapján minden n-csúcsú összefüggő gráfban legalább $n-1$ él van. Ellentmondásra jutottunk, melynek oka csak az indirekt feltétel lehet.

9.12. Írjuk fel az alábbi gráfok szomszédsági- és illeszkedési-mátrixát!

a)



b)



Megoldás:

a) Szomszédsági mátrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Illeszkedési mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

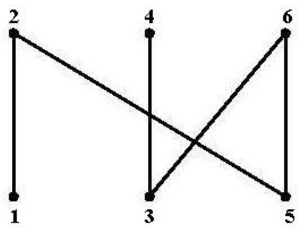
b) Szomszédsági mátrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Illeszkedési mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

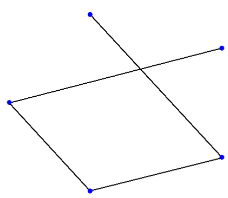
A szomszédsági mátrix felírásakor ebben az esetben kihasználhatjuk, hogy a gráf páros. A mátrixból csak azokat az elemeket írjuk le, amelyek nem szükségszerűen 0-k:



$$\left[\begin{array}{c|ccc} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \hline \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{4} & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{6} & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

9.13. Rajzoljuk meg a 9.14.a) gráf komplementerét és írjuk fel a szomszédsági mátrixot!

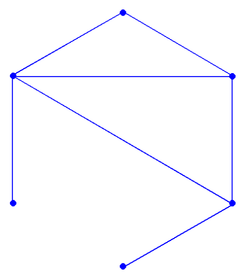
Megoldás:



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy ha a gráf szomszédsági mátrixát összeadjuk a komplementerének szomszédsági mátrixával, akkor a főátló kivételével minden elem helyén 1-est találunk. (A főátlóban 0-k állnak.)

9.14. Legyen az alábbi gráf szomszédsági mátrixa A. Végezzük el az $A^2 = A \cdot A$ mátrix-szorzást, próbáljuk megmondani a mátrix elemeinek jelentését a gráfra vonatkozóan, indokoljuk is.



Megoldás:

A gráf szomszédsági mátrixa és annak négyzete:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az A^2 mátrix i-edik sorának j-edik elemét a mátrixszorzás szabálya alapján:

$$(A^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{6} a_{ik} \cdot a_{kj}$$

Az A^2 mátrix i-edik sorának j-edik elemének jelentése tehát az, hogy hány pontosan 2 hosszúságú út vezet a mátrix i-edik pontjából a j-edik pontba, hiszen az a_{ik} elem jelentése, hogy hányféleképpen juthatunk el az i-edik pontból a k-adik pontba egyetlen élen, és az a_{kj} elem jelentése hasonló a k-adik és j-edik pont vonatkozásában.

Hasonlóan lehet belátni, hogy az A^k mátrix i-edik sorának j-edik eleme az i-edik és j-edik pont közötti pontosan k hosszúságú utak száma.

9.15. Egy klubesten a fiúk és a lányok feljegyezték, hány partnerrel táncoltak. Igaz-e, hogy a fiúk által felírt számok összege megegyezik a lányok által felírt számokéval?

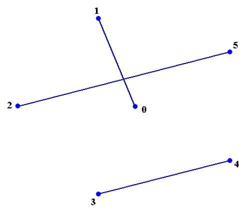
Megoldás: A problémát egy páros gráfon tudjuk szemléltetni. A gráf csúcsai reprezentálják a tánccsoport tagjait. A pontok között akkor és csak akkor fusson él, ha a nekik megfeleltetett személyek táncoltak egymással. A tánccsoport tagjait két osztályba sorolhatjuk (lányok illetve fiúk) úgy, hogy az azonos osztályba tartozó pontok között nem fut él. Tekintsük a kapott gráf egyszerűsített szomszédsági mátrixát. A sorokat rendeljük a lányokhoz és az oszlopokat a fiúkhoz. Azt hogy az i-edik lány hány fiúval táncolt az i-edik sor elemeinek összegeként kapjuk. Hasonlóan azt hogy a j-edik fiú táncpartnereinek számát a j-edik oszlop elemeinek összegeként kaphatjuk. Tehát a lányok által felírt számok összege a sorok összegeinek összege, míg a fiúk által felírt számoké az oszlopösszegek összege. Mindkét összeg a mátrix minden elemét pontosan egyszer tartalmazza, így nyilvánvalóan egyenlők.

9.16. Készítsük el egy hatcsapatos, egyfordulós bajnokság mérkőzésrendjét! A problémával már foglalkoztunk a II.4 fejezet 5 feladatának megoldása során. Az ott igazolt állítás szerint a mérkőzések lebonyolításához legalább 5 fordulóra van szükség. Mutassuk meg, hogy ennyi elég is!

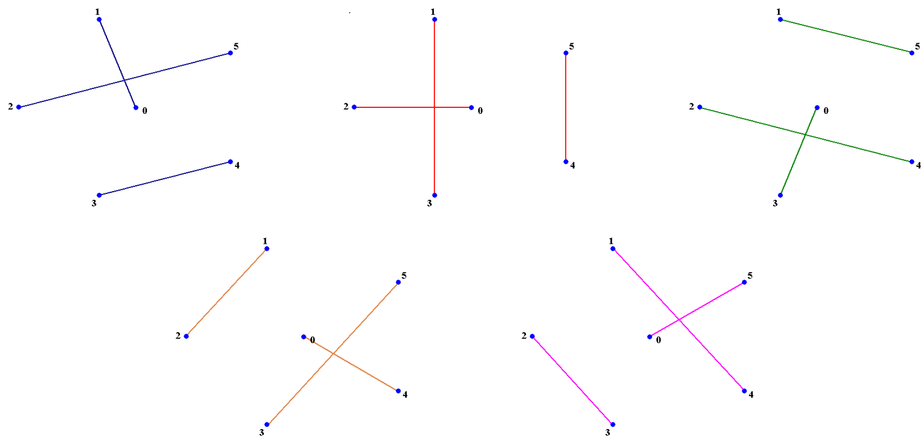
Megoldás:

Gráfelméleti szempontból egy hatcsúcsú teljes gráf 5 darab, páronként közös él nélküli 1-faktorának megkeresése a feladat. (Egy gráf 1-faktorán a gráf összes pontját tartalmazó reguláris elsőfokú részgráfját értjük. Az 1-faktorokat párosításoknak is nevezzük.) Könnyen igazolható, hogy ezek egyesítése visszaadja a teljes gráfot.

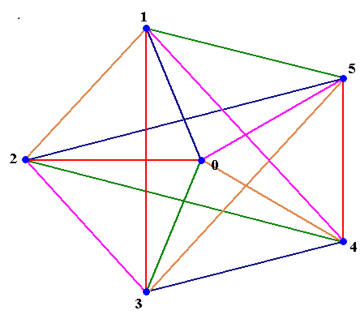
Egy szabályos ötszög középpontja és csúcsai legyenek a gráf szögpontjai. Az alábbi ábrán egy párosítást látunk.



A 0 pont körüli 72°-os elforgatás a fenti párosítás éleit egy másik párosítás éleibe viszi. Könnyen látható, hogy a két 1-faktor élidegen. Ismételt forgatásokkal az 5 darab elsőfokú faktor mindegyike előállítható:



Az alábbi ábrán szemléltetjük, hogy a párosítások valóban élidegenek és az egyesítésük visszaadja a K_6 teljes gráfot:



9.17. Mikor bontható K_n teljes gráf élidegen 1-faktorokra és hogyan található meg egy ilyen felbontás?

Megoldás:

Ha n páros és $n \geq 2$, akkor, és csak akkor létezik a K_n teljes gráf élidegen 1-faktorokra való felbontása.

Legyen $n \geq 2$ páros szám. Egy szabályos $(n-1)$-szög középpontja és csúcsai legyenek a gráf szögpontjai. A középpontot 0-val, a csúcsokat – mondjuk pozitív körüljárási irányban – jelöljük az $1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ számokkal. A csúcsok számozását érdemes modulo $n-1$ érteni. A konkrét példához hasonlóan induljunk ki az alábbi párosításból (első forduló):

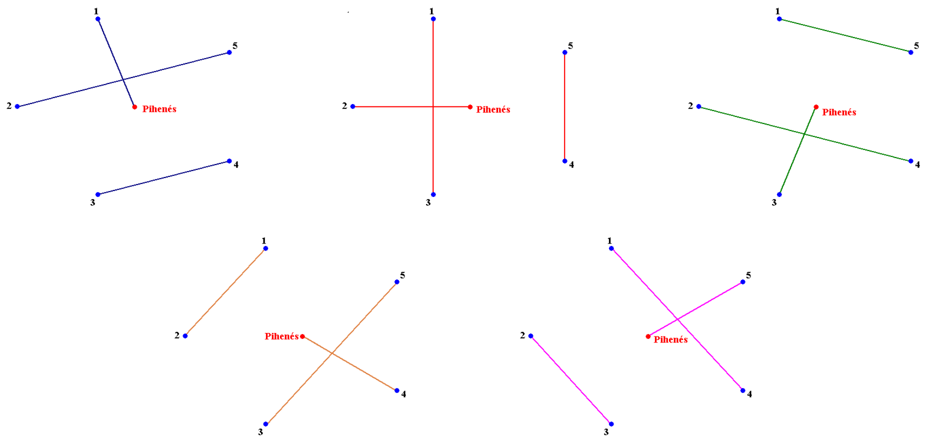
$$\{0,\ 1\},\quad \{2,\ n-1\},\quad \{3,\ n-2\},\quad \cdots\quad ,\{k,\ n-k+1\},\quad \cdots\quad ,\{\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}+1\}$$

A fenti párosításból úgy származtathatunk további $n-2$ párosítást, hogy az éleket $\frac{2\pi}{n-1}$ szög egész többszöröseivel elforgatjuk. Az i-edik ilyen párosítás élei úgy kaphatók, ha a $\{0,\ 1\}$ él helyett a $\{0,\ i\}$ élt vesszük, míg a többi él esetén mindkét végpont sorszámát $i-1$-gyel megnöveljük. Ahol $i = 1,2,\ldots,n-1$.

9.18. Készítsük el a mérkőzésrendet $n = 5$ csapat esetén. Az II.4 fejezet 5 feladatában igazoltak szerint a lebonyolításhoz legalább 5 fordulóra van szükség. Mutassuk meg, hogy ennyi fordulóban ez meg is oldható.

Megoldás:

Vezessünk be egy fiktív csapatot. Nevezzük mondjuk „Pihenés"-nek. Ezáltal a feladatot páros-csapatos bajnokság szervezésének problémájára vezettük vissza. Így az n=5 csapatos bajnokság fordulói az alábbi részgráfoknak feleltethetők meg:



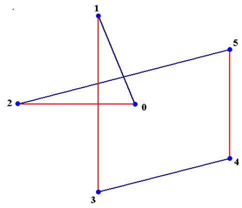
Az egyes fordulókban a következő mérkőzéseket kell lejátszani?

1. forduló	**2. forduló**	**3. forduló**	**4. forduló**	**5. forduló**
2 – 5	1 – 3	1 – 5	1 – 2	1 – 4
3 – 4	4 – 5	2 – 4	3 – 5	2 – 3

9.19. Igazoljuk, hogy a K_n teljes gráf, ha $n \geq 2$, páros, $\frac{n}{2}-1$ páronként élidegen Hamilton-körre és egy ezekkel közös él nélküli 1-faktorra bomlik.

Megoldás:

A K_n teljes gráf két „szomszédos" egy-faktorának egyesítése a gráf egy Hamilton-körét adja. Az alábbi ábrán $n = 6$ esetben az F_1 és F_2 párosítások egyesítettjét szemléltettük:



Könnyen látható, hogy ez mindig így van. A gráf élei egyetlen kört alkotnak, mely minden csúcson átmegy. Elegendő belátnunk, hogy ez igaz az első és a második párosítás egyesítésére, mert az összes többi eset forgatással visszavezethető ehhez az elrendezéshez. F_1 élei legyenek kékek, míg F_2 élei pirosak. Mivel a gráf minden csúcsának fokszáma páros ($d_i = 2$), ezért a gráf biztosan tartalmaz kört.

Induljunk el a 2 pontból egy piros élen át a 0 pontba, majd onnan egy kék élen az 1-be. A k-adik pontból kék él fut az $n-k+1$-edikbe és piros az $n-k+3$-adikba. Így az utunk a következő pontokon vezet át:

$$2,\ 0,\ 1,\ n{-}1{+}3{\equiv}3 \mod (n{-}1),\ n{-}3{+}1{=}n{-}2,\ n{-}(n{-}2){+}3{=}5,\ n{-}5{+}1{=}n{-}4,\ n{-}(n{-}4){+}3{=}7,\ n{-}6, \ldots$$

Látható, hogy a fenti sorozat $k \geq 4$ páros indexű elemei egy $d_1 = 2$ különbségű számtani sorozatot alkotnak, melynek kezdőeleme 3, míg az $\ell \geq 5$ páratlan indexű elemek egy $d_2 = -$ -2 különbségű számtani sorozatot alkotnak, melynek kezdőeleme n-2. Az előbbi részsorozat elemei mindaddig páratlanok, amíg az elem nem nagyobb $n-1$-nél, az utóbbi sorozat elemei mindaddig párosak, amíg az elem nem negatív. Így az elemek között nem fordulhat elő ismétlődés addig, amíg az előző két feltétel teljesül. Vizsgáljuk meg, melyik elem ismétlődik először!

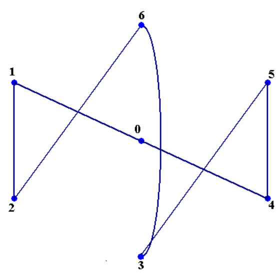
A páros indexű elemek sorozata először a $k{=}\frac{n-2}{2}$ index esetén lesz $n{-}1$-nél nagyobb, méghozzá $n+1$ amit modulo $n-1$ redukálva az ismétlődő elem 2, a másik sorozat elemei között az első ismétlődés az $\ell = \frac{n-4}{2}$ ekkor az elem éppen 2. Az utóbbi sorozatban fordul elő először ismétlődés. Az ismétlődő elem a teljes sorozat $m = 5+2\cdot\ell = 5+n-4 = n+1$-edik elem, így az út n különböző elemet tartalmaz, majd a legelső eleme ismétlődik, így valójában egy olyan körről van szó, amely minden csúcson átmegy.

Így az $n-1$ darab 1-faktort mivel n páros, kettesével $\frac{n}{2}-1$ darab Hamilton-körré tudjuk egyesíteni. Mivel az 1-faktorok száma páratlan, így a Hamilton-körök berajzolása után egy 1-faktor még megmarad. Ezzel az állítást igazoltuk.

9.20. Igazoljuk, hogy ha n pozitív páratlan szám, akkor a K_n teljes-gráf $\frac{n-1}{2}$ darab páronként élidegen Hamilton-körre bomlik.

Megoldás:

Először vizsgáljuk a problémát $n = 7$ konkrét esetben! A K_7 gráf egy Hamilton-köre látható az alábbi ábrán:



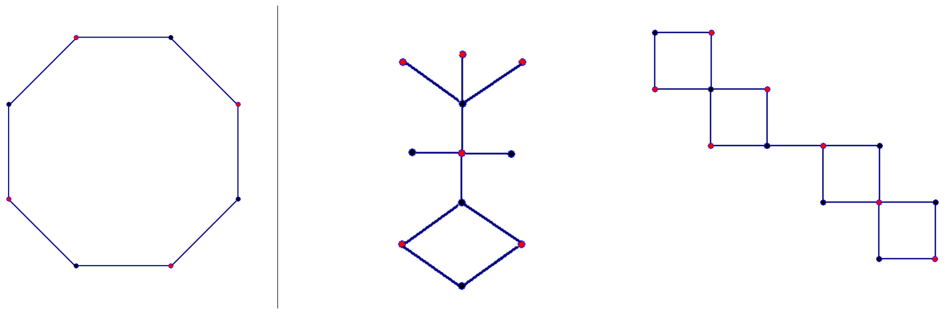
Könnyen látható, hogy az éleket $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ szöggel elforgatva az előzővel élidegen Hamilton-körhöz jutunk. Ismételt elforgatásokkal további Hamilton-köröket nyerhetünk, összesen 3 darabot.

A fentihez hasonlóan készíthetjük el általános esetben a kiindulási Hamilton-kört:

$$0,\ 1,\ 2,\ n-1,\ 3,\ n-2,\ 4,\ldots,\ \frac{n+3}{2},\ \frac{n+1}{2},\ 0$$

Az elforgatás itt azt jelenti, hogy a 0-nál nagyobb számokhoz rendre 1-et hozzáadunk, majd modulo $n-1$ redukálunk.

9.21. Tekintsük az alábbi páros gráfokat! Melyiknek van és melyiknek nincs 1-faktora?



Megoldás:

Az első gráfnak van 1-faktora. A kör minden második élét kiválasztva egy ilyen 4-élű részgráfot kapunk.

A második gráfban biztosan nincs 1-faktor, mert a piros pontok szám 6, míg a feketéké csak 5.

A harmadik gráfban sem lehet párosítást létesíteni, mert például a a jobb alsó sarok 4 piros pontjának összesen csak 3 fekete szomszédja van.

Megjegyzés: A harmadik gráfban minden pont foka legalább kettő, de vannak harmad és negyedfokú pontok is.

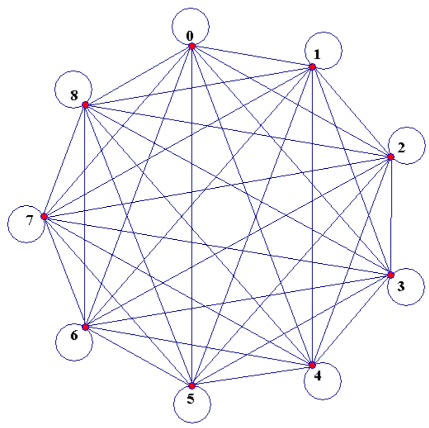
Következmény: Ha egy táncteremben minden fiú pontosan két lányt ismer és minden lány pontosan két fiút ismer akkor a társaság tagjai tudnak úgy táncolni, hogy mindenki olyan partnerrel táncoljon akit ismer, de ha minden fiú legalább két lányt ismer, de vannak olyan fiúk akik kettőnél több lányt ismernek és minden lány legalább két fiút ismer, de vannak olyan lányok is, akik több fiút ismernek, akkor a fenti párbaállítást nem lehet garantálni.

Hall-Radó-König-Ore tétel: Egy páros gráfnak pontosan akkor van elsőfokú faktora, ha mindkét pontosztálya ugyanannyi elemet tartalmaz és az egyik osztály bármely k darab pontját kiválasztva az ezekkel szomszédos pontok száma legalább k. (Bizonyítás: Hetyei Gábor: Kombinatorika és gráfelmélet 102.o.)

9.22. A II.4 fejezet 10 feladatában tárgyalt „a-típusú" dominókészletünk köveivel játszunk. A készlet pontosan egyszer tartalmaz minden olyan dominót amelyek mindkét felén 0 és 8 közötti a pontok száma. Az említett feladatban beláttuk, hogy a készletben 45 darab dominó van. Kérdés, hogy körberakhatjuk-e úgy a köveket, hogy egymás mellett azonos számok legyenek.

Megoldás:

Szemléltessük gráffal a problémát a következő módon: A gráf csúcsait feleltessük meg a 0 és 8 közötti természetes számoknak. Fusson él a és b között, ha nekik megfelelő számokkal létezik dominó. A gráf egy hurokélekkel kiegészített 9-csúcsú teljesgráf. Ekkor a dominók körberendezése a fenti gráf egy Euler-körét adja.

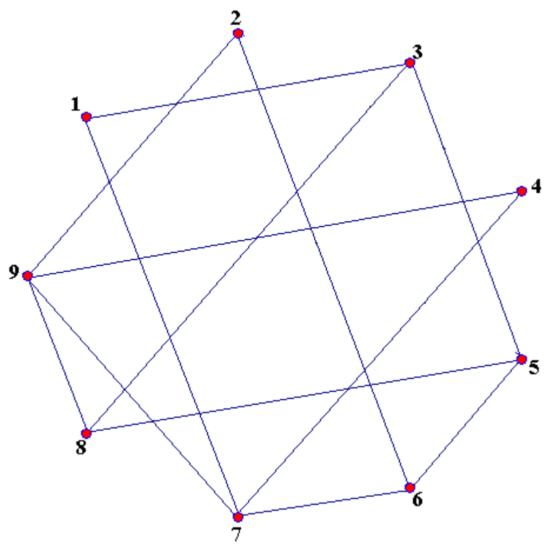


Mivel minden pont fokszáma páros $d_i = 10$ és a gráf összefüggő, ezért a gráfban létezik Euler-kör.

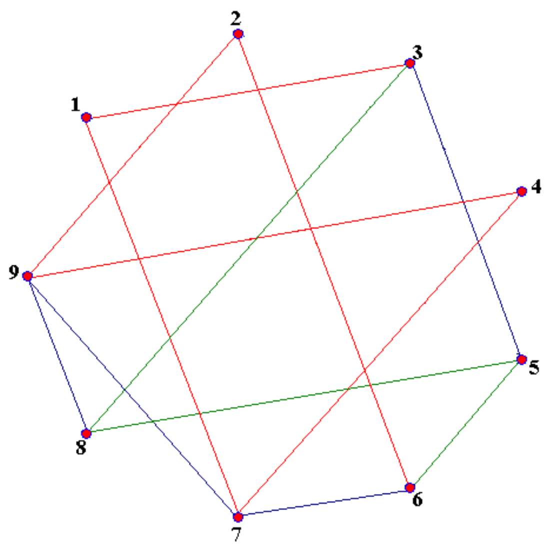
9.23. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat el lehet-e helyezni egy körön úgy, hogy bármely két egymás melletti szám összege ne legyen osztható se hárommal, se öttel, se héttel?

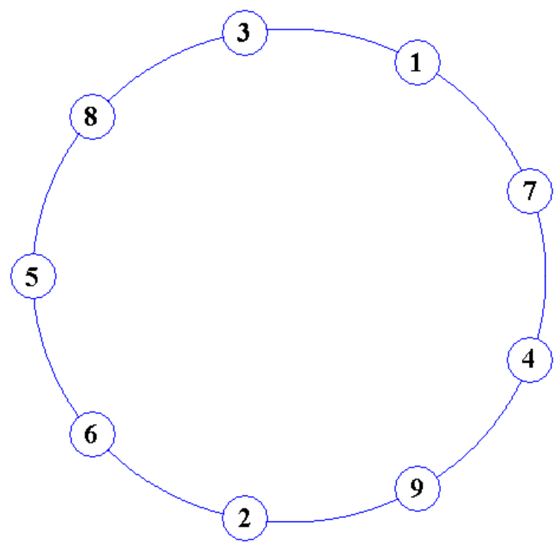
Megoldás:

Készítsünk egy 9-csúcsú gráfot. A csúcsai feleljenek meg a természetes számoknak 1 és 9 között. Két csúcs között fusson él, ha a két csúcs szerepelhet egymásmellett a körön, azaz ha az összegük sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel nem osztható. Így az alábbi gráfhoz jutunk. A feladatnak megfelelő elrendezésekhez a gráf egy-egy Hamilton-köre.



A fenti gráfban ha van Hamilton-kör, akkor a másodfokú pontokhoztartozó élek mindegyike benne kell, hogy legyen a körben. (Ezeket pirossal ábrázoltuk az alsó ábrán.) Így a 3, 1, 7, 4, 9, 2, 6 út része a Hamilton-körnek. (Már ha van ilyen a gráfban). Próbáljuk folytatni a kört. A 6-os pontnak egyetlen olyan szomszédja van, amely még nem szerepel a fenti útban. Így a kör csak az 5-ös ponttal folytatható. Hasonló meggondolások miatt a következő elem csak a 8-as lehet. Így végezetül a 3-assal bezárhatjuk a kört. A jobboldali ábrán a kapott elrendezés látható.





9.24. Legyen $k > 1$ egész szám. Ha egy véges egyszerű gráfban minden pont foka legalább k, akkor a gráfban van legalább $k+1$ hosszú kör és legalább k hosszú út (vagyis legalább $k+1$ pontot tartalmazó kör és út).

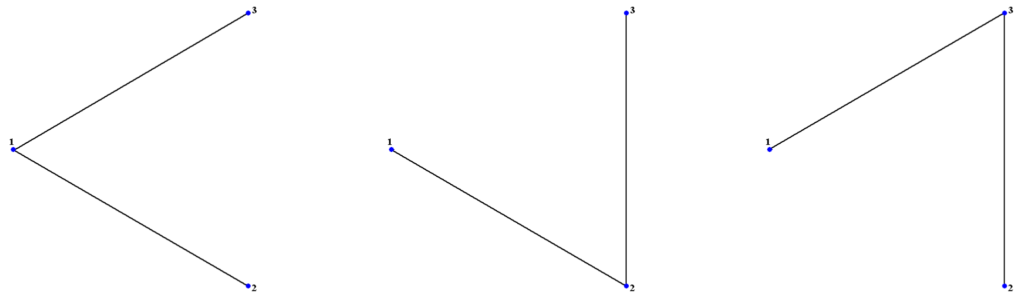
Bizonyítás: Induljunk ki a gráf egy tetszőleges P_1 pontjából és alkalmazzuk a következő eljárást: ha már eljutottunk egy P_i ponthoz, s ennek a pontnak van még olyan szomszédja a gráfban, amely nem szerepel a kiválasztott pontok között, akkor legyen ez a (vagy az egyik ilyen) szomszédja P_{i+1}. Ekkor $P_1, P_2, \ldots, P_{i+1}$ továbbra is út a gráfban. Ez az eljárás előbb-utóbb megakad, hiszen elfogynak a gráf pontjai. Tegyük fel, hogy P_m-nél akadunk el. Ekkor P_m-nek minden szomszédja szerepel már a pontok között. Keressük meg a legkisebb indexűt közülük, legyen ez P_s. Ekkor $P_s, P_{s+1}, P_{s+2}, \ldots, P_m$ kör és tartalmazza P_m-et, valamint P_m minden szomszédját. Mivel P_m-nek legalább k szomszédja van a feladat feltétele szerint, ezért ennek a körnek legalább k+1 pontja van. Másrészt nyilván $m \geq k+1$, tehát a talált út hossza legalább k.

9.25. Rajzoljuk le az n pontú fagráfokat. Mennyi a számuk? Mennyi a nem-izomorfak száma? ($n = 1,2,3,4$)

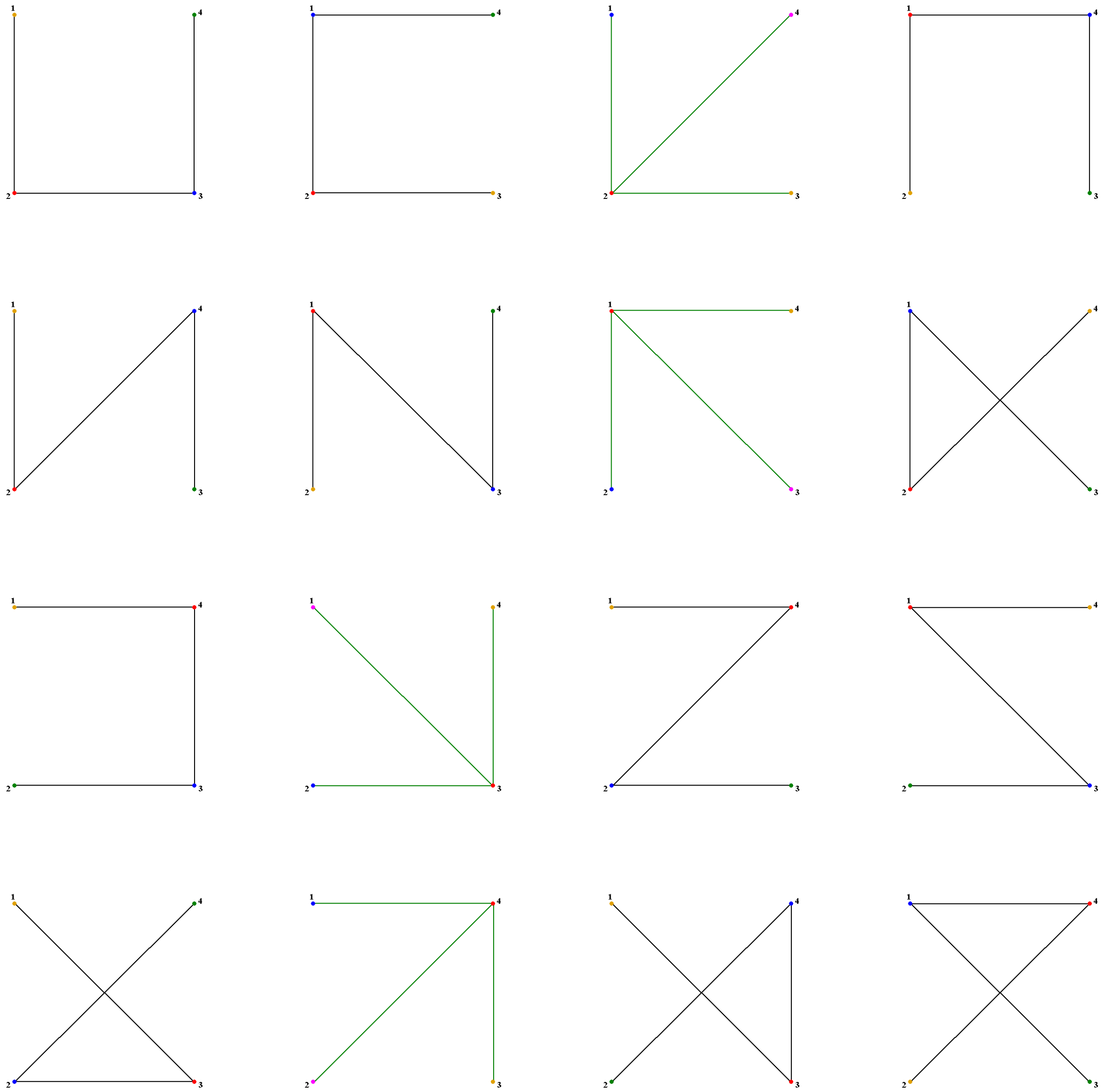
Megoldás:

$n = 1$ illetve $n = 2$ esetén egy-egy fa rajzolható:

$n = 3$ esetén 3 cimkézett fa gráf van,a cimkézetlen fák izomorfak:



$n = 4$ esetén 16 cimkézett fa gráf van, a cimkézetlen fák izomorfia alapján két osztályba sorolhatók:



9.26. Hány n-pontú cimkézett csillag létezik? (Lásd elméleti rész, I.9.3.8.)

Megoldás:

Könnyen látható, hogy két cimkézett csillag pontosan akkor izomorf, ha gráfok $(n-1)$-edfokú pontjaira azonos cimke került. Így éppen annyi cimkézett csillag készíthető, ahányféleképpen a „középpont" kiválasztható, ez pedig n-féleképpen tehető meg.

9.27. Hány n-pontú cimkézett út van? (Lásd elméleti rész, I.9.3.8.)

Megoldás: Az út első eleme n-féleképpen választható, a második $(n-1)$-féleképpen és így tovább, az út utolsó pontja már egyértelműen meghatározott. Így $n!$-féle elrendezést készítettünk. Ezek izomorfia alapján párba rendezhetjük, hiszen minden út izomorf a megfordításával és csak ezzel az úttal lesz izomorf. Így a különböző cimkézett utak száma:

$$\frac{n!}{2}.$$

9.28. Bizonyítsuk be, hogy egy legalább 2-pontú fagráfban legalább kettővel nagyobb az elsőfokú pontok száma, mint a legalább harmadfokúaké!

Bizonyítás. jelölje a fagráf pontjainak számát n, az elsőfokú pontokét e és a legalább harmadfokú pontokét h. Ekkor a másodfokú pontok száma: $n-e-h$.

Ekkor a gráf pontjainak fokszámösszegére igaz az alábbi becslés:

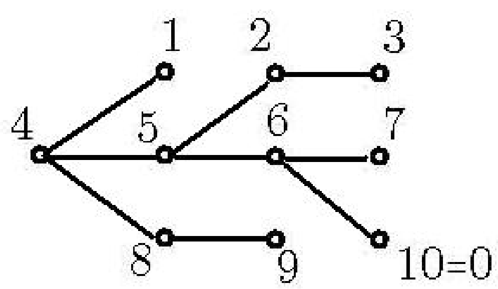
$$\sum_{i}^{n} d_i \geq 1\cdot e+2\cdot(n-e-h)+3\cdot h = 2n-e+h.$$

Másrészt mivel minden él pontosan két csúcshoz tartozik, ezért igaz, hogy a csúcsok fokszámainak összege éppen az élek számának kétszerese. Továbbá, mivel fagráfról van szó az élek száma pontosan $n-1$. Ezt a fenti relációba visszahelyettesítve éppen az állítást kapjuk:

$$2\cdot(n-1)\geq 2n-e+h \quad\Leftrightarrow\quad 2+h\leq e.$$

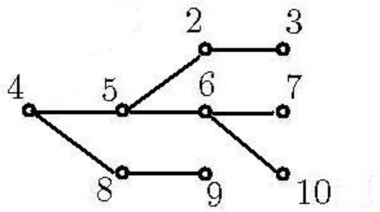
■

9.29. Adjuk meg az alábbi fa Prüfer-kódját!

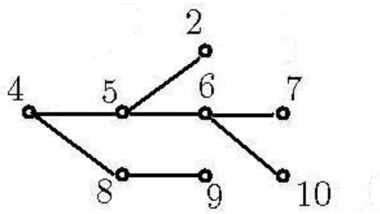


Megoldás:

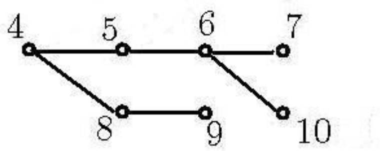
A gráf legkisebb elsőfokú pontja az 1-es, aki a 4-es csúcshoz kapcsolódik. Így a kód első eleme a 4-es. Az 1-es számú elsőfokú csúcsot (a hozzátartozó éllel együtt) eltávolítva a gráfból szintén fához jutunk:



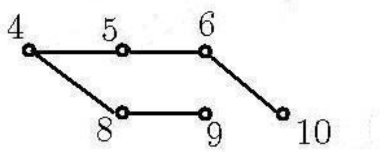
Az így kapott gráfban elsőfokúak a 3-as, 7-es, 9-es és 10 -es pontok. Most a 3-ast kell választanunk, amely aa 2-es csúcshoz kapcsolódik. Így a kód következő eleme a 2-es. (Az eddigi kód: 4, 2). A vizsgált elsőfokú pontot „kitépve” a gráfból az alábbi fához jutunk:



Most a következő pontok elsőfokúak: 2, 7, 9, 10. A 2-es pont szomszédja a gráfban az 5-ös, így a kódba az 5-ös kerül be, míg az elsőfokú pontot a gráfból eltávolítva az alábbi fát kapjuk:



Elsőfokú: 7, 9, 10. A hetest tépjük ki a gráfból, a szomszédja (6) bekerül a kódba. (4, 2, 5, 6). Az új fa:



Most két elsőfokú csúcs van (9, 10). A kilencest távolítjuk el, míg a szomszédja (8) bekerül a kódba: 4, 2, 5, 6, 8.

A továbbiakban az aktuális fagráfok megrajzolásától eltekintünk, csak azt írjuk fel, mikor melyik csúcsot távolítottuk el a gráfból és azt, melyik elemmel bővült a Prüfer-kód:

A 8-as csúcs eltávolítása után a szomszédját (4) írjuk a kódba: (4, 2, 5, 6, 8, 4).

A 4-es csúcs eltávolítása után a szomszédját (5) írjuk a kódba: (4, 2, 5, 6, 8, 4, 5).

Az 5-ös csúcs eltávolítása után a szomszédját (6) írjuk a kódba: (4, 2, 5, 6, 8, 4, 6).

Ezek után a gráf két elsőfokú pontból álló fa (súlyzó), tehát a Prüfer-kód elkészült.

9.30. Állítsuk elő azt a fát, amelynek a Prüfer-kódja:

$$1,\ 1,\ 7,\ 7,\ 8,\ 8.$$

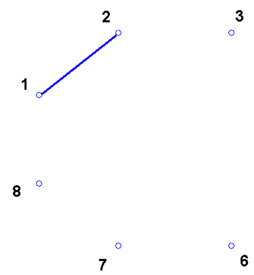
Megoldás:

1. Mivel a kód 6 elemű, a gráfunknak $6+2=8$ szögpontja van.
2. Felsoroljuk egymás alá a gráf pontjait, a kódot és az elsőfokú pontokat.

1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	7	7	8	8		
2	3	4	5	6			

Vegyük észre, hogy a harmadik sorba pontosan azok az elemek kerülnek, akik szerepelnek az első sorban, de nem szerepelnek a másodikban.

3. A fenti táblázatból kiolvasható, hogy az első elem akit letéptünk a 2. sorszámú pont volt (ő a legkisebb indexű elsőfokú) és a szomszédja az 1. sorszámú volt (Ez a kód első eleme.) Ezt a két pontot összeköthetjük.

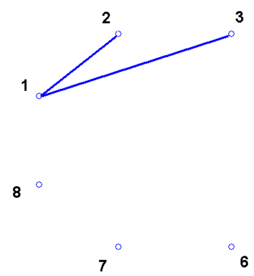


Húzzuk ki a kódból és a pontok halmazából a felhasznált elemeket:

1	$\cancel{2}$	3	4	5	6	7	8
$\cancel{1}$	1	7	7	8	8		
3	4	5	6				

4. Az új táblázatból látható, hogy az következő elem akit letéptünk a 3. sorszámú pont volt (ő a legkisebb indexű elsőfokú) és a szomszédja az 1. sorszámú volt (Ez a megmaradt kód első eleme.)

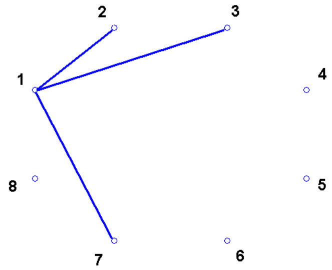
Ezt a két pontot összeköthetjük.



Húzzuk ki a kódból és a pontok halmazából a felhasznált elemeket:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & \cancel{2} & \cancel{3} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & 7 & 7 & 8 & 8 & & \\ 1 & 4 & 5 & 6 & & & & \end{array}$$

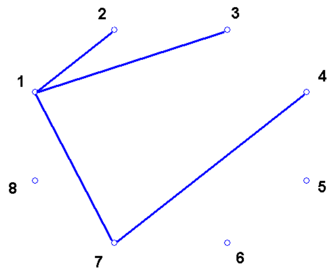
5. A kitépett elem az 1. sorszámú pont volt (ő a legkisebb indexű elsőfokú) és a szomszédja az 7. sorszámú volt (Ez a megmaradt kód első eleme.)
   Ezt a két pontot összeköthetjük.



Húzzuk ki a kódból és a pontok halmazából a felhasznált elemeket:

$$\begin{array}{cccccccc} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{7} & 7 & 8 & 8 & & \\ 4 & 5 & 6 & & & & & \end{array}$$

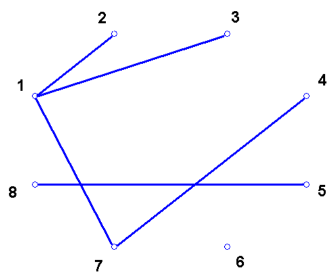
6. A kitépett elem az 4. sorszámú pont volt (ő a legkisebb indexű elsőfokú) és a szomszédja az 7. sorszámú volt (Ez a megmaradt kód első eleme.)
   Ezt a két pontot összeköthetjük.



Húzzuk ki a kódból és a pontok halmazából a felhasznált elemeket:

$$\begin{array}{cccccccc} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{7} & 8 & 8 & & \\ 5 & 6 & 7 & & & & & \end{array}$$

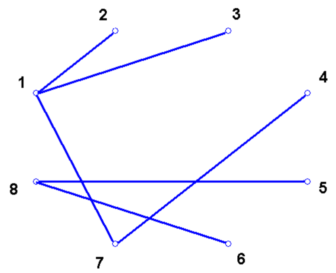
7. A kitépett elem az 5. sorszámú pont volt (ő a legkisebb indexű elsőfokú) és a szomszédja az 8. sorszámú volt (Ez a megmaradt kód első eleme.) Ezt a két pontot összeköthetjük.



Húzzuk ki a kódból és a pontok halmazából a felhasznált elemeket:

$$\begin{array}{llllllll} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{5} & 6 & 7 & 8 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{7} & \cancel{8} & 8 & & \\ 6 & 7 & & & & & & \end{array}$$

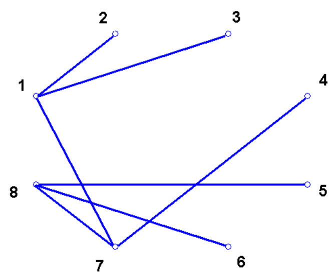
8. A kitépett elem az 6. sorszámú pont volt (ő a legkisebb indexű elsőfokú) és a szomszédja az 8. sorszámú volt (Ez a megmaradt kód első eleme.) Ezt a két pontot összeköthetjük.



Húzzuk ki a kódból és a pontok halmazából a felhasznált elemeket:

$$\begin{array}{llllllll} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} & 7 & 8 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{8} & & \\ 7 & 8 & & & & & & \end{array}$$

9. Már csak két első-fokú pontunk maradt (ők alkotják a súlyzót) kössük össze őket. Ezzel kész a fánk. Ellenőrzésként el lehet készíteni a Prüfer-kódot.



9.31. Oldjuk meg az előző feladatot a másik, kézi ábrázoláshoz alkalmasabb módszerrel is.

Megoldás:

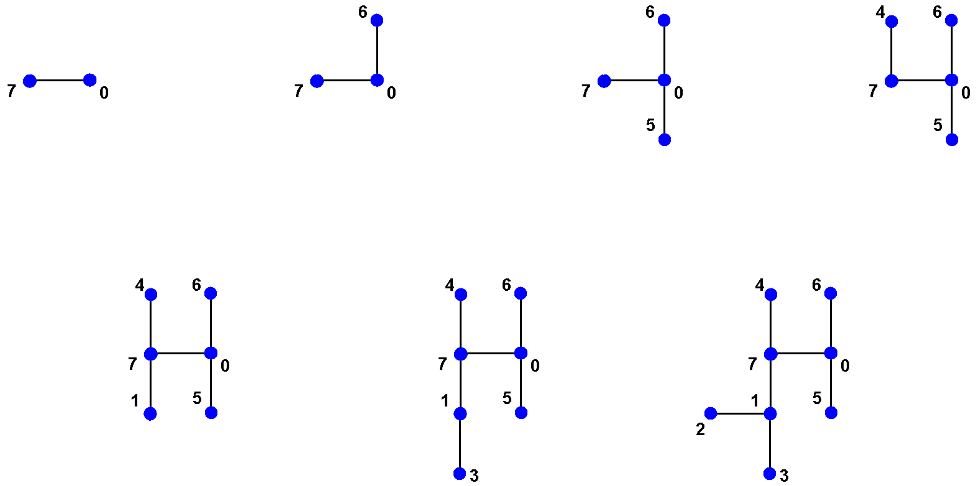
Mivel a Prüfer-kód 6 elemű, ezért a fagráfnak 8 csúcsa van. Melyek a $t_1,\ t_2, \ldots, t_6$ pontok melyek törlésével ehhez a kódhoz jutottunk? Ehhez a megoldási módhoz jelöljük a fa gyökerét 0-val (az a pont, amelyet az előbb 8-cal jelöltünk.)

T	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
K	1	1	7	7	0	0

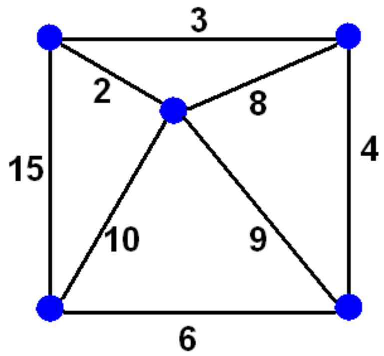
Vizsgáljuk a kód első elemét. Mivel 2 a legkisebb természetes szám, aki nem szerepel az alsó sorban a vizsgált pozíciótól jobbra és a felső sorban a vizsgált pozíciótól balra, ezért $t_1 = 2$. Hasonló meggondolások alapján a fenti táblázat első sora kitölthető:

T	2	3	1	4	5	6
K	1	1	7	7	0	0

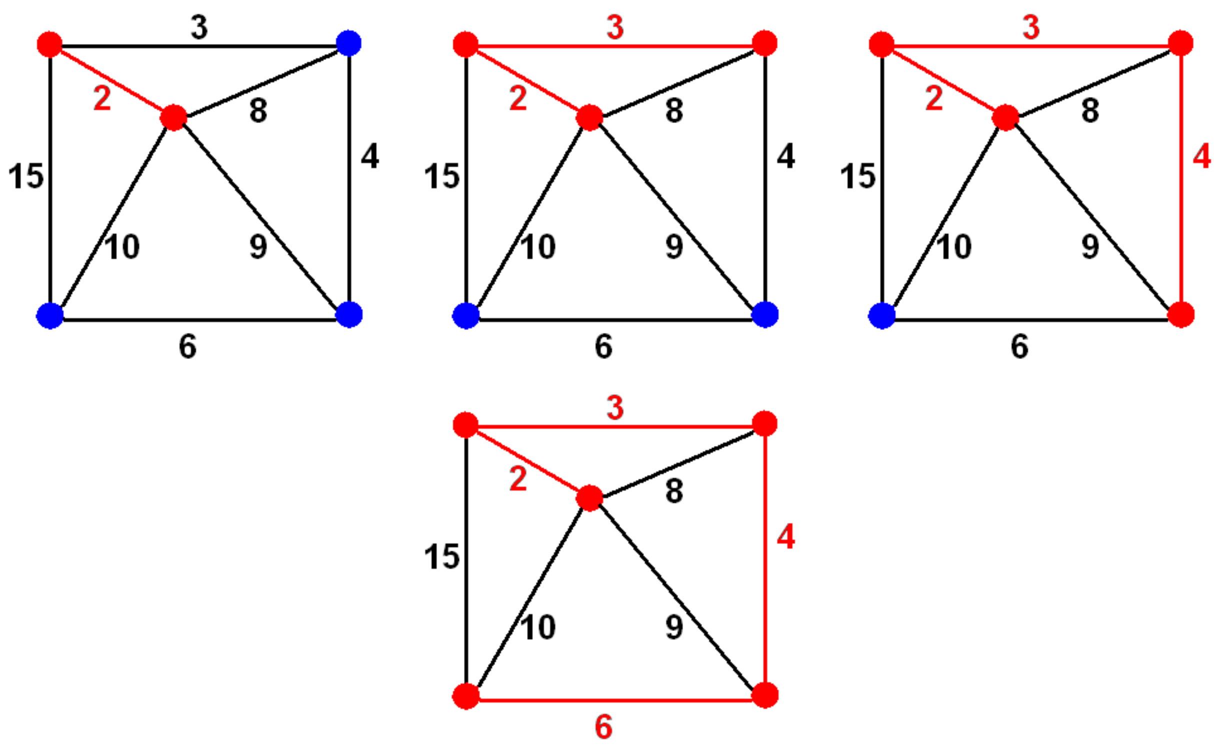
A táblázat első sorából egyetlen számításbajöhető pozitív érték hiányzik, méghozzá a hetes. Ez azt jelenti, hogy a Prüfer-kód elkészítése során a gráfról nem téptük le a 7-es csúcsot, vagyis az eljárás végén a $7-0$ súlyzó maradt. Ezzel az éllel indítjuk a rajzolást, majd a fenti táblázat oszlopai a gráf egy-egy élét adják meg. Jobbról balra haladva a táblázatban mindíg olyan élt kell behúznunk, melynek egyik csúcsa korábban már szerepelt a gráfban. Az ábrázolás tehát $n-1=7$ lépésben megoldható:



9.32. Öt falu elhatározza, hogy regionális vízművet hoznak létre. Az egyik faluban kutat fúrnak, majd a falvak között vizvezetékcsöveket fektetnek le. Az ábrán látható az elkészült terv. Az egyes vezetékek építési költségét is felírva kiderült, hogy nincs elég pénz a teljes hálózat megépítésére. Első körben egy olyan vezetékrendszert szeretnének építeni, amellyel mindenkihez eljut a víz, de a költség minimális. Melyik vezetékeket építsék meg?

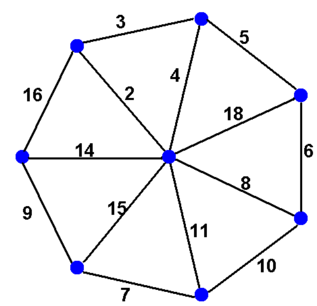


A feladatot Kruskal-algoritmusa alapján oldjuk meg. A célunk a fenti gráf egy feszítőfáját meghatározni. Az adott gráf minden élének költsége különböző, így a minimális költségű élt választjuk először. Ezután a ki nem választott élek közül mindig a legolcsóbb olyan élt választjuk, mely nem hoz létre kört a gráfban:

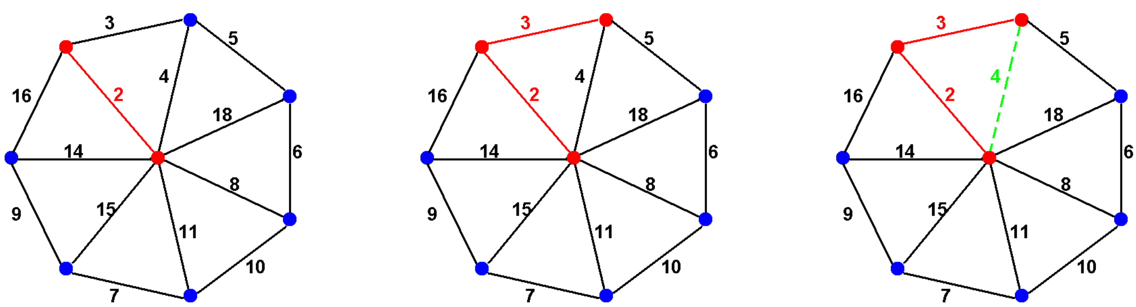


Tehát a minimális költségű feszítőfa a pirosan jelölt élekből áll. Költsége: 15.

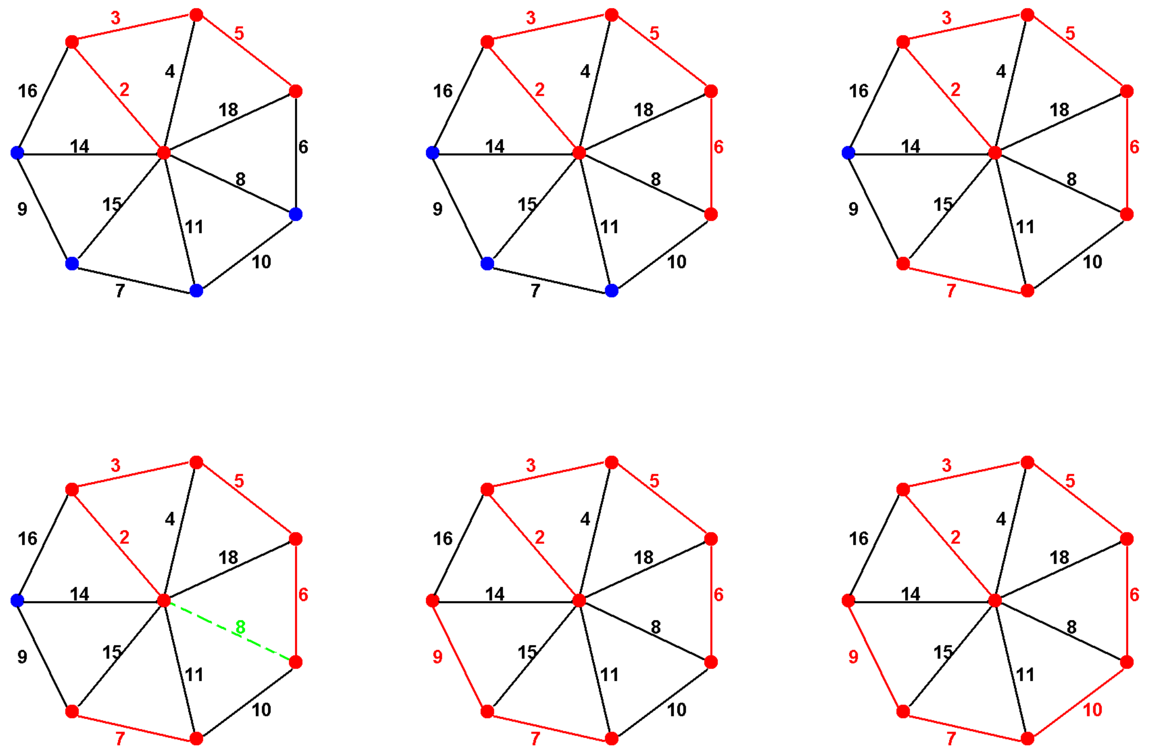
9.33. Adjuk meg az alábbi gráf minimális költségű feszítő-gráfját!



Az előző feladathoz hasonlóan kiindulásként válasszuk a minimális költségű élt.

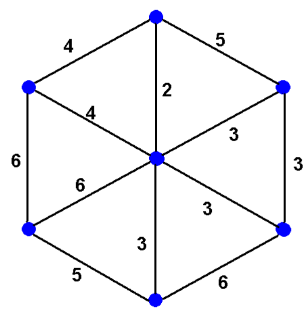


Ha a harmadik lépésnél a zölddel jelölt élt választanánk, akkor a gráfban kör alakulna ki, ami nem megengedett. Így az eljárást a következő legkisebb költségű él választásával tudjuk folytatni:



Tehát a minimális költségű feszítőgráf költsége: 42.

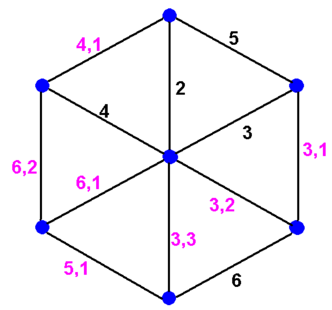
9.34. Adjuk meg az alábbi gráf minimális költségű feszítő-gráfját!



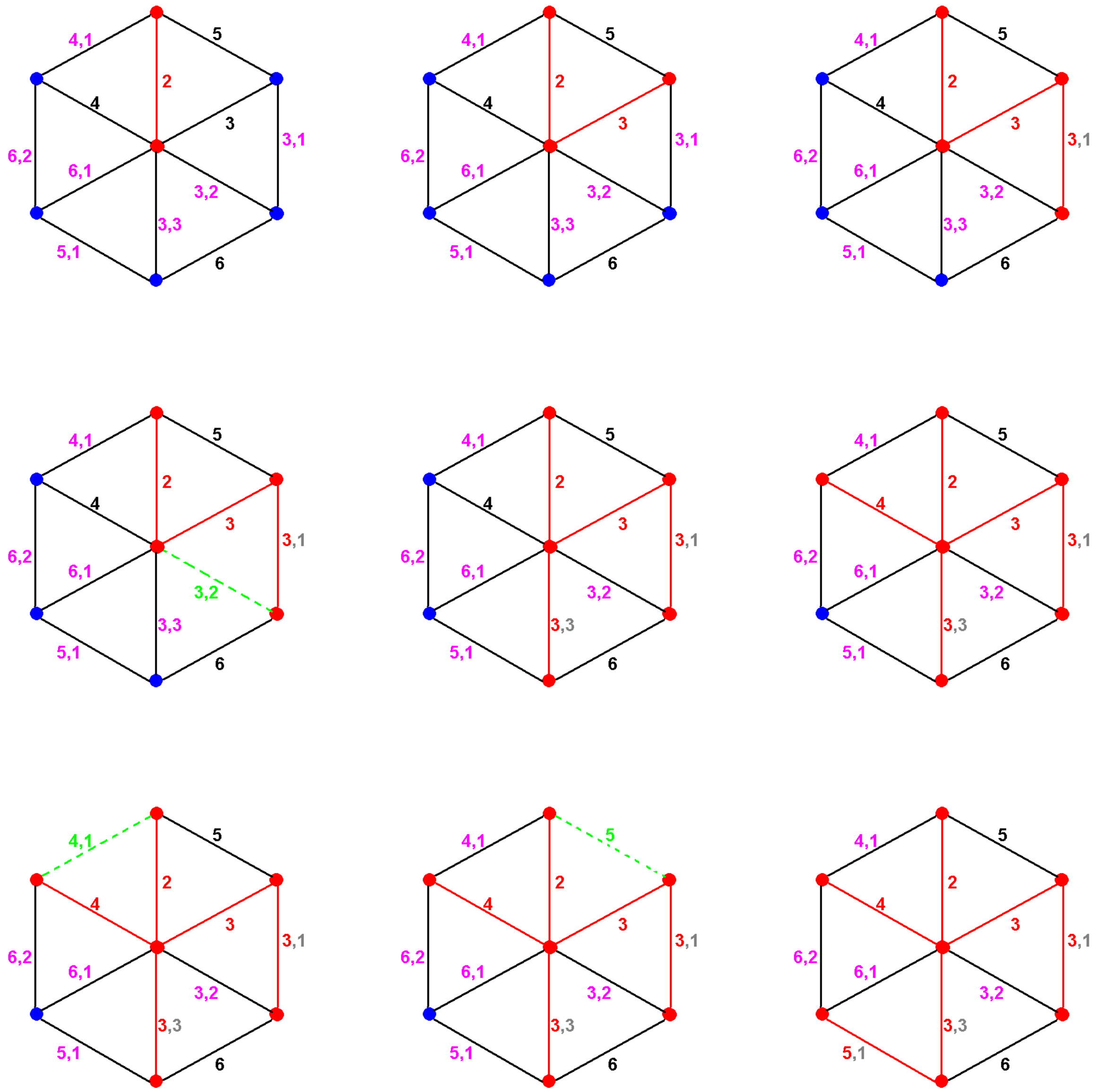
Mivel a gráf élei között vannak azonos költségűek, ezért a feladat megoldása előtt a gráf éleinek költségét ideiglenesen megváltoztatjuk. Méghozzá oly módon, hogy ha a k költség r darabb élen szerepel, akkor a vizsgált r darab élhez rendre az alábbi költségeket rendeljük:

$$k,\ k+\varepsilon,\ k+2\varepsilon, \ldots,\ k+(r-1)\cdot\varepsilon$$

ahol $\varepsilon > 0$ konstanst olyannak választjuk, hogy az utolsó ilyen élre írt $k+(r-1)\cdot\varepsilon$ érték se legyen nagyobb a legkisebb k-nál nagyobb élköltségnél:



Most már páronként különböző élköltségekkel van dolgunk:



A költség számításánál természetesen az élek eredeti költségeit kell figyelembe venni, így a fenti feszítőfa költsége: 20

II.9.2. További gyakorló feladatok

9.35. Egy gráf csúcsai reprezentálják a természetes számokat 1-től 8-ig. A csúcsból B csúcsba fusson irányított él, ha az A-nak megfeleltetett természetes szám osztója a B-nek megfeleltetett természetes számnak. Rajzoljuk meg a gráfot!
megoldás

9.36. Adjuk meg, hány 4 pontú egyszerű gráf van! Rajzoljuk fel a nemizomorf eseteket. (Ezek száma 11, lásd elméleti rész, I.9.2.5.)
megoldás

9.37. Rajzoljuk meg az alábbi szomszédsági mátrixhoz tartozó gráfot!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

megoldás

9.38. Rajzoljuk meg az alábbi illeszkedési mátrixhoz tartozó gráfot!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

megoldás

9.39. Hány kör van a teljes négyszögben? Hány öt hosszú kör van a teljes ötösben, hány hat hosszú kör van a teljes hatosban? Hány n hosszú kör van a teljes n-esben? (Az utolsó kérdés így is fogalmazható: hány Hamilton-köre van a teljes n-esnek?)
megoldás

Harmadik rész

Megoldások, útmutatások, eredmények

III.1. fejezet

Permutációk, variációk, kombinációk

1.31. Egy futó versenyen nyolc futó került a döntőbe. A döntőben hány különböző befutási sorrend lehetséges, ha feltételezzük, hogy nem volt holtverseny?

Megoldás:

$$8!$$

vissza a feladathoz

1.32. Hány olyan ötjegyű szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, amelyben az 1-e és a 3-as jegy egymás mellett helyezkedik el és minden számjegyet pontosan egyszer használhatunk fel? És ha a 2-es számjegyet 0-ra cseréljük?

Megoldás:

$$2\cdot 4! \text{ illetve } 2\cdot 4! - 2\cdot 3!$$

vissza a feladathoz

1.33. Hány ötjegyű páros szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

Megoldás:

$$4! + 2\cdot 3\cdot 3!$$

vissza a feladathoz

1.34. Hányféleképpen ülhet le 9 ember egy kilencszemélyes hosszú padra?

Megoldás:

$$9!$$

vissza a feladathoz

1.35. Hányféleképpen ülhet le 4 nő és 5 férfi egy kilencszemélyes hosszú padra, úgy hogy azonos neműek ne kerüljenek egymás mellé?

Megoldás:

$$5!\cdot 4!$$

vissza a feladathoz

1.36. Hányféleképpen ülhet le 4 nő és 5 férfi egy kilencszemélyes hosszú padra, úgy hogy azonos neműek ne kerüljenek egymás mellé, ha csak az számít, férfiről vagy nőről van-e szó?

Megoldás:

$$1$$

vissza a feladathoz

1.37. Hányféleképpen ülhet le 9 ember egy kerekasztal körül, ahol kilenc szék van?

Megoldás:

$$8!$$

vissza a feladathoz

1.38. Hányféleképpen ülhet le 9 ember egy kerekasztal körül, ahol kilenc szék van, úgy hogy közülük két kitüntetett (A és B) egymás mellé kerüljön?

Megoldás:

$$2 \cdot 7!$$

vissza a feladathoz

1.39. Hányféleképpen ülhet le 4 nő és 5 férfi egy kerekasztal körül, ahol kilenc szék van úgy hogy azonos neműek ne kerüljenek egymás mellé?

Megoldás:

$$0$$

vissza a feladathoz

1.40. Hányféle képpen olvasható ki a következő ábrából KOMBINATORIKA szó, ha a táblázat bal felső sarkából indulunk és minden lépésben csak jobbra vagy lefelé haladhatunk:

$$\begin{array}{ccccccc}
K & O & M & B & I & N & A \\
O & M & B & I & N & A & T \\
M & B & I & N & A & T & O \\
B & I & N & A & T & O & R \\
I & N & A & T & O & R & I \\
N & A & T & O & R & I & K \\
A & T & O & R & I & K & A
\end{array}$$

Megoldás:

$$\frac{12!}{6! \cdot 6!}$$

vissza a feladathoz

1.41. Hányféleképpen lehet eljutni az origóból a (4, 7, 3) pontba, úgy, hogy csak egységnyi hosszú jobbra, fel és előre lépések lehetségesek?

Megoldás:

$$\frac{14!}{4! \cdot 7! \cdot 3!}$$

vissza a feladathoz

1.42. Adott n különböző elem. Ha az elemekhez hozzávesszünk két, az utolsóval megegyező elemet, akkor az elemek összes különböző sorbarendezéseinek száma 22-szerese lesz, mint az eredeti n elem sorbarendezéseinek a száma.

Megoldás:

A feladat állítása alapján:

$$\begin{aligned} 22 \cdot P_n &= P_{n+2}^3 \\ 22 \cdot n! &= \frac{(n+2)!}{3!} \\ 132 \cdot n! &= (n+2)\cdot(n+1)\cdot n! \\ 132 &= n^2+3n+2 \\ 0 &= (n-10)\cdot(n+13) \end{aligned}$$

$n_1 = 10$
$n_2 = -13$ hamis gyök ($\notin \mathbb{N}$)

vissza a feladathoz

1.43. Hány permutációja van az ASZTALLAP, és a KUTYAFUTTATÓ szavaknak?

Megoldás:

asztallap: $\dfrac{9!}{3!\cdot 2!}$ kutyafuttató: $\dfrac{12!}{4!\cdot 2!\cdot 2!}$

vissza a feladathoz

1.44. A 0, 1, 1, 1, 2, 2, 5 számjegyek permutálásával hány

a) páros,

b) páratlan,

c) néggyel osztható,

d) öttel osztható,

e) 12-vel osztható

szám képezhető, ha a számok nem kezdődhetnek 0-val?

Megoldás:

a) Ha a szám páros, akkor az utolsó jegy vagy 0, vagy 2. Ezt a két lehetőséget kezeljük is külön.

i) 0-ra végződő szám $P_6^{3,2}$ darab van, hiszen, ha az utolsó helyre rögzítem a 0-t, a maradék 6 helyre az 1, 1, 1, 2, 2, 5 jegyek bármely sorbarendezése jó és ezekből pont ennyi van.

ii) Ha 2-esre végződik a szám, akkor feladat ekvivalens azzal a kérdéssel, hogy hány hatjegyű számot képezhetünk a 0, 1, 1, 1, 2, 5 jegyekből, ha az első helyen nem állhat 0. Ha az 1-eseket megkülönböztethetőnek tekinteném (mondjuk beszíneznénk őket), akkor a megfelelő elrendezések száma $5\cdot 5!$ lenne. Ha most a szinezéstől eltekintünk, akkor azokat az eseteket amelyek az 1-esek cseréjével kaphatók, nem tudjuk egymástól megkülönböztetni. Ez azt jelenti, hogy minden esetet 3!-szor számoltunk össze. (Ennyi különböző sorrendben írható a három különböző 1-es.) Így a lehetőségek száma $\frac{5\cdot 5!}{3!}$

Ez két egymást kizáró eset, így az összes lehetőség az ezekhez tartozó lehetőségek összege:

$$\frac{6!}{3!\cdot 2!}+\frac{5\cdot 5!}{3!}=\frac{8\cdot 5!}{3!}.$$

b) páratlan, A páratlan számok száma megkapható úgy, hogy az összes hétjegyű szám számából kivonjuk a párosak számát. (Lásd később logikai szita-formula), vagy közvetlenül az alábbi okfejtés alapján.

A fenti számjegyek felhasználásával képzett szám pontosan akkor páratlan, ha az utolsó jegye 1 vagy 5.

Ha az utolsó jegy 1, a feladatot visszavezettük az eredetivel analóg problémára, nevezetesen arra, hogy a 0, 1, 1, 2, 2, 5 számjegyek permutálásával hány hatjegyű szám képezhető, ha a 0 nem állhat az első helyen.

$$\frac{5\cdot 5!}{2!\,2!},$$

Ha az utolsó jegy 5, az alapfeladat, amire a feladatot visszavezettük, A 0, 1, 1, 1, 2, 2 számjegyek permutálásával hány hatjegyű szám képezhető, ha a 0 nem állhat az első helyen.

$$\frac{5\cdot 5!}{3!\,2!},$$

Az összes eset száma ezen, egymást kizáró esetekhez tartozó darabszámok összege.

c) néggyel osztható, A fenti számjegyek felhasználásával képzett szám pontosan akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két jegyéből alkotott szám 20 vagy 12 vagy 52. Ez három egymást páronként kizáró eset, alkalmazható az összeadási szabály. A további részletes magyarázattól eltekintenénk és csak a végeredményt közöljük:

$$\underbrace{\frac{5!}{3!}}_{\text{20-ra végződő}}+\underbrace{\frac{4\cdot 4!}{2!}}_{\text{12-re végződő}}+\underbrace{\frac{4\cdot 4!}{2!}}_{\text{52-re végződő}}.$$

d) öttel osztható, Az 5-tel osztható számok az alábbi két egymást kizáró esetbe sorolhatók:

i) 5-re végződő ($\frac{5\cdot 5!}{3!2!}$ darab, mint a b) részben.)

ii) illetve 0-ra végződő ($P_6^{3,2}$ mint az a) részben)

Alkalmazható az összeadási szabály.

e) 12-vel osztható Egy szám pontosan akkor osztható 12-vel, ha 3-mal és 4-gyel is osztható. A fenti módon képzett számok jegyeinek összege minden esetben:

$$0+1+1+1+2+2+5=12,$$

vagyis az összes előállítható szám osztható hárommal, így minden 4-gyel osztható osztható 12-vel is, ezeket pedig már a c) részben összeszámoltuk.

vissza a feladathoz

1.45. Hányféleképpen oszthatunk szét 25 különböző tárgyat 5 személy között egyenlő arányban?

Megoldás:

$$\frac{25!}{5!\cdot 5!\cdot 5!\cdot 5!\cdot 5!}$$

vissza a feladathoz

1.46. Tizenkét tanuló között hányféleképpen lehet kiosztani öt különböző tárgyat, ha egy tanuló

a) legfeljebb egy tárgyat kaphat?

b) több tárgyat is kaphat?

Megoldás:

Feleltessünk meg az egyes tárgyaknak egy-egy "helyiértéket" egy ötjegyű szám felírásában. A tanulókat jelképezzük rendre a $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B\}$ számjegyekkel. Ekkor minden kiosztásnak megfeleltethető egy 12-es számrendszerbeli ötjegyű szám, a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. (A feladat megoldása során nem csak a valódi ötjegyű számokat tekintjük, hanem megengedjük, hogy a számok 0-val, a b feladat esetében akár több 0-val is kezdődjenek.)

a) Minden számjegy legfeljebb egyszer használható. $V_{12}^5 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$

b) A számjegyek többszöris felhasználhatók. $\overline{V}_{12}^5 = 12^5$

vissza a feladathoz

1.47. Az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 számjegyekkel hány páros, ötjegyű számot képezhetünk, ha bármely két szomszédos jegy különböző paritású és

a) minden jegyet legfeljebb egyszer használunk?

b) Ugyanaz a jegy többször is felhasználható?

Megoldás:

a) $4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2$

b) $4^3 \cdot 5^2$

vissza a feladathoz

1.48. Tizes-számrendszerbeli hatjegyű számokat képezünk.

a) Hány ilyen szám van?

b) Hány páros illetve hány páratlan szám van?

c) Hány 4-gyel osztható szám van?

d) Hány 5-tel osztható szám van?

e) Hány 3-mal osztható szám van?

Megoldás:

a) $9 \cdot 10^5$

b) $45 \cdot 10^4$ páros és ugyanennyi páratlan szám van.

c) $\frac{9 \cdot 10^5}{4}$ mivel minden 4. szám osztható 4-gyel, vagy más megközelítéssel: az utolsó két számjegy az alábbi 25 kétjegyű szám közül választható

00	04	08	52	56	
12	16		60	64	68
20	24	28	72	76	
32	36		80	84	88
40	44	48	92	96,	

az első három jegyből álló szám pedig az a) feladathoz hasonlóan generálható. Így összesen $9 \cdot 10^2 \cdot 20$ számot tudunk előállítani.

d) $\frac{9\cdot 10^5}{5}$ mivel minden 5. szám osztható 5-tel, vagy másként: az utolsó számjegy kétféle lehet (0, 5), az első öt jegyből álló szám pedig az a) feladathoz hasonlóan generálható. Így összesen $9\cdot 10^4\cdot 2$ számot tudunk előállítani.

e) $\frac{9\cdot 10^5}{3}$ mivel minden 3. szám osztható 3-mal. A másik megközelítés lényegesen problémásabb. Csak az alapötletet vázoljuk. Egy szám pontosan akkor osztható hárommal, ha a számjegyeinek összege is osztható. Így ezt a tulajdonságot csak az határozza meg, mely jegyek alkotják a számot. Érdemes ez alapján osztályozni a számainkat, majd az egyes osztályokba tartozó számokat külön-külön összeszámlálni.

vissza a feladathoz

1.49. Kettes-számrendszerbeli hatjegyű számokat képezünk.

a) Hány ilyen szám van?

b) Hány páros illetve hány páratlan szám van?

c) Hány 4-gyel osztható szám van?

d) Hány 8-cal osztható szám van?

Megoldás:

a) 2^5

b) 2^4 páros és ugyanennyi páratlan szám. (A páros számok mind 0-ra, a páratlanok 1-re végződnek.)

c) 2^3 4-gyel osztható szám van, hiszen az ilyen számok utolsó két jegye 0.

d) 2^2 8-cal osztható szám van, hiszen az ilyen számok utolsó három jegye 0.

vissza a feladathoz

1.50. Tizenhatos-számrendszerbeli hatjegyű számokat képezünk.
(A számjegyek: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; A; B; C; D; E; F)

a) Hány ilyen szám van?

b) Hány páros illetve hány páratlan szám van?

c) Hány 4-gyel osztható szám van?

d) Hány 32-vel osztható szám van?

Megoldás:

a) $15\cdot 16^5$

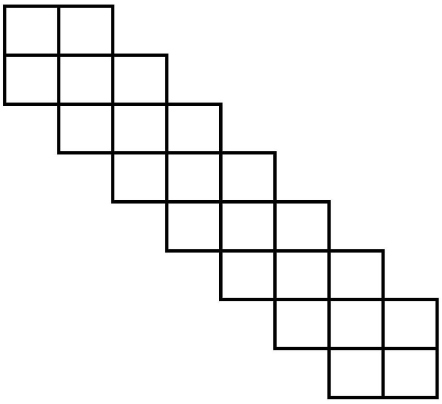
b) $15\cdot 16^4\cdot 8$ páros és ugyanennyi páratlan szám. (A páros számok 0-ra, 2-re, 4-re, 6-ra, 8-ra, A-ra, C-re, vagy E-re végződnek. Hasonlóan 8 különböző utolsó jegye lehet a páratlan számoknak is. Természetesen működne az a megközelítés is, hogy az a) feladatban generál számok fele páros és fele páratlan.)

c) $15\cdot 16^4\cdot 4$ 4-gyel osztható szám van, hiszen az ilyen számok 0-ra, 4-re, 8-ra, vagy C-re végződnek.

d) $15\cdot 16^3\cdot 8$ 32-vel osztható szám van, hiszen az ilyen számok utolsó jegye 0, az első 5 jegyből áll szám pedig egy páros 5-jegyű szám..

vissza a feladathoz

1.51. Tekintsük az alábbi ábrán látható hiányos mátrixokot. (Tridiagonális mátrix „értékes” elemeket tartalmazó mezői. Ha úgy tetszik, akkor egy széttörött sakktábla.) Hányféleképpen juthatunk el a bal felső mezőből a jobb alsó mezőbe, úgy hogy minden lépésnél egy mezőt jobbra, vagy egy mezőt lefelé lépünk és a kijelölt területet nem hagyhatjuk el?



Általánosítsuk a problémát és 8×8-as mátrix helyett vizsgáljunk $n\times n$-es mátrixot!

Megoldás:

Bármilyen bejárást is tekintünk, a mátrix főátlójának mezőire rá kell lépnünk. Két szomszédos diagonális mező közötti két lépés hosszú út megtételére mindig pontosan két lehetőségünk van. (Vagy az átló felett haladunk, jobbra-le lépésekkel, vagy az átló alatt megyünk, le-jobbra sorrenddel.) Ezen lehetőségeket jelölhetjük mondjuk F(ent) és L(ent) szimbólumokkal. Ekkor minden bejárásnak megfeleltethető (kölcsönösen egyértelmű módon) egy hétjegyű (általános esetben $n-1$-jegyű) karaktersorozat, melynek jegyei az $\{F, L\}$ halmazból valók. Így
8×8-as mátrix esetén 2^7 különböző út választható,
$n\times n$-es mátrix esetén 2^{n-1}.

vissza a feladathoz

1.52. Az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 elemek hány negyedosztályú ismétlésnélküli kombinációja tartalmazza az 1; 2 elemeket?

Megoldás:

$$\binom{7}{2}$$

vissza a feladathoz

1.53. Hány olyan ötjegyű szám van, melynek jegyei

a) növekvő sorrendben

b) nem csökkenő sorrendben

következnek egymás után?

Megoldás:

$$a)\ \binom{9}{5} \qquad\qquad b)\ \binom{9+5-1}{5} = \binom{13}{5}$$

vissza a feladathoz

1.54. Az ötös, vagy a hatos lottón lehet kevesebb szelvénnyel biztosan telitalálatot elérni. (Az ötös lottó esetén 90 szám közül kell ötöt eltalálni, a hatoson 45-ből 6-ot.)

Megoldás:

Ötös lottó esetén $\binom{90}{5}$ szelvényre, hatos lottónál pedig $\binom{45}{6}$ szelvényre van szükség. Vizsgáljuk a $\binom{90}{5}-\binom{45}{6}$ különbség előjelét:

$$\begin{aligned}\binom{90}{5}-\binom{45}{6} &= \frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{5!}-\frac{45\cdot 44\cdot 43\cdot 42\cdot 41\cdot 40}{6!}= \\ &= \frac{1}{6!}\cdot(6\cdot 90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86-45\cdot 44\cdot 43\cdot 42\cdot 41\cdot 40)= \\ &= \frac{1}{6!}\cdot 45\cdot 44\cdot 43\cdot(6\cdot 2\cdot 89\cdot 2\cdot 87\cdot 2-42\cdot 41\cdot 40)= \\ &= \underbrace{\frac{1}{6!}\cdot 45\cdot 44\cdot 43}_{>0}\cdot\underbrace{(48\cdot 89\cdot 87-42\cdot 41\cdot 40)}_{>0}>0\end{aligned}$$

Azaz az ötös lottó esetén több szelvényt kell kitölteni.

vissza a feladathoz

1.55. Hányféle lehet a lottó-húzás eredménye, ha tudjuk, hogy csupa egymásutáni számot húztak ki. (A lottóhúzás során 90 szám közül húznak ki 5-öt úgy, hogy a kihúzott elemek sorrendje érdektelen.)

Megoldás:

Az ilyen húzásokat kölcsönösen egyértelmű módon azonosíthatjuk a legkisebb kihúzott számmal. Ez a szám tetszőlegesen választható az 1,2, ...,86 számok közül. Így 86 különböző húzás lehetséges.

vissza a feladathoz

1.56. Hányféle lehet a lottó-húzás eredménye, ha tudjuk, hogy kihúztak két pár egymásutáni számot, de nem húztak három egymás utánit?

Megoldás:

Jelölje a kihúzott számokat: $n_1<n_2<n_3<n_4<n_5$. Aszerint, hogy a kihúzott számok közül melyik a „különálló” három esetet lehet megkülönböztetni (n_1, n_3, n_5). Könnyen látható, hogy az első illetve az utolsó eset szimetrikus.

Ha n_1 a különálló, akkor n_1, n_2-1 és n_4-3 három különböző számot jelöl az $\{1,\ 2,\ \dots,\ 86\}$ halmazból. Ha $a_1<a_2<a_3$ három szám $\{1,\ 2,\ \dots,\ 86\}$-ből, akkor a feltételeknek megfelelő számok az alábbi módon generálhatók:

$$n_1=a_1,\quad n_2=a_2+1,\quad n_3=a_2+2,\quad n_4=a_3+3,\quad n_5=a_3+4.$$

Így az ilyen húzásoknak kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetőek a C_{86}^3 ismétlés nélküli kombinációk, azaz $\binom{86}{3}$ a feltételeknek megfelelő lottóhúzás lehetséges. (Ugyanennyi esetet jelent, ha n_5 a különálló szám.)

Ha n_3 a különálló, akkor $a_1=n_1$, $a_2=n_2-2$ és n_4-3 jelöl három különböző számot az $\{1,\ 2,\ \dots,\ 86\}$ halmazból. Így a feltételnek megfelelő húzások és a 86 elemű halmaz 3 elemű részhalmazai között most is kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

Az összes lehetőségek száma tehát $3\cdot\binom{86}{3}$.

vissza a feladathoz

1.57. Egy évfolyam 50 lány és 30 fiú hallgatója öttagú küldöttséget választ, éspedig 3 lányt és 2 fiút. Hányféleképpen tehetik ezt meg? Hányféleképpen választhatnak küldöttséget akkor, ha Ancsa és Berci éppen haragban vannak, ezért nem akarnak együtt bekerülni.

Megoldás:

Összesen $\binom{50}{3}\cdot\binom{30}{2}$-féle bizottság állítható össze.

Ha ügyelünk arra, hogy A és B ne kerüljön egyszerre a bizottságba:

$$\binom{50}{3}\cdot\binom{30}{2}-\binom{49}{2}\cdot\binom{29}{1}$$

vagy más megközelítésben

$$\underbrace{\binom{49}{3}\cdot\binom{29}{2}}_{\text{egyik sem}}+\underbrace{\binom{49}{2}\cdot\binom{29}{2}}_{\text{csak }A}+\underbrace{\binom{49}{3}\cdot\binom{29}{1}}_{\text{csak }B}$$

vissza a feladathoz

1.58. Egy postahivatalban 10-féle képeslapot árulnak. Hányféleképpen vásárolhatunk

a) 8 különböző képeslapot?

b) 8 képeslapot?

c) 12 képeslapot?

Megoldás:

$$a)\ \binom{10}{8}\qquad b)\ \binom{17}{8}\qquad c)\ \binom{21}{12}$$

vissza a feladathoz

1.59. Hány szótárt kell kiadnunk, hogy közvetlenül tudjunk fordítani 10 különböző nyelv közül bármelyikről bármelyik másikra?

Megoldás: $\binom{10}{2}$

vissza a feladathoz

III.2. fejezet

A binomiális és a polinomiális tétel

2.9. Igazoljuk, hogy

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}\cdots=2^{n-1}.$$

Ötlet: Gondoljuk meg, hogy hányféleképpen választható ki n tárgy közül páratlan számú.

vissza a feladathoz

2.10. Igazoljuk, hogy ha $0 \leq r \leq n$, akkor

$$\binom{n}{0}\binom{n}{r}+\binom{n}{1}\binom{n}{r-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{r-2}+\ldots+\binom{n}{r}\binom{n}{0}=\binom{2n}{r}.$$

Ötlet: A Vandermonde-azonosságban legyen $m=n$.

vissza a feladathoz

2.11. Igazoljuk, hogy minden $n \geq 2$-re

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)2^{n-2}.$$

Adjunk kombinatorikus bizonyítást is.

Ötlet: Kombinatorikusan: gondoljuk meg, hogy hányféleképpen lehet n személy közül kiválasztani egy legalább 2 főből álló bizottságot, majd ennek kijelölni egy elnökét és egy alelnökét.

vissza a feladathoz

2.12. Igazoljuk, hogy minden $n \geq 2$-re

$$\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}+3\binom{n}{4}+\ldots+(n-1)\binom{n}{n}=(n-2)\cdot 2^{n-1}+1.$$

Ötlet: Az igazolandó állítás mindkét oldalához adjunk 2^n-1-et! A baloldalon ezt úgy tegyük meg, hogy hozzá a következő átírást használjuk:

$$2^n-1=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}.$$

vissza a feladathoz

2.13. Számítsuk ki az $\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}(-1)^{i-k}$ összeget, ahol $1\le k\le n$.

Ötlet: Jelölje S az adott összeget. Ha $k=n$, akkor $S=\binom{n}{n}\binom{n}{n}=1$. Legyen $k<n$, akkor a trinomiális alakot használva

$$S=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}(-1)^{i-k}=\binom{n}{k}\sum_{i=k}^{n}\binom{n-k}{i-k}(-1)^{i-k}=\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}(-1)^{j}=0.$$

Másképp, $x^n=(x-1+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x-1)^i=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}(-1)^{i-k}x^k$, tehát $x^n=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}(-1)^{i-k}\right)x^k$, és hasonlítsuk össze x együtthatóit.

vissza a feladathoz

2.14. Legyen

$$a_n=\frac{1}{\binom{n}{0}}+\frac{1}{\binom{n}{1}}+\cdots+\frac{1}{\binom{n}{n}},\qquad n\ge 0.$$

Igazoljuk, hogy $a_{n+1}=\frac{n+2}{2(n+1)}a_n+1$, $n\ge 0$, és $a_n\to 2$ mikor $n\to\infty$.

Megoldás. Itt $a_0=1/1=1$, $a_1=1/1+1/1=2$, $a_2=1/1+1/2+1/1=5/2=2{,}5$, $a_3=1/1+1/3+$ $+1/3+1/1=8/3=2{,}66...$, $a_4=1/1+1/4+1/6+1/4+1/1=8/3=2{,}66...$, $a_5=1/1+1/5+1/10+$ $+1/10+1/5+1/1=13/5=2{,}6$, $a_6=151/60=2{,}51...$. Minden $n\ge 0$-ra $a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!\,(n-k)!}{n!}$, ami nem hozható egyszerűbb alakra, de

$$a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{k!\,(n+1-k)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{k!\,(n-k)!}{n!}(n+1-k)+1=a_n-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{k\cdot k!\,(n-k)!}{n!}+1=$$

$$=a_n-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1-1)k!\,(n-k)!}{n!}+1=a_n-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)!\,(n-k)!}{n!}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{k!\,(n-k)!}{n!}+1=$$

$$=a_n-(a_{n+1}-1)+\frac{1}{n+1}a_n+1=\frac{n+2}{(n+1)}a_n-a_{n+1}+2,$$

ahonnan megvan a rekurzió. Továbbá $a_n>2$, ha $n\ge 3$, sőt $a_n>2+\frac{2}{n}$, ha $n\ge 4$ (az $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$ binomiális együtthatók figyelembevételével). Innen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+2}{2(n+1)}+\frac{1}{a_n}<\frac{n+2}{2(n+1)}+\frac{n}{2(n+1)}=1,\qquad n\ge 4,$$

tehát az (a_n) sorozat szigorúan csökkenő, ha $n\ge 4$. Következik, hogy (a_n) konvergens, legyen $a=\lim_{n\to\infty}a_n$. A rekurzióból azonnali, hogy $a=2$.

vissza a feladathoz

2.15. Számítsuk ki a $\sum\limits_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}(-1)^{i-k}$ összeget, ahol $1 \le k \le n$.

Megoldás:

Felhasználjuk az

$$\binom{n}{k}\cdot\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\cdot\binom{n-m}{k-m}$$

összefüggést, amelyet kombinatorikus meggondolások alapján igazolhatunk. Egy n-tagú társaságból egy k-tagú bizottságot és annak egy m-tagú albizottságát szeretnénk megválasztani. A baloldali kifejezés azon választásokat írja le, melyek során kiválasztjuk a k-tagú bizottságot, majd a bizottság tagjai közül választjuk ki azokat, akik az albizottságnak is tagjai. A másik módszer, hogy először az albizottság m tagját választjuk, majd a „maradék” $n-m$ személy közül kiválasztjuk azokat akik a bizottságnak ugyan tagjai, de az albizottságban nincsenek benne, ők $k-m$-en vannak. Így

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}(-1)^{i-k}=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}(-1)^{i-k}=\binom{n}{k}\cdot\sum_{i=k}^{n}\binom{n-k}{i-k}(-1)^{i-k}=\binom{n}{k}\cdot\underbrace{\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}(-1)^{j}}_{=0}=0$$

vissza a feladathoz

2.16. Igazoljuk, hogy az $\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \binom{n+k-1}{k}$ ismétléses kombinációkra vonatkozóan:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle, \quad (n,k \ge 1).$$

Megoldás:

Algebrai megoldás:

$$\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle+\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle=\binom{(n-1)+k-1}{k}+\binom{n+(k-1)-1}{k-1}=\binom{n+k-2}{k}+\binom{n+k-2}{k-1}=\binom{n+k-1}{k}=\left\langle {n \atop k} \right\rangle$$

Kombinatorikai megoldás:

n elem közül választunk visszatevéssel, a sorrendre való tekintet nélkül k darabot. Ez az ismétléses kombináció alapfeladata, így $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$-féleképpen tehető meg. Most osztályozzuk ezeket a kiválasztásokat aszerint, hogy a kiváasztott elemek között szerepelt-e egy kitüntetett elem. Ha szerepel, akkor a maradék $k-1$ helyre $\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$-féleképpen választhatunk elemeket. Ha nem szerepel a kiválasztottak közt, akkor $\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle$ kiválasztás lehetséges.

vissza a feladathoz

III.3. fejezet

Szitaképletek

3.11. Adott egy X alaphalmaz és annak $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ részhalmazai. Hány elem tartozik az A_i-k közül pontosan 3-ba?

Megoldás:

$$\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|-\tbinom{4}{3}\cdot\sum|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_\ell|+\tbinom{5}{3}\cdot\sum|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_\ell\cap A_m|-\cdots+(-1)^{n+1}\tbinom{n}{3}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

vissza a feladathoz

3.12. Hányféleképpen ültethetünk le egy kerekasztal körül három angolt három franciát és három törököt úgy, hogy három azonos nemzetiségű ne üljön egymás mellé?

Megoldás:

Logikai-szitaformulával:

Összes ültetési lehetőségek: 8!

Ha (legalább) egy nép blokkban ül: $\binom{3}{1}\cdot 6!\cdot 3!$

Ha (legalább) két nép blokkban ül: $\binom{3}{2}\cdot 4!\cdot 3!\cdot 3!$

Ha mind a 3 csapat blokkban ül: $2!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!$

Így a helyes ültetések száma:

$$8!-\binom{3}{1}\cdot 6!\cdot 3!+\binom{3}{2}\cdot 4!\cdot 3!\cdot 3!-2!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!$$

vissza a feladathoz

3.13. Hány olyan részhalmaza van az $\{1,2\ldots,10\}$ halmaznak, amely tartalmaz legalább egy páratlan számot?

$$2^{10}-2^5.$$

vissza a feladathoz

3.14. Hány olyan részhalmaza van az $\{1,2\ldots,10\}$ halmaznak, amely tartalmaz legalább három páratlan számot?

$$2^{10}-2^5-2^5\cdot\binom{5}{1}-2^5\cdot\binom{5}{2}.$$

vissza a feladathoz

3.15. Hányféleképpen választható ki az augusztus hónap 5 napja úgy, hogy ne legyenek köztük egymásutáni napok?

Megoldás. Ha az adott hónap öt tetszőleges napját kellene kiválasztani, akkor a lehetőségek száma $\binom{31}{5}$. Jelölje most a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 a kiválasztandó napok sorszámát, ahol a feltételnek megfelelően $1 \leq a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < a_4 - 3 < a_5 - 4 \leq 27$. A válasz: $\binom{27}{5}$.

vissza a feladathoz

3.16. Az $1,2,\ldots n$ számoknak hány olyan permutációja van, hogy $1,2,\ldots,k$ nem állnak egymás után

i) ebben a sorrendben,

ii) valamilyen sorrendben.

Megoldás.

i) Ha $1,2,\ldots,k$ egymás után állnak, akkor $1,2,\ldots,k$ egy blokknak tekintendő, $(n-k+1)!$ ilyen permutáció van, és a válasz: $n! - (n-k+1)!$.

ii) Ha $1,2,\ldots k$ egymás után állnak valamilyen sorrendben, akkor $k!\,(n-k+1)!$ ilyen permutáció van, és a válasz: $n! - k!\,(n-k+1)!$.

vissza a feladathoz

III.4. fejezet

Összeszámlálási feladatok

4.10. Egy világbajnoki selejtezőben Európából 5 csapat indult, Ázsiából 10 résztvevő van, Észak-Amerikából, Dél-Amerikából és Afrikából egyaránt 7-en neveztek. A világbajnoki döntő 5 csapatos mezőnye úgy áll össze, hogy minden kontinensről pontosan egy csapat jut be. A kontinenseken lejátszott selejtezők után hányféle lehet a döntő összeállítása?

Megoldás:

$5 \cdot 10 \cdot 7^3$.

vissza a feladathoz

4.11. Melyik dominó készletben van több elem:

a) amelynek elemein 0-tól 8-ig vannak pontok és tartalmaz „dupla” dominókat, vagy

b) amelynek elemein 0-tól 9-ig vannak pontok, de nem tartalmaz „dupla” dominókat?

Megoldás:

Az a-típusú készletben $\binom{9}{2}+9=\frac{9\cdot 8}{2}+9=45$ dominó van, a b-típusúban $\binom{10}{2}=\frac{10\cdot 9}{2}=45$. Azaz a két készlet ugyanannyi dominót tartalmaz.

vissza a feladathoz

4.12. Öt házaspárból, hat hajadonból és hét agglegényből hányféleképpen tudunk 10 embert kiválasztani úgy, hogy házaspár ne legyen közöttük, de legyen köztük két asszony két nős férfi három agglegény és három hajadon?

Megoldás:

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot 73\cdot 63$$

vissza a feladathoz

4.13. Az EB-selejtezőn 7 csoportban 50 csapat szerepel (egy 8 csapatos és hat 7 csapatos csoport van). A csoportokban oda-visszavágós rendszerben körmérkőzéseket játszanak. (Mindenki játszik mindenkivel egyszer idegenben és egyszer otthon.) Hány mérkőzést játszanak összesen? Hányféle lehet a döntő 16-os mezőnye, ha minden csoportból az első két helyezett jut tovább (a két házigazda nem vesz részt a selejtezőn automatikusan tagjai a döntőnek).

Megoldás:

Mérkőzések száma: $2\cdot\binom{8}{2}+6\cdot 2\cdot\binom{7}{2}$

vissza a feladathoz

A döntő mezőnye $\binom{8}{2}\cdot\binom{7}{2}^6$-féleképpen állhat össze.

4.14. $2n$ különböző magasságú ember hányféleképpen tud két n-hosszúságú sorbaállni úgy, hogy az első sorban mindenki alacsonyabb legyen, a hátsó sorban a megfelelő helyen állónál?

Megoldás:

1. Megoldás: Minden helyes sorbarendezés kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető a $2n$ személy egy párosításának, hiszen ha a párokat kialakítjuk, akkor azzal egyértelműen meghatároztuk azt is, hogy egy-egy párból ki áll az első és ki a hátsó sorba.

A párosítások száma:

$$\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{2}{2}=\frac{2n\cdot(2n-1)}{2}\cdot\frac{(2n-2)\cdot(2n-3)}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot 1}{2}=\frac{(2n)!}{2^n}$$

2. Megoldás: A $2n$ személy a rendelkezésre álló $2n$ helyen $(2n)!$-féleképpen helyezkedhet el, ha nem figyelünk a megkötésre. Minden, a feltételeknek megfelelő elrendezés származtatható úgy, hogy a fent összeszámolt elhelyezkedések közül egy tetszőlegest kiválasztunk és abban a rossz sorrendben álló párokat (ahol a magasabb személy áll elöl) felcseréljük. Az n-pár mindegyikében egy „jó” elrendezéshez tartozik egy „rossz” elrendezés. Így minden „jó” sorrendhez 2^n elrendezést számoltunk. Így a helyes elrendezések száma: $\frac{(2n)!}{2^n}$.

vissza a feladathoz

4.15. Mennyi azoknak a tízjegyű számoknak az összege, melyek a $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 9$ számjegyek ismétlésnélküli permutációiként kaphatók. (Figyelem 0-val nem kezdődhet szám!)

Megoldás:

Először vegyük az összes ismétlésnélküli permutáció összegét. (Ne foglalkozzunk azzal a feltétellel, hogy az első helyen nem állhat 0.) Ekkor a következő megfigyeléseket tehetjük:

1) A permutációk száma (beleértve a 0-val kezdődőket is): 10!
2) Az egyes helyiértékeknél képezve az összeget ugyanazokat a számokat kell összeadni, csak más sorrendben. Következésképpen Az egyesek a tizesek stb alakiértékének összege megegyezik.
3) Az így alkotott tízjegyű számokat egymásfölé írva az egyesek helyén minden számjegy ugyanannyiszor szerepel. (Természetesen hasonló megállapítás tehető az összes helyiértékre.) Vagyis minden számjegy minden helyiértéken $\frac{10!}{10}=9!$ alkalommal fordul elő.

A fentiek alapján az egyesek összege:

$$S=9!\cdot(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)=9!\cdot\frac{9\cdot 10}{2}=45\cdot 9!$$

Mivel minden helyiértéken az alakiértékek összege S az órai indoklással analóg módon az összeg:

$$\Sigma=S\cdot(1+10+100+\cdots+1000000000)=1111111111\cdot 9!\cdot 45.$$

Ebben az összegben azonban bennevannak azok a nemkívánt számok is amelyek 0-val kezdődnek. Ezek összegét az előzőekhez hasonlóan számolhatjuk ki. Mivel a legnagyobb helyiértéken 0 áll, ezek valójában az $1,\ 2,\ \ldots,\ 9$ számjegyekből alkotott kilencjegyű számok.

Az összegük a fentiekhez hasonlóan

$$\sigma=(8!\cdot 45)\cdot 111111111$$

A kérdéses összeg pedig

$$\begin{aligned}\Sigma - \sigma &= 1111111111 \cdot 9! \cdot 45 - (8! \cdot 45) \cdot 111111111 = 8! \cdot 45 \cdot (9999999999 - 111111111) = \\ &= 8! \cdot 45 \cdot 9888888888.\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

4.16. Mennyi azoknak a hatjegyű számoknak az összege, melyek a 0, 1, 1, 1, 2, 2 számjegyek permutálásával képezhetők?

Megoldás:

$$70 \cdot 111111 - 14 \cdot 11111.$$

vissza a feladathoz

4.17. Jelölje $p_k(n)$ az n szám k részre való partícióinak a számát. Mennyi $p_1(n)$, $p_2(n)$ és $p_3(n)$ az n függvényében?

Útmutatás: A definíció alapján azonnali, hogy $p_1(n) = 1$ minden $n \geq 1$ estén.

Legyen most $n = a+b$, ahol $a \geq b \geq 1$. Hányféleképpen választható meg a és b? Vizsgáljuk az n páros és n páratlan eseteket! Válasz: $p_2(n) = [n/2]$ minden $n \geq 1$-re.

$p_3(n)$-re már nehezebb képletet adni. Használva a $p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-1)$ $(n \geq k \geq 2)$ rekurziót, lásd 6.2. Tétel, igazoljuk, hogy

$$p_3(n) = p_3(n-3) + p_2(n-3) + 1 \quad (n \geq 3).$$

Vizsgáljuk az $n=6q+r$, $0 \leq r \leq 5$ eseteket. Mutassuk meg, hogy ha $n=6q$ alakú $(q \geq 1)$, akkor $p_3(n) = n^2/12$, ha $n = 6q+1$ alakú, akkor $p_3(n) = (n^2-1)/12$. Mennyi $p_3(n)$ a többi esetben?

vissza a feladathoz

4.18. Igazoljuk, hogy minden $n \geq 1$ számra

$$n \cdot p(n) = \sum_{m=1}^{n} m \sum_{k=1}^{[n/m]} p(n-km),$$

$$n \cdot p(n) = \sum_{r=1}^{n} \sigma(r) p(n-r),$$

ahol $p(n)$ az n partícióinak a száma, $\sigma(r)$ pedig az r pozitív osztóinak az összege.

Útmutatás: Tekintsük az n összes $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_s$ partícióját és adjuk össze ezeket az egyenlőségeket. Akkor a bal oldal éppen $np(n)$. A jobb oldalon csoportosítsunk a fellépő m $(1 \leq m \leq n)$ tagokok szerint. Ha m $f(m)$-szer fordul elő, akkor kapjuk, hogy

$$n \cdot p(n) = \sum_{m=1}^{n} m f(m).$$

Mennyi az $f(m)$?

A második képlet levezetéséhez rendezzük át az első képlet jobb oldalának tagjait a $km = r$ értékek szerint csoportosítva.

vissza a feladathoz

III.5. fejezet

Kombinatorika a geometriában

5.6. Adott 10 általános helyzetű pont a síkon, vagyis olyan pontok, hogy semelyik három nincs egy egyenesen és semelyik négy nincs egy körön.

a) hány különböző egyenest határoznak meg a pontok?

b) hány különböző kört határoznak meg a pontok?

Megoldás:

a) Minden egyenest egyértelműen meghatároz két pontja, mivel semelyik három pont nem esik egy egyenesre, ezért pontosan annyi egyenest határoznak meg a pontok, ahányféleképpen kiválaszthatunk közülük kettőt a sorrendre való tekintet nélkül: $\binom{10}{2}$

b) Minden kört egyértelműen meghatároz három pontja, mivel semelyik négy pont nincs egy körön, ezért pontosan annyi kört határoznak meg a pontok, ahányféleképpen kiválaszthatunk közülük hármat a sorrendre való tekintet nélkül: $\binom{10}{3}$ vissza a feladathoz

5.7. Adott a síkon 10 pont úgy, hogy tudjuk, hogy közülük legalább 5 egy körön van. Legfeljebb hány különböző kört határoznak meg ezek a pontok?

Megoldás:

$$\binom{10}{3} - \binom{5}{3} + 1.$$

vissza a feladathoz

5.8. A síkon 9 párhuzamos egyenes n darab ugyancsak párhuzamos egyenest metsz, és ezek mindegyike merőleges az első 9-re. Az egyenesek összesen 756 darab téglalapot határoznak meg. Mennyi az n szám értéke?

Megoldás:

Nevezzük a megadott 9 egyenesünket függőlegeseknek és a rájuk merőleges n darab egyenest vízszintesnek. (Függetlenül a valóságos irányuktól.) Minden téglalapot kölcsönösen egyértelműen meghatároz a négy oldala. Ezek közül kettőt a 9 „függőleges” egyenes közül kell választanunk, méghozzá a sorrendre való tekintet nélkül, a másik kettőt pedig az n darab „vízszintes” egyenes közül választunk. Így összesen $\binom{9}{2} \cdot \binom{n}{2}$ téglalap generálható. A feltétellel összevetve az alábbi egyenlethez jutunk:

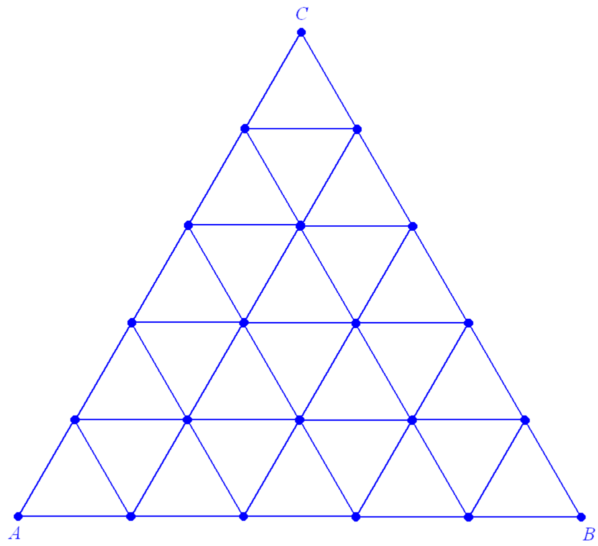
$$756 = \binom{9}{2} \cdot \binom{n}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = n^2 - n - 42.$$

Ahonnan $n = 7$ vagy $n = -6$. Ez utóbbi nyilvánvalóan hamisgyök. vissza a feladathoz

5.9. Tekintsük az alábbi háromszöghálót!

a) Hány, az ABC háromszöghöz hasonló háromszög rajzolható, amelynek csúcsai rácspontok? Azaz hány olyan háromszög rajzolható, melynek csúcsai rácspontok, élei pedig rácsvonalak?

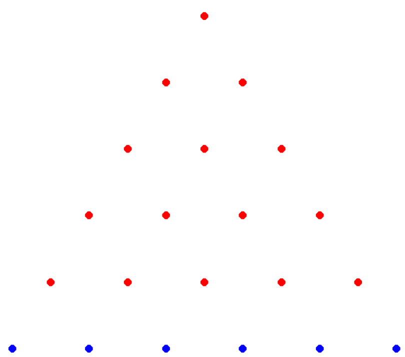
b) Hány olyan háromszög rajzolható, melynek csúcsai rácspontok?



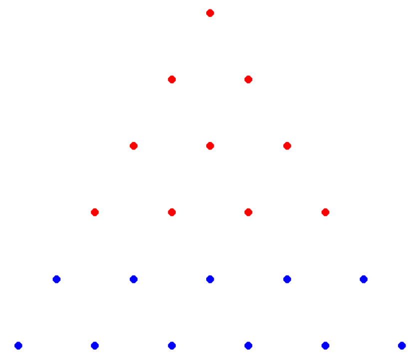
Megoldás:

a) Minden, a feltételeknek megfelelő háromszögnek van egy vízszintes éle. Az alapján, hogy a harmadik csúcs a vízszintes él alatt vagy fölött helyezkedik el, különböztessünk meg fel- és le-típusú háromszögeket. Ezeket számoljuk külön.

- „fel-típusú” háromszögek:
  Végezzünk további eset-szétválasztást a háromszögek oldalhossza alapján:
  - Egység-élű háromszögek:
    A háromszöget egyértelműen meghatározza a harmadik (a vízszintes él fölötti) csúcs választása. Ez a pirossal jelölt csúcsok közül tetszés szerint választható, azaz 15 ilyen háromszög rajzolható.

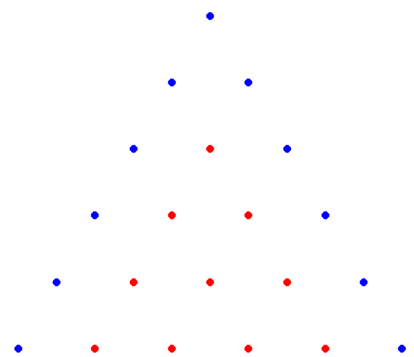


  - két egység élhosszúságú háromszögek:
    A háromszöget most is egyértelműen meghatározza a harmadik csúcs választása. Ez a pirossal jelölt csúcsok közül tetszés szerint választható, azaz 10 ilyen háromszög rajzolható.

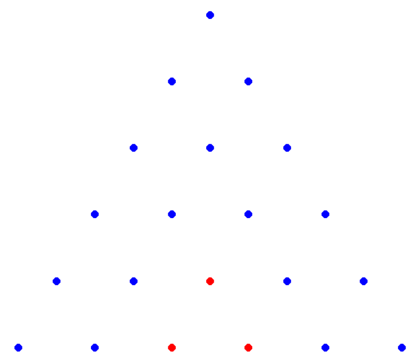


- ◦ három egység élhosszúságú háromszögből a fentiekhez hasonló megondolások alapján 6 darab van.
- ◦ négy egység élhosszúságú háromszögből 3 darab van.
- ◦ öt egység élhosszúságú háromszögből egyetlen darab rajzolható.

- „le-típusú" háromszögek:
  Itt is az élhossz alapján osztályozunk:
  - ◦ Egység-élű háromszögek:
    A háromszöget most is egyértelműen meghatározza a harmadik (a vízszintes él alatti) csúcs választása. Ez a pirossal jelölt csúcsok közül tetszés szerint választható, azaz 6 ilyen háromszög rajzolható.



  - ◦ két egység élhosszúságú háromszögek:
    A háromszöget harmadik csúcsa a pirossal jelölt csúcsok közül választható, azaz 3 ilyen háromszög van.

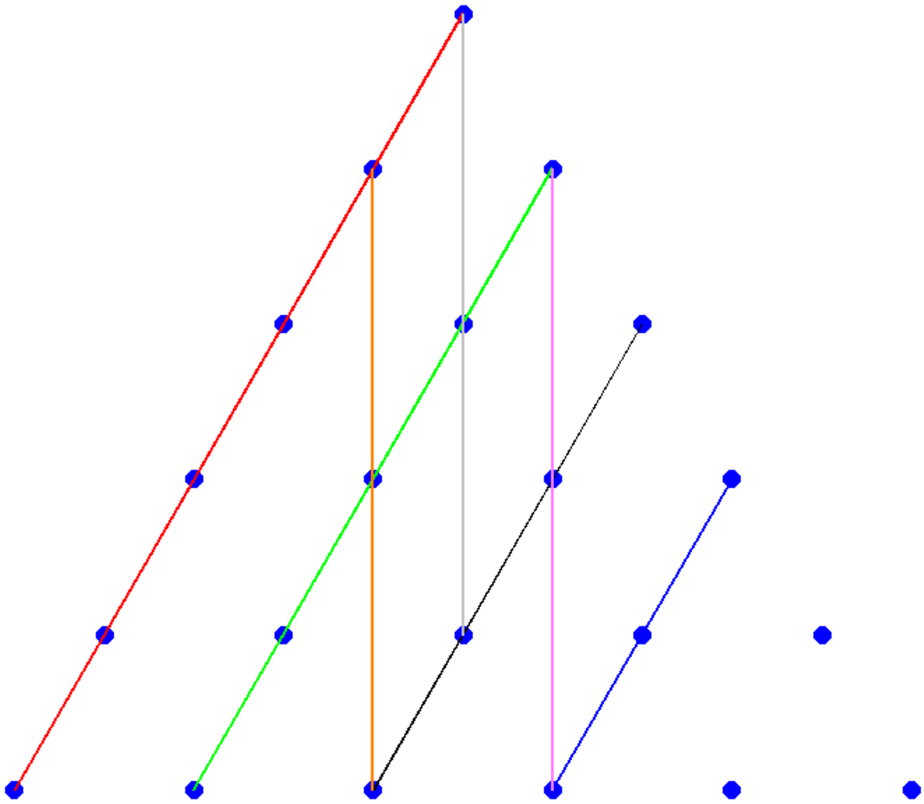


  - ◦ nagyobb élhosszúságú háromszög nem fér el a rácson.

  Azaz összesen 35 „fel-típusú" és 13 „le-típusú" háromszög rajzolható. Ez 48 az ABC-hez hasonló háromszöget jelent.

b) A háromszöget egyértelműen meghatározza a 3 csúcspont kiválasztása, amely $\binom{21}{3}$ lehetőséget jelentene. Vigyáznunk kell azonban, hogy a csúcsok ne essenek egy egyenesre.

Számoljuk össze tehát a „hibás” választásokat. Ehhez tekintsük az alábbi ábrát:



Mindhárom pont a piros egyenesre esik $\binom{6}{3}$ esetben, a zöldre $\binom{5}{3}$, a feketére $\binom{4}{3}$ esetben. A sárga a szürke és a pink egyenesek esetén egy-egy kiválasztás van. Vegyük észre, hogy az ábrát 120^o-kal a háromszög súlypontja körül akár pozitív, akár negatív irányba forgatva, a rácspontok fedésbe kerülnek, de az előbb felrajtolt problémás egyenesek újabb egyenesekbe mennek át.

Így a „hibás” kiválasztások száma $3\cdot\left(\binom{6}{3}+\binom{5}{3}+\binom{4}{3}+3\right)$

A valódi háromszögek száma tehát $\binom{21}{3}-3\cdot\left(\binom{6}{3}+\binom{5}{3}+\binom{4}{3}+3\right)=1219$.

vissza a feladathoz

III.6. fejezet

Fibonacci-számok

6.8. Alkalmazzuk a 6.1-es feladatban levezetett általános képletet!

vissza a feladathoz

6.9. Alkalmazzuk a 6.1-es feladatban levezetett általános képletet!

vissza a feladathoz

6.10. Alkalmazzuk a 6.1-es feladatban levezetett általános képletet!

vissza a feladathoz

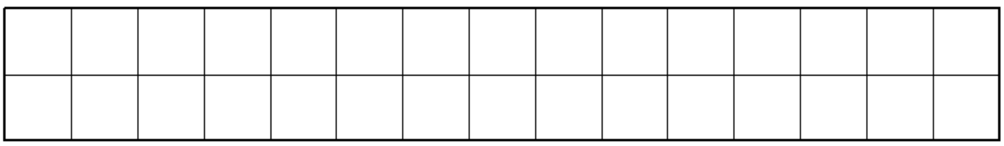
6.11. Jelölje S_n a lehetőségek számát n lépcsőfok végigjárására. Aszerint, hogy az első lépésben 1 vagy két lépcsőfokot lépünk a további lehetőségek száma S_{n-1} illetve S_{n-2}. Így az alábbi másodfajú rekúrzió írható fel:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}.$$

A kezdőelemek egyszerű leszámlálással meghatározhatók: $S_0 = 1$ és $S_1 = 1$. Így $(S_n,\ n \in \mathbb{N})$ épp a Fibonacci számok sorozata.

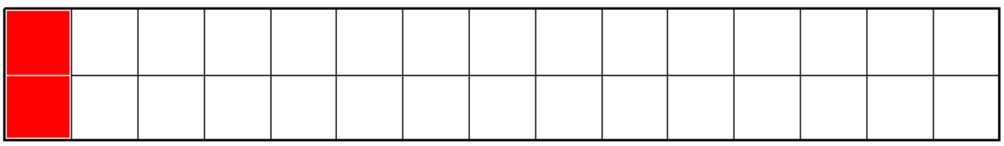
vissza a feladathoz

6.12. Ötlet: tekintsük az alábbi táblát:



Az első dominó elhelyezésére két lehetőségünk van.

Ha az első dominót állítva helyezzük el, a továbbiakban egy 2x14-es táblát kell lefednünk:



A másik lehetőség, hogy az első dominót fektetve helyezzük el. A másodikat ekkor csak párhuzamosan fölé helyezhetjük, s ezután a maradék 2x13-as táblát kell lefednünk.

Így a Fibonacci-számokéhoz hasonló másodrendű rekúrzió írható.

vissza a feladathoz

6.13. Az előzőekhez hasonlóan írjunk fel másodrendű rekúrziót!

vissza a feladathoz

6.14. Az előzőekhez hasonlóan írjunk fel másodrendű rekúrziót!

vissza a feladathoz

6.15. Igazoljuk a Fibonacci-számokra vonatkozó alábbi állításokat:

a) $F_1+F_2+\cdots+F_n = F_{n+2}-1 \ n \geq 1$,

b) $F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1} = F_{2n} \ n \geq 1$,

c) $F_2+F_4+\cdots+F_{2n} = F_{2n+1}-1 \ n \geq 1$,

d) $F_1-F_2+F_3-\cdots+(-1)^{n+1}\cdot F_n = (-1)^{n+1}\cdot F_{n-1}+1 \ n \geq 1$,

e) $F_{n+m} = F_{n-1}\cdot F_m + F_n \cdot F_{m+1} \ n, m \geq 1$,

f) $F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}-1 \ n \geq 1$

g) $F_{n+1}\cdot F_{n-1}-F_n^2 = (-1)^n$ ($n \geq 1$, Cassini-képlet),

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \vartheta$.

Megoldás:

a) Az állítás igazolható n-szerinti teljes indukcióval, vagy így:

$$\begin{aligned} F_2 &= F_1+F_0 \\ F_3 &= F_2+F_1 \\ F_4 &= F_3+F_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ F_{n+2} &= F_{n+1}+F_n \end{aligned}$$

Összeadva a fenti egyenlőségeket kapjuk, hogy $F_{n+2} = 1+F_1+F_2+\ldots+F_n$.

b) Az állítás n-szerinti teljes indukcióval igazolható.

c) Az állítás n-szerinti teljes indukcióval igazolható.

Bizonyítás.

Az állítás igazolható n-szerinit teljes indukcióval, vagy a b) és c) állítás felhasználásával eset szétválasztással:

Ha n páros ($n=2m$):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} F_i\cdot(-1)^{i+1} &= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} F_{2i-1}}_{F_{2m}=F_n} - \underbrace{\sum_{i=1}^{m} F_{2i}}_{F_{2m+1}-1=F_{n+1}-1} = F_n - F_{n+1}+1 = \\ &= F_n-(F_n-F_{n-1})+1 = -F_{n-1}+1 = (-1)^{n+1}F_{n-1}+1\end{aligned}$$

Ha n páratlan ($n=2m+1$):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} F_i\cdot(-1)^{i+1} &= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} F_{2i-1}}_{F_{2m}=F_{n-1}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{m} F_{2i}}_{F_{2m+1}-1=F_n-1} +F_n = \\ &= F_{n-1}-F_n+1+F_n = F_{n-1}+1 = F_{n-1}+1 = (-1)^{n+1}F_{n-1}+1.\end{aligned}$$

■

d) *Bizonyítás.* m-szerinti teljes indukcióval:

i) $m=1$ esetén az állítás igaz, hiszen

$$F_{n+1} = F_{n-1}\cdot F_1 + F_n\cdot F_2 = F_{n-1}+F_n.$$

ii) Tegyük fel, hogy valamely $m\in\mathbb{N}^*$ esetén az állítás teljesül, azaz

$$F_{n+m} = F_{n-1}\cdot F_m + F_n\cdot F_{m+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

iii) Igazoljuk $m+1$-re:

$$\begin{aligned}F_{n+(m+1)} &= F_{n+1+m} = F_{n+1-1}\cdot F_m + F_{n+1}\cdot F_{m+1} = F_n\cdot F_m + (F_n+F_{n-1})\cdot F_{m+1} = \\ &= F_n\cdot(F_m+F_{m+1}) + F_{n-1}\cdot F_{m+1} = F_n\cdot F_{m+2} + F_{n-1}\cdot F_{m+1}\end{aligned}$$

■

e) *Bizonyítás.* n-szerinti teljes indukcióval:

i) $n=1$ esetén az állítás teljesül, hiszen

$$1 = F_1^2 = F_1\cdot F_2 = 1\cdot 1$$

ii) Tegyük fel, hogy valamely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén az állítás teljesül, azaz

$$F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2 = F_n\cdot F_{n+1}-1$$

item Igazoljuk $n+1$-re:

$$F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2+F_{n+1}^2 = F_nF_{n+1}+F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_{n+1}+F_n) = F_{n+1}\cdot F_{n+2}.$$

■

f) *Bizonyítás.* n-szerinti teljes indukcióval:

i) $n=1$ esetén az állítás teljesül, hiszen

$$F_2 \cdot F_0 - F_1^2 = 0 \cdot 1 - 1^2 = -1.$$

ii) Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az állítás teljesül, azaz

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

iii) Igazoljuk $n+1$-re:

$$\begin{aligned} F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1}+F_n) \cdot F_n - F_{n+1}^2 = F_{n+1} \cdot F_n + F_n^2 - F_{n+1}^2 = F_n^2 - F_{n+1} \cdot (F_{n+1} - F_n) = \\ &= F_n^2 - F_{n+1} \cdot F_{n-1} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

■

g)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n\to\infty} \vartheta \cdot \frac{F_{n+1}}{\frac{\vartheta^{n+1}}{\sqrt{5}}} \cdot \frac{\frac{\vartheta^n}{\sqrt{5}}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \vartheta \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\vartheta^{n+1} - \overline{\vartheta}^{n+1}\right)}{\frac{\vartheta^{n+1}}{\sqrt{5}}} \cdot \frac{\frac{\vartheta^n}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\vartheta^n - \overline{\vartheta}^n\right)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \vartheta \cdot \left(1 - \left(\frac{\overline{\vartheta}}{\vartheta}\right)^{n+1}\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{\overline{\vartheta}}{\vartheta}\right)^{n}\right) = \vartheta. \end{aligned}$$

Mivel $\vartheta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $\overline{\vartheta} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ezért $0 < \frac{\overline{\vartheta}}{\vartheta} = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 1$. Így $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\overline{\vartheta}}{\vartheta}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\overline{\vartheta}}{\vartheta}\right)^{n} = 0$.

vissza a feladathoz

6.16. Igazoljuk, hogy az F_n Fibonacci-számokra:

a) $n \mid m$ akkor és csak akkor teljesül, ha $F_n \mid F_m$ $(n, m \geq 1)$,

b) $(F_n, F_m) = F_{(n,m)}$ $(n, m \geq 1)$, ahol (u, v) az u és v számok legnagyobb közös osztója.

Bizonyítás.

a) $\Rightarrow$ Tegyük fel, hogy $n \mid m$. Ekkor legyen $m = kn$, ahol $k \geq 1$. Igazoljuk az állítást k-szerinti teljes indukcióval!

i) $k=1$ esetén $F_n = F_m \mid F_m$ nyilvánvalóan teljesül.

ii) Tegyük fel, hogy a tulajdonság igaz valamely $k \in \mathbb{N}^*$ esetén, azaz $F_{kn} = \ell \cdot F_n$.

iii) Igazoljuk az állítást $k+1$-re:

$$F_{(k+1)n} = F_{kn+n} \overset{7.13.e}{=} F_{kn-1}F_n + F_{kn}F_{n+1} \overset{ii)}{=} F_{kn-1}F_n + \ell F_n F_{n+1} = F_n(F_{kn-1} + \ell F_{n+1}),$$

azaz F_n valóban osztója $F_{(k+1)n}$-nek.

A $\Leftarrow$ irány igazolásától itt eltekintünk, mivel az az $(F_n, F_m) = F_{(n,m)}$ egyenlőségből következik. Legyen $F_n \mid F_m$, ekkor $F_{(n,m)} = (F_n, F_m) = F_n$, ahonnan $(n, m) = n$, azaz $n \mid m$.

b) Az állítást három lépésben fogjuk igazolni:

i) $(F_n, F_{n+1}) = 1$.
Valóban, a legnagyobb közös osztó tulajdonságai alapján

$$(F_n, F_{n+1}) = (F_n, F_n + F_{n-1}) = (F_n, F_{n-1}) = \cdots = (F_1, F_2) = 1.$$

ii) Legyen $a = b \cdot q + r$, ekkor $(F_a, F_b) = (F_b, F_r)$:

$$(F_a, F_b) = (F_{b \cdot q+r}, F_b) \overset{7.13.e}{=} (F_{bq-1}F_r + F_{bq}F_{r+1}, F_b) = (F_{bq-1}F_r, F_b) = (F_r, F_b).$$

Az előző levezetés során kihasználtuk, hogy $F_b \mid F_{bq}$ és hogy $(F_{bq}, F_{bq-1}) = 1$.

iii) Alkalmazzuk az euklideszi algoritmust az n, m számokra:

$$\begin{aligned}
n &= mq_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < m,\\
m &= r_1q_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1,\\
r_1 &= r_2q_3 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2,\\
&\vdots\\
r_{s-2} &= r_{s-1}q_s + r_s, \quad 0 < r_s < r_{s-1},\\
r_{s-1} &= r_sq_{s+1}, \quad r_{s+1} = 0,
\end{aligned}$$

ahol $(n, m) = r_s$. Innen ii) szerint

$$\begin{aligned}
(F_n, F_m) &= (F_m, F_{r_1}),\\
(F_m, F_{r_1}) &= (F_{r_1}, F_{r_2}),\\
(F_{r_1}, F_{r_2}) &= (F_{r_2}, F_{r_3}),\\
&\vdots\\
(F_{r_{s-2}}, F_{r_{s-1}}) &= (F_{r_{s-1}}, F_{r_s}),
\end{aligned}$$

ahol $r_s \mid r_{s-1}$ miatt $F_{r_s} \mid F_{r_{s-1}}$ és kapjuk, hogy $(F_n, F_m) = (F_{r_{s-1}}, F_{r_s}) = F_{r_s} = F_{(n,m)}$ ■

vissza a feladathoz

6.17. Igaz-e, hogy az F_n Fibonacci-számokra ha F_n prím, akkor n is prím?

Megoldás. $F_4 = 3$ prím, de 4 nem prím, tehát az állítás nem igaz. De ha $n \neq 4$ és F_n prím, akkor n prím. Valóban, tegyük fel, hogy F_n prím és $n > 4$ összetett. Akkor létezik $d | n$, $2 < d < n$ és kapjuk, hogy $F_d \mid F_n$, ahol $2 \leq F_d < F_n$, tehát F_n összetett, ami ellentmondás .

Megjegyzés. *Fordítva nem igaz. Ha n prím, akkor nem biztos, hogy F_n is prím. A legkisebb ellenpélda:* $F_{19} = 4181 = 113 \cdot 37$. *Nem tudjuk, hogy van-e végtelen sok Fibonacci-prím.*

vissza a feladathoz

III.7. fejezet

Catalan-számok

7.9. Az origóból indulva, mindig jobbra vagy felfelé lépve egyet-egyet hányféleképpen juthatunk el a (7,11) pontba úgy, hogy sosem lépünk olyan helyre, ahol $y = x - 3$?

Ötlet: A I.7.7-es feladatban látottakhoz hasonlóan járhatunk el, csak most a tükrözést az $y = x - 3$ egyenesre végezzük. Figyeljünk arra is, hogy most a „jó” utak haladnak az egyenes felett és a „rossz” utak alatta.

vissza a feladathoz

7.10. Hány olyan sorozat képezhető n darab $+1$ és n darab -1 felhasználásával, melyben minden részletösszeg ≥ 0?

Ötlet: Induljunk az origóból. Ábrázoljuk f-típusú lépéssel, ha a sorozat aktuális eleme $+1$ és ℓ-típusú lépéssel, ha -1. Ekkor egy Dyck-utat keresünk az origó és a $(2n; 0)$ pont között.

vissza a feladathoz

7.11. Igazoljuk, hogy $2n+1$ elemű ± 1 tagokból álló sorozatok száma, melyben a teljes összeg 1 és minden részletösszeg pozitív

$$\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}.$$

Miköze ezeknek a Catalan-számokhoz?

Ötlet: Egészítsük ki a sorozatot egy $n+1$-edik -1-es taggal. Legyen ez a sorozat utolsó eleme. Az ilyen sorozatok előállításával foglalkoztunk eddig, tehát a $(0; 0)$ és a $(2n+2; 0)$ pontok közötti Dyck utak számára vagyunk kíváncsiak.

vissza a feladathoz

III.8. fejezet

Stirling-számok

8.6. Igazoljuk a másodfajú Stirling-számokra vonatkozó alábbi rekúrziót! Ha $1 \leq k \leq n$, akkor

$$\left\{ n \atop k \right\} = \sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n-1}{j-1} \left\{ n-j \atop k-1 \right\}.$$

Megoldás.

Tekintsük az $\{1,2,...,n\}$ halmaz k részre való partícióit. Ezek száma $\left\{ n \atop k \right\}$. Másrészt csoportosítsuk ezeket aszerint, hogy hány elemből áll az n-et tartalmazó részhalmaz. Ha j elemből áll, ahol $1 \leq j \leq n-k+1$ (mert $j+k-1 \leq n$ kell legyen), akkor a többi $j-1$ elemet $\binom{n-1}{j-1}$-féleképpen lehet megválasztani, a fennmaradó $k-1$ részhalmazt pedig $\left\{ n-j \atop k-1 \right\}$-féleképpen. Ezek szorzatait kell összegezni és készen is vagyunk.

vissza a feladathoz

8.7. Igazoljuk a Bell-számokra vonatkozó alábbi rekúrziót! (Lásd [16])

Ha $n, m \geq 0$, akkor a $0^0 = 1$ konvenció használatával

$$B(n+m) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} j^{n-k} \left\{ m \atop j \right\} \binom{n}{k} B(k).$$

Megoldás.

Ha $n = 0$, illetve ha $m = 1$, akkor innen a következő ismert képleteket kapjuk vissza:

$$(*) \quad B(m) = \sum_{j=0}^{m} \left\{ m \atop j \right\}, \qquad (**) \quad B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k).$$

Ha $n=0$, akkor a fenti (*) képletet kapjuk. Ha $m=0$, akkor $B(n)=B(n)$ adódik, mert $\left\{ 0 \atop 0 \right\}=1$.

Legyenek A és B olyan diszjunkt halmazok, amelyekre $|A| = m \geq 1$, $|B| = n \geq 1$. Akkor $|A \cup \cup B| = m+n$, és nézzük, hogy hányféleképpen lehet particionálni az $A \cup B$ halmazt. Ez a szám egyrészt $B(n+m)$. Másrészt, az A halmazt osszuk j részhalmazra. Ez $\left\{ m \atop j \right\}$-féleképpen lehetséges. Továbbá, B-nek válasszuk ki k elemét, ezt $\binom{n}{k}$-féleképpen lehet, és ezt a k elemet $\left\{ n \atop k \right\}$-féleképpen lehet particionálni. A B halmaz többi $n-k$ elemét vegyük hozzá az előbbi j részhalmazhoz, erre j^{n-k} lehetőség van.

Tehát $j^{n-k}\left\{ {m \atop j} \right\}\binom{n}{k}B(k)$ olyan partíció van, hogy az A halmazt j részhalmazra particionáltuk és B-nek k eleme alkot új részhalmazokat. Összegezve j és k szerint megkpjuk az $A\cup B$ halmaz partícióinak a számát.

vissza a feladathoz

8.8. Igazoljuk, hogy a másodfajú Stirling-számokra

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{\substack{a_1+\ldots+a_k=n\\ a_1,\ldots,a_k\geq 1}} \frac{n!}{k!\, a_1! \cdots a_k!}.$$

Megoldás. $\left\{ {n \atop k} \right\}$ megadja, hogy hányféleképpen lehet particionálni egy n elemű halmazt k részhalmazra.

Ha $a_1,\ldots,a_k \geq 1$ adottak úgy, hogy $a_1+\ldots+a_k=n$, akkor hány olyan partíció van, hogy az első halmazba (dobozba) a_1 elem kerül,..., a k-adik halmazba (dobozba) a_k elem kerül? Erre a válasz $\frac{n!}{a_1!\cdots a_k!}$, lásd 4.1. Feladat, de most a hamazok (dobozok) sorrendje nem számít, ezért az ilyen partíciók száma $\frac{n!}{k!a_1!\cdots a_k!}$. Összegezve kész.

vissza a feladathoz

8.9. Igazoljuk, hogy minden $n \geq k \geq 1$ esetén

$$\sum_{\substack{x_1+\ldots+x_k=n\\ x_1,\ldots,x_k\geq 1}} \frac{1}{x_1\cdots x_k} = \frac{k!}{n!}\left[{n \atop k} \right],$$

ahol $\left[{n \atop k} \right]$ az elsőfajú Stirling-számok.

Megoldás. Legyenek $x_1,\ldots,x_k \geq 1$ rögzítettek úgy, hogy $x_1+\ldots+x_k=n$. Hány olyan n-edfokú permutáció van, amelyben a ciklusok száma k és ezeknek a hossza rendre x_1,...,x_k úgy, hogy a ciklusok sorrendjére nem vagyunk tekintettel? Ez a szám $\dfrac{n!}{k!\, x_1\cdots x_k}$, mert egy x_i hosszúságú ciklus x_i-féleképpen írható, a ciklusok pedig $k!$-féleképpen permutálhatók.

Összegezve megkapjuk az összes k ciklus alkotta permutációk számát, ami másrészt pontosan $\left[{n \atop k} \right]$.

vissza a feladathoz

8.10. Igazoljuk, hogy a $B(n)$ Bell-számokra $B(n)<n!$ minden $n\geq 3$-ra.

Útmutatás: Végezzünk n szerinti indukciót használva a $B(n+1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B(k)$ rekurziót.

Másképp: Az $\{1,2,\ldots,n\}$ halmaz minden partíciójához rendeljük hozzá az $1,2,\ldots,n$ számoknak azt a permutációját, amelynek egyes ciklusait az ugyanahhoz a részhalmazhoz tartozó számok alkotják. Vizsgáljuk ezt a megfeleltetést!

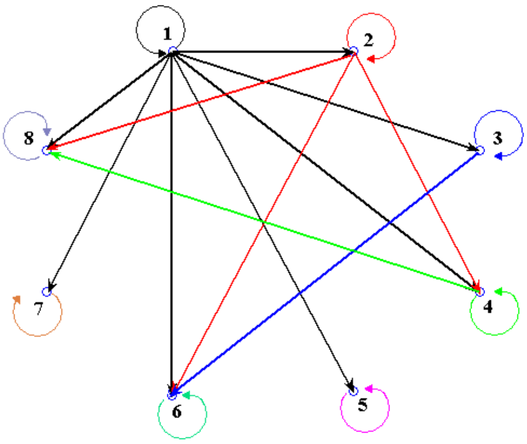
vissza a feladathoz

III.9. fejezet

Gráfelméleti fogalmak

9.35. Egy gráf csúcsai reprezentálják a természetes számokat 1-től 8-ig. A csúcsból B csúcsba fusson irányított él, ha az A-nak megfeleltetett természetes szám osztója a B-nek megfeleltetett természetes számnak. Rajzoljuk meg a gráfot!

Megoldás:



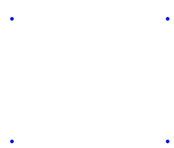
vissza a feladathoz

9.36. Adjuk meg, hány 4 pontú egyszerű gráf van! Rajzoljuk fel a nemizomorf eseteket. (Ezek száma 11, lásd TL: Kombinatorika 37.o.)

Megoldás:

Az összes élt behúzva egy teljesgráfhoz jutunk, melynek 6 éle van. Így $2^6 = 64$ különböző számozott gráf rajzolható. A nemizomorfak a következők:

0-élű gráf (üresgráf) egyetlen egy darab van:

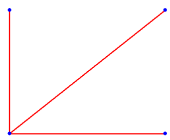
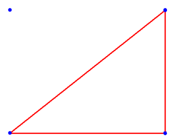


1-élű gráf hat darab van, de ezek mind izomorfak egymással:

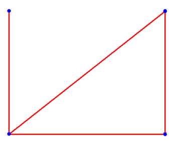
2-élű gráf $\binom{6}{2} = 15$ darab van, de ezek az alábbi két gráf valamelyikével izomorfak:

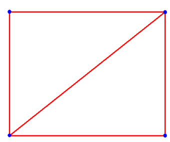
3-élű gráf $\binom{6}{3} = 20$ darab van, de ezek az alábbi három gráf valamelyikével izomorfak:

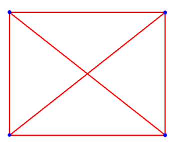
4-élű gráf $\binom{6}{4} = 15$ darab van, de ezek az alábbi két gráf valamelyikével izomorfak:

5-élű gráf $\binom{6}{5} = 6$ darab van, de ezek mind izomorfak:



6-élű gráf egyetlen egy darab van:

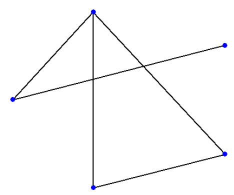


vissza a feladathoz

9.37. Rajzoljuk meg az alábbi szomszédsági mátrixhoz tartozó gráfot!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

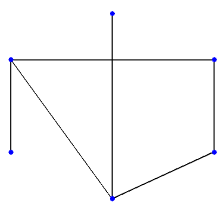


vissza a feladathoz

9.38. Rajzoljuk meg az alábbi illeszkedési mátrixhoz tartozó gráfot!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

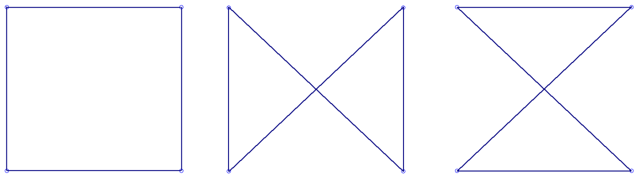


vissza a feladathoz

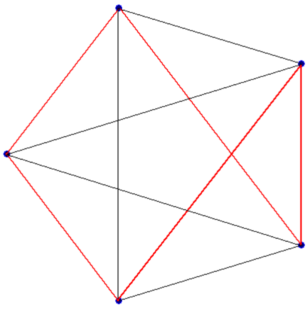
9.39. Hány kör van a teljes négyszögben? Hány öt hosszú kör van a teljes ötösben, hány hat hosszú kör van a teljes hatosban? Hány n hosszú kör van a teljes n-esben? (Az utolsó kérdés így is fogalmazható: hány Hamilton-köre van a teljes n-esnek?)

Megoldás:

A teljes négyesben négy háromszög van és három négyszög. Azért három, mert minden négyszög komplementere egy-egy párhuzamos élpár, és ilyen három van.



A teljes ötösben 12 ötszög van. Ezt az alábbi módon bizonyíthatjuk: Kiválasztunk egy pontot, ennek a két szomszédja $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen választható ki, a maradék két pont pedig kétféle sorrendben illeszthető be a körbe. Ez $6 \cdot 2 = 12$ kör.



A fenti meggondolás n pont esetére is átvihető, így a teljes n-szög Hamilton-köreinek száma

$$\binom{n-1}{2} \cdot (n-3)! = \frac{(n-1)!}{2}.$$

vissza a feladathoz

Irodalomjegyzék

[1] Andrásfalvi Béla: *Gráfelmélet*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1989.

[2] T. Davis: Catalan Numbers, 2006, http://mathcircle.berkeley.edu/BMC6/ps/catalan.pdf

[3] Elekes György: *Kombinatorika feladatok*, ELTE jegyzet, 2000.

[4] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik: *Konkrét matematika*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1998.

[5] Hajnal Péter: *Elemi kombinatorikai feladatok*, Polygon, Szeged, 1997.

[6] Hajnal Péter: *Összeszámlálási problémák*, Polygon, Szeged, 1997.

[7] Hajnal Péter: *Gráfelmélet*, Polygon, Szeged, 1997.

[8] T. Harju: *Lecture Notes in Combinatorial Enumeration*, A short course, University of Turku, 2004, http://users.utu.fi/harju/combinenum/MainEn.pdf

[9] Hetyei Gábor: *Kombinatorika és gráfelmélet*, Janus Pannonius Tudományegyetem Pécs, 1996.

[10] Hetyei Gábor, Kamarás Lajos: *Elemi matematika III.*, feladatgyűjtemény, Pécsi Tudományegyetem, 2000.

[11] Kalmárné N. Márta - Katonáné H. Eszter - Kámán Tamás: *Diszkrét matematikai feladatok*, Polygon, Szeged, 2005.

[12] Lovász László: *Kombinatorikai problémák és feladatok*, Typotex, Budapest, 1999.

[13] Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin: *Diszkrét matematika*, Typotex, Budapest, 2006.

[14] A. de Mier: *Lecture notes for "Enumerative Combinatorics"*, University of Oxford, 2004, http://www.math.dartmouth.edu/archive/m68f05/public_html/lectec.pdf

[15] Orosz Gyula: *Rekurzív sorozatok*

[16] M. Z. Spivey, A generalized recurrence for Bell numbers, *Journal of Integer Sequences*, Vol. **11** (2008), Article 08.2.5.

[17] Surányi László: *Gráfelmélet*, http://home.fazekas.hu/~lsuranyi/Grafok/Grafelmelet.htm

[18] Szendrei Ágnes: *Diszkrét matematika - logika, algebra, kombinatorika*, Polygon, Szeged, 2000.

[19] N. J. Vilenkin: *Kombinatorika*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.